Devoir Surveillé n^o 3 : Fonction logarithme - Primitives

Exercice 1 (15 Pts)

Partie I

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = x - 1 + ln(x)$

1. Calculez $g'(x)$ puis dressez tableau de variation de g sur $]0;+\infty[$ ..... (1.5 pts)
2. Déduire que : $(\forall x \in]0;1])$, $g(x) \leq 0$ et $(\forall x \in [1;+\infty[)$, $g(x) \geq 0$ ..... (1 pt)

Partie II

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = x + \frac{1}{2} - ln(x) + \frac{1}{2}(ln(x))^2$ et soit $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Calculez $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ puis interpréter le résultat géométriquement ..... (1 pt)
2. Montrez que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(ln(x))^2}{x} = 0$ ..... (1 pt)
3. Étudiez le branches infinie de f au voisinage de $+\infty$ ..... (1 pt)
4. Montrez que : $(\forall x \in]0;+\infty[) : f'(x) = \frac{g(x)}{x}$ ..... (1 pt)
5. Dressez le tableau de variations de la fonction f sur $]0;+\infty[$ ..... (1 pt)
6. Montrez que : $(\forall x \in]0;+\infty[: f''(x) = \frac{2 - ln(x)}{x^2}$ ..... (1 pt)
7. Étudiez la convexité de f en déterminons le point d'inflexion de $(\mathcal{C}_f)$ ..... (1.5 pts)
8. Étudiez la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ avec la droite (D) d'équation $y = x$ ..... (1 pt)
9. Tracez soigneusement $(\mathcal{C}_f)$ et (D) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. ..... (1 pt)

Partie III

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, $(\forall n \in \mathbb{N})$

1. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$, $1 \leq u_n \leq e$ ..... (1 pt)
2. Montrer que (u_n) est croissante. ..... (0.5 pt)
3. Déduire que (u_n) est convergente. ..... (0.5 pt)
4. Calculez la limite de u_n ..... (1 pt)

Exercice 2 (5 Pts)

I) On considère la fonction h définie par : $h(x) = \frac{4x}{x^2 + 2x - 3}$

1. Déterminer les deux réels a et b tels que : $h(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+3}$ ..... (1 pt)
2. Déduire les primitives de la fonction h ..... (1 pt)
3. Déterminer la primitive H de h qui est vérifié : $H(2) = 4ln(5)$ ..... (1 pt)

II) Déterminer les primitives des fonctions : $g(x) = tan(x)$ et $v(x) = \frac{1}{3}\sqrt{5+3x}$ ..... (2 pts)

Taher Bouyguir