Devoir Surveillé n^o 3 : Généralités sur les fonctions - Transformation

Exercice 1 (3 pts)

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes : ..... (3 pts)

a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-3}}{x^2-2}$ b) $g(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-6x+8}}{x+2}$ c) $h(x) = \dfrac{x^2}{|x-1|-3}$

Exercice 2 (8 pts)

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^2 - 2|x| + 2$.

1. Déterminer $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition de f ..... (1 pt)
2. Montrer que f est paire ..... (1 pt)
3. Etudions f sur $[0;+\infty[$. Soit x et y deux nombres distincts de $[0;+\infty[$.
   (a) Montrer que le taux de variations de f est : $T = x + y - 2$ ..... (1 pt)
   (b) Montrer que f est décroissante sur $[0;1]$. ..... (1 pt)
   (c) Montrer que f est croissante sur $[1;+\infty[$. ..... (1 pt)
4. En utilisant la parité de f en déduire le tableau de variations de f sur $\mathcal{D}_f$. ..... (1.5 pt)
5. Résoudre l'équation : $f(x) = 2$ ..... (1.5 pts)

Exercice 3 (9 pts)

Soit $ABCD$ un parallélogramme, I et J deux points du plan tels que :

$$\overrightarrow{CI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{DC}$$

1. Construire une figure convenable..... (1 pt)
   (a) Déterminer l'image de I et l'image de A par la translation T de vecteur $\overrightarrow{AB}$ ..... (1 pt)
   (b) En déduire L'image de la droite (AI) par la translation T ..... (1 pt)
2. Soit h une homothétie de centre I tel que $h(B) = C$
   (a) Montrer que le rapport de h est $k = -2$. ..... (1 pt)
   (b) Soit E l'image de J par h. Montrer que $\overrightarrow{EC} = -2\overrightarrow{JB}$, $\overrightarrow{EI} = 2\overrightarrow{AB}$ ..... (2 pts)
3. Soit F le point d'intersection des droites (BA) et (ID). et on donne : $h((BA)) = (CD)$
   (a) Vérifier que : $h((ID)) = (ID)$. et En déduire que $h(F) = D$..... (2 pts)
4. On pose $h(A) = A'$ montrer que les points D, C et A' sont alignés..... (1 pt)