ÉCOLES NATIONALES DES SCIENCES APPLIQUÉES · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année des ENSA · Maroc

Session de juillet 2013

2013

Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14
B	C	D	C	C	D	B	A	A	B	A	C	A	D

Q15	Q16	Q17	Q18	Q19	Q20
D	D	B	C	C	A

Q1 ✔ Réponse B

Les « autres » représentent 15 % des candidats. Probabilité de réussir :

$$\begin{aligned} P(R) &= 0{,}35\times 0{,}95 + 0{,}5\times 0{,}5 + 0{,}15\times 0{,}2 \\ &= 0{,}3325 + 0{,}25 + 0{,}03 \\ &= 0{,}6125. \end{aligned}$$

$P_R(\text{autres}) = \dfrac{0{,}03}{0{,}6125} \approx 0{,}04898$, soit $0{,}0489$ (en tronquant à quatre décimales). La proposition $0{,}0498$ est trop grande.

Q2 ✔ Réponse C

Mathématiciens : $\binom{5}{3} = 10$ choix.
Physiciens : les 2 plus âgés sont imposés, il reste à en choisir 1 parmi les 4 autres : 4 choix.
$10 \times 4 = 40$ comités.

Q3 ✔ Réponse D

$1234 = 7\times 176 + 2$ et $4321 = 7\times 617 + 2$: les deux sont congrus à 2 modulo 7. Or $2^3 = 8 \equiv 1\ [7]$.
$4321 = 3\times 1440 + 1$ donc $2^{4321} \equiv 2$;
$1234 = 3\times 411 + 1$ donc $2^{1234} \equiv 2$. La somme est congrue à 4 : le reste est 4.

Q4 ✔ Réponse C

$2^2 = 4 \equiv 1\ [3]$, donc
$2^{100} = (2^2)^{50} \equiv 1\ [3]$: 3 divise $2^{100} - 1$.
$2^5 = 32 \equiv 1\ [31]$, donc
$2^{100} = (2^5)^{20} \equiv 1\ [31]$: 31 divise aussi $2^{100} - 1$.

Q5 ✔ Réponse C

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, donc

$$S = \frac{35\times 36\times 71}{6} = 35\times 6\times 71 = 14910.$$

Q6 ✔ Réponse D

$\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$: la somme télescope et vaut $1 - \dfrac{1}{11} = \dfrac{10}{11}$.

Q7 ✔ Réponse B

$7k$ est un entier, donc $E(7k) = 7k$ et

$$\sum_{k=1}^{n} E(7k) = \frac{7n(n+1)}{2}.$$

$$\frac{1}{n^2}\times\frac{7n(n+1)}{2} \to \frac{7}{2}.$$

Q8 ✔ Réponse A

Pour n pair, le terme vaut $3^{1/n} \to 1$; pour n impair, il vaut $1^{1/n} = 1$. La limite est 1.

Q9 ✔ Réponse A

$(3-2i)^2 = 9 - 12i - 4 = 5 - 12i$: les solutions sont $3-2i$ et $-3+2i$.
$\mathrm{Re}(z_1)\,\mathrm{Im}(z_2) = 3\times 2 = 6$, et l'on trouve aussi $(-3)\times(-2) = 6$ en échangeant z_1 et z_2.

Q10 ✔ Réponse B

$1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\pi/3}$ et $1 - i = \sqrt{2}\,e^{-i\pi/4}$, donc $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i} = \sqrt{2}\,e^{7i\pi/12}$.
$z = 2^{10}e^{140i\pi/12} = 1024\,e^{35i\pi/3} = 1024\,e^{-i\pi/3}$ (car $\frac{35\pi}{3} = 12\pi - \frac{\pi}{3}$).
$\mathrm{Im}(z) = 1024\times\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -512\sqrt{3}$.

Q11 ✔ Réponse A

$\sqrt{x+x^2} - \sqrt{x} = \sqrt{x}\left(\sqrt{1+x} - 1\right) = \dfrac{x\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}+1}$. Le quotient vaut

$$\frac{x\sqrt{x}}{(\sqrt{1+x}+1)\sqrt{3}\sqrt{x}\ln(1+x)} = \frac{1}{\sqrt{3}(\sqrt{1+x}+1)}\cdot\frac{x}{\ln(1+x)} \to \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

Q12 ✔ Réponse C

Quand $u \to 0$: $\cos u - 1 \sim -\dfrac{u^2}{2}$ et

$\ln(1+h) \sim h$, donc $\ln(\cos u) \sim -\dfrac{u^2}{2}$.
Le quotient est équivalent à $\dfrac{-(2x)^2/2}{-(3x)^2/2} = \dfrac{4}{9}$.

Q13 ✔ Réponse A

La limite se prend pour $x \to 0^+$.
$\ln(x+x^2) = \ln x + \ln(1+x)$, donc

$$\frac{\ln x + x^2}{\ln x + \ln(1+x)} = \frac{1 + \frac{x^2}{\ln x}}{1 + \frac{\ln(1+x)}{\ln x}} \to \frac{1+0}{1+0} = 1.$$

Q14 ✔ Réponse D

$\dfrac{1}{3+2^x} = \dfrac{1}{3}\left(1 - \dfrac{2^x}{3+2^x}\right)$ et une primitive de $\dfrac{2^x}{3+2^x}$ est $\dfrac{\ln(3+2^x)}{\ln 2}$.
L'intégrale vaut

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}\left[x - \frac{\ln(3+2^x)}{\ln 2}\right]_0^3 &= \frac{1}{3}\left(3 - \frac{\ln 11 - \ln 4}{\ln 2}\right) \\ &= 1 + \frac{2}{3} - \frac{\ln 11}{3\ln 2} = \frac{5}{3} - \frac{\ln 11}{\ln 8}. \end{aligned}$$

Q15 ✔ Réponse D

Par parties :

$$\left[x\ln(1+x^2)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x^2}{1+x^2}dx = \ln 2 - 2\int_0^1\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx = \ln 2 - 2 + 2\times\frac{\pi}{4}.$$

Q16 ✔ Réponse D

Avec $x = \sin t$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 t\cos^2 t\,dt = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\sin^2(2t)\,dt = \frac{1}{4}\times\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{16}.$$

Q17 ✔ Réponse B

$\overrightarrow{AB}(1,-3)$ dirige (AB), donc
$(AB) : 3(x-4) + (y-5) = 0$, soit $3x + y - 17 = 0$.

$$d(C,(AB)) = \frac{|6+1-17|}{\sqrt{10}} = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}.$$

Q18 ✔ Réponse C

En découpant ABC en trois triangles de sommet M :
$\mathrm{Aire}(ABC) = \frac{1}{2}a(d_1+d_2+d_3)$, où a est le côté. Donc $d_1+d_2+d_3$ est la hauteur du triangle équilatéral :

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}\times 4\sqrt{3} = 6 \text{ cm}.$$

Q19 ✔ Réponse C

$H_1 \neq H_2$ et tous deux de dimension 3 : $H_1 + H_2$ contient strictement H_1, donc $\dim(H_1+H_2) = 4$.
Formule de Grassmann :
$\dim(H_1 \cap H_2) = 3 + 3 - 4 = 2$.

Q20 ✔ Réponse **A**

$B = I + N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = 0$. Comme I et N commutent :

$$\begin{aligned} B^{13} &= I + 13N + \binom{13}{2} N^2 \\ &= I + 13N + 78N^2. \end{aligned}$$

Le coefficient en haut à droite vaut $13 + 78 = 91$.