ÉCOLES NATIONALES DES SCIENCES APPLIQUÉES · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année des ENSA · Maroc

Session de juillet 2015

2015

Énoncé

Q1 La somme

$$\frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{12} C_{12}^{k}\right) - 34 =$$

A 2012 B 2013 C 2014 D 2015

Q2 $n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}} \text{Min}(i,j) =$$

A $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

B $\dfrac{n(n+1)}{3}$

C $\dfrac{n(n+2)}{3}$

D $\dfrac{(n+1)(n+2)}{6}$

Q3 Soit le réel

$$\lambda = \sqrt[3]{3+\sqrt{9+\frac{125}{27}}} - \sqrt[3]{-3+\sqrt{9+\frac{125}{27}}}$$

En calculant λ^3, montrer que :

A $\lambda = 0$ B $\lambda = 1$
C $\lambda = 2$ D $\lambda = 3$

Q4 $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{\sin(n)}{3}\right)^n =$

A 1 B $\frac{1}{3}$ C $\frac{2}{3}$ D 0

Q5 $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{2n+1} \dfrac{n}{n^2+k} =$

A 0 B 1 C 2 D k

Q6 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{10x}-e^{7x}}{x} =$

A 1 B 2 C 3 D 4

Q7 $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(1+\sin^2\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)\ln x =$

A 1 B 0 C $-\infty$ D $+\infty$

Q8 $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{(10-3e^x)^2}\,dx =$

A $\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{10-3e}-\dfrac{1}{7}\right)$

B $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{10-3e}+\dfrac{1}{7}\right)$

C $\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{10-e}-\dfrac{1}{7}\right)$

D $\dfrac{1}{10-3e}$

Q9 $\displaystyle\int_1^e \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx =$

A $-\frac{5}{e}$ B $2+\frac{5}{e}$ C $\frac{5}{e}$ D $2-\frac{5}{e}$

Q10 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2+3x+2}\,dx =$

A $\ln\left(\frac{4}{3}\right)$ B $\frac{4}{3}$ C $\ln\left(\frac{5}{3}\right)$ D $\frac{5}{3}$

Problème 1 : On considère plusieurs urnes de boules $U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots$ telles que : la première urne, U_1, contient trois boules jaunes et deux boules vertes et chacune des autres urnes contient deux boules jaunes et deux boules vertes. On réalise des tirages successifs de la manière suivante :

- on tire au hasard une boule de U_1 ;
- on place la boule tirée de U_1 dans U_2, puis on tire une boule dans U_2 ;
- on place la boule tirée de U_2 dans U_3, puis on tire une boule dans U_3 ;
- … etc.

Pour tout entier $n \geq 1$, on note E_n l'événement « la boule tirée de U_n est verte » et $P_n = P(E_n)$ sa probabilité.

Q11 La valeur de P_1 est

A 0,54 B 0,40 C 0,44 D 0,64

Q12 Sachant qu'on a tiré une boule verte de U_1 et qu'on l'a placée dans U_2, la probabilité de tirer une boule verte de U_2 est

A 0,60 B 0,83 C 0,80 D 0,33

Q13 La valeur de P_2 est

A 0,44 B 0,46 C 0,48 D 0,45

Q14 La relation entre P_n et P_{n+1} est

A $P_{n+1} = 5 + 5P_n$
B $P_{n+1} = 2 + 5P_n$
C $P_{n+1} = 5 + 2P_n$
D $5P_{n+1} = 2 + P_n$

Q15 En étudiant le comportement de la suite P_n, peut-on confirmer qu'après un grand nombre de tirage on a

A une chance sur deux de tirer une boule verte
B une chance sur trois de tirer une boule verte
C une chance sur quatre de tirer une boule verte
D une chance sur cinq de tirer une boule verte

Problème 2 : Le plan complexe P est rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$; unité graphique 1 cm. Soient A, B et C les points d'affixes respectives $a = 2$, $b = 3 + i\sqrt{3}$ et $c = 2i\sqrt{3}$.

Q16 La mesure de l'angle $\widehat{ABC}$ vaut

A 90° B 95° C 85° D 180°

Q17 L'affixe ω du centre Ω du cercle circonscrit au triangle ABC est

A $1 - i\sqrt{3}$ B $1 + i\sqrt{3}$
C $-1 + i\sqrt{3}$ D $-1 - i\sqrt{3}$

Q18 On note A_n le point d'affixe z_n, où z_n est la suite de nombres complexes, de premier terme $z_0 = 0$, et telle que, pour tout entier naturel n :

$$z_{n+1} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} z_n + 2$$

On considère la suite $t_n = z_n - \omega$.
En faisant remarquer que ω est solution de l'équation $z = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2} z + 2$, la suite t_n vérifie la relation :

A $t_{n+1} = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2} t_n$

B $t_{n+1} = \dfrac{1-i\sqrt{3}}{2} t_n$

C $\left(1+i\sqrt{3}\right) t_{n+1} = 2t_n$

D $\left(1+i\sqrt{3}\right) t_n = 2t_{n+1}$

Q19 En déduire que pour tout entier naturel n, on a :

A $A_{n+6} = 2A_n$ B $A_{n+6} = -A_n$
C $A_{n+6} = A_n$ D $A_{n+6} = -2A_n$

Q20 La valeur de A_{2015} est

A $-1 + 2i\sqrt{3}$ B $3 + i\sqrt{3}$
C $3i\sqrt{2}$ D $-1 + i\sqrt{3}$