Devoir Surveillé n^o 3 : Suites numériques - Trigonométries

Exercice 1 (10 Pts)

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2}; \\ u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{u_n + 2}; (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$

1. Montrez par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 < u_n < 2$ ..... (1 pt)
2. Étudiez la monotone de la suite (u_n). ..... (1 pt)
3. Montrez que : $(\forall n \in \mathbb{N})$, $0 < 2 - u_{n+1} < \frac{1}{2}(2 - u_n)$ ..... (1 pt)
4. On pose : $(\forall n \in \mathbb{N})$, $v_n = \frac{u_n + 1}{u_n - 2}$
   (a) Exprimez v_{n+1} en fonction de u_n ..... (1 pt)
   (b) Montrez que (v_n) est une suite géométrique de raison 4. ..... (1 pt)
   (c) Calculez v_0 puis exprimez v_n en fonction de n. ..... (1 pt)
5. Montrez que : $u_n = \frac{2v_n + 1}{v_n - 1}$ En déduire u_n en fonction de n. ..... (2 pts)
6. Calculez en fonction de n la somme : $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$ ..... (1 pt)
7. On pose :$T_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{3}{u_k - 2}$ montrez que $(\forall n \in \mathbb{N})$, $T_n = \frac{1}{3} - \frac{4^n}{3} - n$ ..... (1 pt)

Exercice 2

I) - $(\forall x \in \mathbb{R})$ on pose : $f(x) = sin(2x) - 2cos^2(x)$

1. Montrez que $\forall x \in \mathbb{R}$: $sin(x) - cos(x) = \sqrt{2}cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ ..... (1 pt)
2. En déduire que : $f(x) = 2\sqrt{2}sin(x)cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ ..... (1 pt)
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x) = 0$ ..... (1 pt)

II)-

1. Vérifier que $cos(2x) - \sqrt{3}sin(2x) = 2cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ ..... (1 pt)
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $cos(2x) - \sqrt{3}sin(2x) = 1$ ..... (1 pt)
3. En déduire dans $[-\pi; \pi[$ la solution de l'inéquation $cos(2x) - \sqrt{3}sin(2x) \geq 1$ ..... (1 pt)

Exercice 3

Les questions suivantes sont indépendantes :

1. (a) Calculer $cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$, $sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et montrer que $tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2 - \sqrt{3}$. $\left(indication\ \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)$. (2 pts)
   (b) Pour tout $x \neq \frac{\pi}{2}[\pi]$ Montrez que $\frac{1}{tan(\frac{\pi}{2} - x)} = tan(x)$ ..... (1 pt)
   (c) En déduire que $tan^2\left(\frac{\pi}{12}\right) + tan^2\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 14$ $\left(indication\ \frac{\pi}{12} + \frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{2}\right)$ ..... (1 pt)

L'usage de calculatrice n'est pas autorisé