ÉCOLES NATIONALES DES SCIENCES APPLIQUÉES · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

# Concours d'accès en 1re année des ENSA · Maroc

Session d'août 2014

**2014**

Correction

| Q1 | Q2 | Q3 | Q4 | Q5 | Q6 | Q7 | Q8 | Q9 | Q10 | Q11 | Q12 | Q13 | Q14 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| C | A | C | B | C | D | C | A | B | B | C | A | B | D |

| Q15 | Q16 | Q17 | Q18 | Q19 | Q20 |
|---|---|---|---|---|---|
| C | A | B | D | A | C |

**Q1** ✔ Réponse C

$y_{n+1} = \dfrac{u_n^2 - v_n^2}{u_n + v_n} = u_n - v_n = y_n$ : $(y_n)$ est constante, égale à $\alpha - \beta$. Et $x_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{v_n^2} = x_n^2$, donc $x_n = \left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{2^n} \to 0$ car $0 < \frac{\alpha}{\beta} < 1$.

**Q2** ✔ Réponse A

$y_{n+1} = \dfrac{u_n^2 - v_n^2}{u_n + v_n} = u_n - v_n = y_n$ : $(y_n)$ est constante, égale à $\alpha - \beta$. Et $x_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{v_n^2} = x_n^2$, donc $x_n = \left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{2^n} \to 0$ car $0 < \frac{\alpha}{\beta} < 1$.

**Q3** ✔ Réponse C

$y_{n+1} = \dfrac{u_n^2 - v_n^2}{u_n + v_n} = u_n - v_n = y_n$ : $(y_n)$ est constante, égale à $\alpha - \beta$. Et $x_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{v_n^2} = x_n^2$, donc $x_n = \left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{2^n} \to 0$ car $0 < \frac{\alpha}{\beta} < 1$.

Comme $u_n = x_n v_n$ : $y_n = v_n(x_n - 1)$, donc $v_n = \dfrac{\alpha - \beta}{x_n - 1} \to \beta - \alpha$, puis $u_n = v_n + y_n \to (\beta - \alpha) + (\alpha - \beta) = 0$.

**Q4** ✔ Réponse B

$y_{n+1} = \dfrac{u_n^2 - v_n^2}{u_n + v_n} = u_n - v_n = y_n$ : $(y_n)$ est constante, égale à $\alpha - \beta$. Et $x_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{v_n^2} = x_n^2$, donc $x_n = \left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{2^n} \to 0$ car $0 < \frac{\alpha}{\beta} < 1$.

$y_n = u_n - v_n = v_n(x_n - 1)$, donc $v_n = \dfrac{\alpha - \beta}{x_n - 1} \to \dfrac{\alpha - \beta}{-1} = \beta - \alpha$.

**Q5** ✔ Réponse C

$(1-\delta)(1+\delta) = 1 - \delta^2$, puis $(1-\delta^2)(1+\delta^2) = 1 - \delta^4$, etc. Par récurrence :

$$(1-\delta)\prod_{k=0}^{n}\left(1+\delta^{2^k}\right) = 1 - \delta^{2^{n+1}} \to 1,$$

donc le produit tend vers $\dfrac{1}{1-\delta}$.

**Q6** ✔ Réponse D

$e^t \cos 2t = \mathrm{Re}\left(e^{(1+2i)t}\right)$ et $\displaystyle\int_0^\pi e^{(1+2i)t}dt = \frac{e^{(1+2i)\pi} - 1}{1+2i} = \frac{e^\pi - 1}{1+2i}$ (car $e^{2i\pi} = 1$). $\dfrac{1}{1+2i} = \dfrac{1-2i}{5}$, de partie réelle $\frac{1}{5}$ : l'intégrale vaut $\dfrac{e^\pi - 1}{5}$.

**Q7** ✔ Réponse C

$\cos^2 t = \dfrac{1 + \cos 2t}{2}$, donc l'intégrale vaut $\dfrac{1}{2}(e^\pi - 1) + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{e^\pi - 1}{5} = \dfrac{3(e^\pi - 1)}{5}$ (avec Q6).

**Q8** ✔ Réponse A

Notons $I = \int_a^b t f(t)\,dt$. Avec $t \mapsto a + b - t$ :

$$I = \int_a^b (a+b-t)f(a+b-t)\,dt = \int_a^b (a+b-t)f(t)\,dt.$$

En additionnant : $2I = (a+b)\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$.

**Q9** ✔ Réponse B

Avec $u = \cos t$ :

$$\int_{-1}^{1}\frac{du}{3+u^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\arctan\frac{u}{\sqrt{3}}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

**Q10** ✔ Réponse B

$f(t) = \dfrac{\sin t}{3 + \cos^2 t}$ vérifie $f(\pi - t) = f(t)$ sur $[0, \pi]$. D'après Q8 puis Q9 :

$$\int_0^\pi t f(t)\,dt = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(t)\,dt = \frac{\pi}{2}\times\frac{\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{\pi^2}{6\sqrt{3}}.$$

**Q11** ✔ Réponse C

$$ab = \frac{\sqrt[3]{(54\sqrt{3})^2 - (41\sqrt{5})^2}}{3} = \frac{\sqrt[3]{8748 - 8405}}{3} = \frac{\sqrt[3]{343}}{3} = \frac{7}{3}.$$

**Q12** ✔ Réponse A

$\lambda^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$, avec $a^3 + b^3 = \dfrac{(41\sqrt{5} + 54\sqrt{3}) + (54\sqrt{3} - 41\sqrt{5})}{3\sqrt{3}} = \dfrac{108\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = 36$ et $3ab = 7$.

Donc $\lambda^3 = 36 + 7\lambda$, soit $\lambda^3 - 7\lambda - 36 = 0$.

**Q13** ✔ Réponse B

$4^3 - 7\times 4 - 36 = 64 - 28 - 36 = 0$, et $x^3 - 7x - 36 = (x-4)(x^2 + 4x + 9)$ où $x^2 + 4x + 9 > 0$. Donc $\lambda = 4$ : un réel pair (et $\lambda > 4$ est faux).

**Q14** ✔ Réponse D

$P_2 = 0{,}8 \times P_1 + 0{,}6 \times (1 - P_1) = 0{,}8\times 0{,}1 + 0{,}6\times 0{,}9 = 0{,}08 + 0{,}54 = 0{,}62$.

**Q15** ✔ Réponse C

$P_{B_2}\left(\overline{B_1}\right) = \dfrac{P\left(\overline{B_1}\cap B_2\right)}{P(B_2)} = \dfrac{0{,}9\times 0{,}6}{0{,}62} = \dfrac{0{,}54}{0{,}62} = \dfrac{27}{31}$.

**Q16** ✔ Réponse A

Événement contraire : trois mauvaises réponses, de probabilité $0{,}9\times 0{,}4\times 0{,}4 = 0{,}144$ (après une mauvaise réponse, la suivante est mauvaise avec la probabilité 0,4). $P = 1 - 0{,}144 = 0{,}856$.

**Q17** ✔ Réponse B

$z$ est invariant si $z(z - 3i) = 3iz - 7$, soit $z^2 - 6iz + 7 = 0$. Discriminant : $-36 - 28 = -64 = (8i)^2$, d'où $z = \dfrac{6i \pm 8i}{2}$ : $z_B = 7i$ et $z_C = -i$. Le cercle $\mathcal{E}$ a pour centre le milieu $3i$ (c'est le point $A$) et pour rayon 4. $\mathrm{Im}(z_B) + \mathrm{Im}(z_C) = 7 - 1 = 6$ (c'est aussi la partie imaginaire de la somme des racines, $6i$).

**Q18** ✔ Réponse **D**

$z$ est invariant si $z(z-3i) = 3iz - 7$, soit $z^2 - 6iz + 7 = 0$. Discriminant : $-36 - 28 = -64 = (8i)^2$, d'où $z = \dfrac{6i \pm 8i}{2}$ : $z_B = 7i$ et $z_C = -i$. Le cercle $\mathcal{E}$ a pour centre le milieu $3i$ (c'est le point $A$) et pour rayon $4$.
Un point $M$ de $\mathcal{E}$ vérifie $|z - 3i| = 4$, donc $z = 3i + 4e^{i\Theta}$ pour un réel $\Theta$.
(Les écritures A et C décrivent aussi ce cercle, en remplaçant $\Theta$ par $\Theta + \pi$ ou $-\Theta$ ; la forme attendue, directement lue sur le centre et le rayon, est D.)

**Remarque :** A (3i − 4e^{iΘ}) et C (3i + 4e^{−iΘ}) décrivent aussi le cercle $\mathcal{E}$ pour un autre choix de $\Theta$ : plusieurs propositions sont vraies au sens strict. D est la forme attendue. À trancher par le professeur.

**Q19** ✔ Réponse **A**

$z$ est invariant si $z(z-3i) = 3iz - 7$, soit $z^2 - 6iz + 7 = 0$. Discriminant : $-36 - 28 = -64 = (8i)^2$, d'où $z = \dfrac{6i \pm 8i}{2}$ : $z_B = 7i$ et $z_C = -i$. Le cercle $\mathcal{E}$ a pour centre le milieu $3i$ (c'est le point $A$) et pour rayon $4$.
Avec $z = 3i + 4e^{i\Theta}$ : $z - 3i = 4e^{i\Theta}$ et $3iz - 7 = 3i(3i + 4e^{i\Theta}) - 7 = -16 + 12ie^{i\Theta}$. Donc

$$z' = \frac{-16 + 12ie^{i\Theta}}{4e^{i\Theta}} = 3i - 4e^{-i\Theta}.$$

**Remarque :** Pour le même Θ que celui de M (Q18), z′ = 3i − 4e^{−iΘ} (A). Mais « il existe un réel Θ » rend D (3i + 4e^{−iΘ}) vraie aussi, avec Θ remplacé par Θ + π. À trancher par le professeur.

**Q20** ✔ Réponse **C**

D'après Q19, $|z' - 3i| = \left|-4e^{-i\Theta}\right| = 4$ : $M'$ appartient au cercle $\mathcal{E}$ de centre $3i$ et de rayon $4$.