ÉCOLES NATIONALES DES SCIENCES APPLIQUÉES · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année des ENSA · Maroc

Session d'août 2014

2014

Énoncé

Exercice 1 : Soit u_n et v_n les suites réelles définies par :

$$u_0 = \alpha,\ v_0 = \beta \quad \text{avec } 0 < \alpha < \beta$$

$$\text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} : \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{u_n + v_n} \\ v_{n+1} = \dfrac{v_n^2}{u_n + v_n} \end{cases}$$

On pose : $x_n = \dfrac{u_n}{v_n}$ et $y_n = u_n - v_n$

Q1 La suite (x_n) :

A Converge vers $\dfrac{\alpha}{\beta}$ B Converge vers 1
C Converge vers 0 D Diverge

Q2 La suite (y_n) :

A Converge vers $\alpha - \beta$
B Converge vers $\alpha + \beta$
C Converge vers 0
D Diverge

Q3 La suite (u_n) :

A Converge vers α B Converge vers β
C Converge vers 0 D Diverge

Q4 La suite (v_n) :

A Converge vers $\alpha - \beta$
B Converge vers $\beta - \alpha$
C Converge vers β
D Diverge

Q5 Soit δ un élément de $]0, 1[$.

$$\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=0}^{n} \left(1 + \delta^{2^k}\right) =$$

A 1 B $+\infty$ C $\dfrac{1}{1-\delta}$ D $\dfrac{1}{1+\delta}$

Exercice 2 : Calculer les intégrales suivantes :

Q6 $\displaystyle\int_0^{\pi} e^t \cos 2t\, dt =$

A $\dfrac{e^\pi}{5}$ B $\dfrac{e^\pi + 1}{5}$
C $\dfrac{e^\pi - 2}{5}$ D $\dfrac{e^\pi - 1}{5}$

Q7 $\displaystyle\int_0^{\pi} e^t \cos^2 t\, dt =$

A $\dfrac{e^\pi - 1}{5}$ B $\dfrac{4(e^\pi + 1)}{5}$
C $\dfrac{3(e^\pi - 1)}{5}$ D $\dfrac{e^\pi + 2}{5}$

Exercice 3 : Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et telle que :
$\forall x \in [a, b],\ f(a + b - x) = f(x)$.

Q8 $\displaystyle\int_a^b t f(t)\, dt =$

A $\dfrac{a+b}{2}\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ B $\dfrac{a-b}{2}\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$
C $\dfrac{a}{2}\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ D $\dfrac{b}{2}\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$

Q9 L'intégrale

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{3 + \cos^2 t}\, dt =$$

A $\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}$ B $\dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$ C $\dfrac{\pi}{3}$ D $\dfrac{\pi}{2\sqrt{3}}$

Q10 L'intégrale

$$\int_0^{\pi} \frac{t \sin t}{3 + \cos^2 t}\, dt =$$

A $\dfrac{\pi}{6\sqrt{3}}$ B $\dfrac{\pi^2}{6\sqrt{3}}$ C $\dfrac{\pi^3}{6\sqrt{3}}$ D $\dfrac{\pi^2}{2\sqrt{3}}$

Exercice 4 : On note

$$a = \frac{\sqrt[3]{41\sqrt{5} + 54\sqrt{3}}}{\sqrt{3}},$$

$$b = \frac{\sqrt[3]{54\sqrt{3} - 41\sqrt{5}}}{\sqrt{3}}$$

et $\lambda = a + b$.

Q11 Le produit ab vaut

A $\dfrac{1}{3}$ B $\dfrac{2}{3}$ C $\dfrac{7}{3}$ D 1

Q12 λ est solution de l'équation

A $x^3 - 7x - 36 = 0$
B $x^3 + 7x - 21 = 0$
C $x^3 - 7x = 0$
D $x^3 - 7x - 35 = 0$

Q13 La valeur de λ est alors

A nulle B un réel pair
C un réel impair D $\lambda > 4$

Exercice 5 : Un candidat se présentant à un concours, doit répondre d'une manière successive à une série de questions $(Q_n)_{n>0}$. L'épreuve est présentée en ligne et autre que Q_1, l'accès à Q_n n'est possible que si le candidat donne une réponse à Q_{n-1}. On admet que :

- la probabilité de donner une bonne réponse à Q_1 est $0{,}1$;
- pour $n > 1$: si le candidat donne une bonne réponse à Q_{n-1}, la probabilité de donner une bonne réponse à Q_n est $0{,}8$; si le candidat donne une mauvaise réponse à Q_{n-1}, la probabilité de donner une bonne réponse à Q_n est $0{,}6$.

On note pour tout entier naturel n non nul, B_n l'évènement « L'étudiant donne une bonne réponse à la question Q_n » et P_n la probabilité de B_n.

Q14 La valeur de P_2 est :

A $0{,}52$ B $0{,}59$ C $0{,}54$ D $0{,}62$

Q15 L'étudiant a répondu correctement à la deuxième question, la probabilité qu'il ait donné une mauvaise réponse à la première vaut

A $\dfrac{27}{37}$ B $\dfrac{21}{37}$ C $\dfrac{27}{31}$ D $\dfrac{21}{31}$

Q16 La probabilité que le candidat ait au moins une bonne réponse aux trois premières questions est

A $0{,}856$ B $0{,}865$ C $0{,}685$ D $0{,}585$

Exercice 6 : Le plan complexe P est rapporté au repère orthonormal direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$; unité graphique 1 cm. Soit A le point d'affixe $3i$. On appelle f l'application qui, à tout point M d'affixe z, distinct de A, associe le point M' d'affixe z' définie par

$$z' = \frac{3iz - 7}{z - 3i}$$

On dit que M est invariant si $M = M'$.

Q17 f admet deux points invariants B et C et on note z_B et z_C les affixes respectives. Montrer que la somme des parties imaginaires de z_B et z_C vaut

A -6 B 6 C 5 D -5

On admet que B et C sont tels que $|\mathrm{Im}(z_B)| > |\mathrm{Im}(z_C)|$ et on appelle $\mathcal{E}$ le cercle de diamètre $[BC]$. Soit M un point quelconque de $\mathcal{E}$ différent de B et de C et M' son image par f.

Q18 Il existe un réel Θ tel que l'affixe z de M s'écrit

A $3i - 4e^{i\Theta}$ B $-3i - 4e^{i\Theta}$
C $3i + 4e^{-i\Theta}$ D $3i + 4e^{i\Theta}$

Q19 Il existe un réel Θ tel que l'affixe z' de M' s'écrit

A $3i - 4e^{-i\Theta}$ B $-3i + 4e^{i\Theta}$
C $-3i + 4e^{-i\Theta}$ D $3i + 4e^{-i\Theta}$

Q20 Le point M'

A est à l'intérieur du cercle $\mathcal{E}$
B est à l'extérieur du cercle $\mathcal{E}$
C appartient au cercle $\mathcal{E}$
D est le centre du cercle $\mathcal{E}$