ÉCOLES NATIONALES DES SCIENCES APPLIQUÉES · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année des ENSA · Maroc

Session de juillet 2015

2015

Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14
C	A	B	D	C	C	C	A	D	A	B	A	C	D

Q15	Q16	Q17	Q18	Q19	Q20
A	A	B	A	C	D

Q1 ✔ Réponse C

$\sum_{k=0}^{12} C_{12}^k = (1+1)^{12} = 4096$, donc la somme vaut $2048 - 34 = 2014$.

Q2 ✔ Réponse A

$\mathrm{Min}(i,j) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{k\le i}\mathbf{1}_{k\le j}$, donc la somme vaut $\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)^2 = \sum_{m=1}^{n} m^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Vérification : pour $n=2$, Min vaut $1,1,1,2$, de somme $5 = \frac{2\times3\times5}{6}$.

Q3 ✔ Réponse B

Avec a et b les deux racines cubiques : $a^3 - b^3 = 6$ et $ab = \sqrt[3]{(9+\frac{125}{27})} - 9 = \sqrt[3]{\frac{125}{27}} = \frac{5}{3}$.

$\lambda^3 = (a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b) = 6 - 5\lambda$, donc $\lambda^3 + 5\lambda - 6 = (\lambda-1)(\lambda^2+\lambda+6) = 0$, et $\lambda = 1$ (le second facteur est toujours positif).

Q4 ✔ Réponse D

$\left|\left(\frac{\sin n}{3}\right)^n\right| \le \left(\frac{1}{3}\right)^n \to 0$.

Q5 ✔ Réponse C

La somme compte $2n+2$ termes, chacun compris entre $\frac{n}{n^2+2n+1}$ et $\frac{n}{n^2}$:

$$\frac{(2n+2)n}{(n+1)^2} = \frac{2n}{n+1} \le \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{n}{n^2+k} \le \frac{2n+2}{n}.$$

Les deux bornes tendent vers 2.

Q6 ✔ Réponse C

$\frac{e^{10x}-e^{7x}}{x} = 10\,\frac{e^{10x}-1}{10x} - 7\,\frac{e^{7x}-1}{7x} \to 10 - 7 = 3$.

Q7 ✔ Réponse C

Pour $0 < x < 1$: $\ln x < 0$ et $1 \le 1 + \sin^2\frac{1}{x}$, donc $\left(1+\sin^2\frac{1}{x}\right)\ln x \le \ln x \to -\infty$.

Q8 ✔ Réponse A

$10 - 3e^x$ ne s'annule pas sur $[0,1]$ (car $3e < 10$), et $\left(\frac{1}{3(10-3e^x)}\right)' = \frac{e^x}{(10-3e^x)^2}$.

L'intégrale vaut $\left[\frac{1}{3(10-3e^x)}\right]_0^1 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{10-3e} - \frac{1}{7}\right)$.

Q9 ✔ Réponse D

Par parties ($u = (\ln x)^2$, $v' = \frac{1}{x^2}$) :

$\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x^2}dx = \left[-\frac{(\ln x)^2}{x}\right]_1^e + 2\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx = -\frac{1}{e} + 2\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx$.

De même, $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx = \left[-\frac{\ln x}{x}\right]_1^e + \int_1^e \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{e} + 1 - \frac{1}{e} = 1 - \frac{2}{e}$.

Total : $-\frac{1}{e} + 2 - \frac{4}{e} = 2 - \frac{5}{e}$.

Q10 ✔ Réponse A

$\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$, d'où $\left[\ln\frac{x+1}{x+2}\right]_0^1 = \ln\frac{2}{3} - \ln\frac{1}{2} = \ln\frac{4}{3}$.

Q11 ✔ Réponse B

U_1 contient 2 boules vertes sur 5 : $P_1 = \frac{2}{5} = 0{,}40$.

Q12 ✔ Réponse A

U_2 contient alors 2 jaunes et 3 vertes : $\frac{3}{5} = 0{,}60$.

Q13 ✔ Réponse C

Pour $n \ge 1$, l'urne U_{n+1} contient 2 jaunes, 2 vertes et la boule reçue de U_n (donc 5 boules). Si cette boule est verte, on tire une verte avec la probabilité $\frac{3}{5}$, sinon $\frac{2}{5}$. Formule des probabilités totales : $P_2 = 0{,}4 \times \frac{3}{5} + 0{,}6 \times \frac{2}{5} = 0{,}24 + 0{,}24 = 0{,}48$.

Q14 ✔ Réponse D

Pour $n \ge 1$, l'urne U_{n+1} contient 2 jaunes, 2 vertes et la boule reçue de U_n (donc 5 boules). Si cette boule est verte, on tire une verte avec la probabilité $\frac{3}{5}$, sinon $\frac{2}{5}$. $P_{n+1} = \frac{3}{5}P_n + \frac{2}{5}(1-P_n) = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}P_n$, soit $5P_{n+1} = 2 + P_n$.

Q15 ✔ Réponse A

Avec $5P_{n+1} = 2 + P_n$: $P_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{5}\left(P_n - \frac{1}{2}\right)$. La suite $\left(P_n - \frac{1}{2}\right)$ est géométrique de raison $\frac{1}{5}$, donc $P_n \to \frac{1}{2}$: une chance sur deux.

Q16 ✔ Réponse A

$\frac{c-b}{a-b} = \frac{-3+i\sqrt{3}}{-1-i\sqrt{3}} = \frac{(-3+i\sqrt{3})(-1+i\sqrt{3})}{4} = -i\sqrt{3}$: imaginaire pur, donc $\widehat{ABC} = 90°$.

Q17 ✔ Réponse B

Le triangle est rectangle en B : le centre du cercle circonscrit est le milieu de $[AC]$, $\omega = \frac{2+2i\sqrt{3}}{2} = 1 + i\sqrt{3}$.

Q18 ✔ Réponse A

Avec $q = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$: $\omega = q\omega + 2$ (vérification : $q\omega = -1 + i\sqrt{3}$). En soustrayant, $t_{n+1} = z_{n+1} - \omega = q(z_n - \omega) = q\,t_n$.

Q19 ✔ Réponse C

$q = e^{i\pi/3}$ donc $q^6 = 1$: $t_{n+6} = q^6 t_n = t_n$, d'où $z_{n+6} = z_n$ et $A_{n+6} = A_n$.

Q20 ✔ Réponse D

$2015 = 6 \times 335 + 5$, donc $A_{2015} = A_5$. $t_0 = -\omega$ et

$$t_5 = q^5 t_0 = -e^{-i\pi/3}(1+i\sqrt{3}) = -2,$$

donc $z_5 = t_5 + \omega = -1 + i\sqrt{3}$.