Exercice 3 (11 pts)

Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher :

- 5 boules blanches numérotées : 0 : 0; 1; 2; 2.
- 3 boules noires numérotées : 1; 1; 2.
- 2 boules rouges numérotée : 0; 1.

I. On tire au hasard et simultanément 3 boules de l'urne.

Soient les événements suivants :

- A : ≪ Obtenir trois boules de même couleur ≫
- B : ≪ Obtenir une boule de chaque couleur ≫
- C : ≪ Obtenir une boule de chaque numéro ≫
- D : ≪ Obtenir trois boules de même numéro ≫
- E : ≪ Obtenir au moins une boule rouge ≫

1. Montrer que $\text{card}(\Omega) = 120$ ····· 0.5 pt
2. Calculer $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$ et $P(D)$ ····· 2 pt
3. Calculer $P(B \cap C)$ ····· 1 pt
4. (a) Montrer que $P(E) = \dfrac{8}{15}$ ····· 0.5 pt
   (b) On répète l'expérience précédente 5 fois de suite en remettant les boules tirées dans l'urne après chaque tirage. Calculer la probabilité pour que l'événement E soit réalisé exactement 2 fois. ····· 1 pt

II. On tire au hasard successivement et sans remise 2 boules de l'urne.

On considère l'événement F : « la somme des numéros obtenus est égale à 3 ».

1. Montrer que $P(F) = \dfrac{4}{15}$. ····· 1 pt
2. Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque tirage la somme des numéros des deux boules tirées alors : $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.
   (a) Montrer que $P(X = 1) = \dfrac{4}{15}$ et $P(X = 2) = \dfrac{1}{3}$ ····· 2 pt
   (b) Vérifier que $P(X = 0) = \dfrac{6}{90}$ et en déduire $P(X = 4)$ ····· 1.5 pt
   (c) Déterminer la loi de X. ····· 0.5 pt
   (d) Calculer l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$ ····· 1 pt