ÉCOLES NATIONALES DES SCIENCES APPLIQUÉES · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année des ENSA · Maroc

Session de juillet 2016

2016

Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14
C	D	A	B	C	A	C	A	A	D	A	D	B	A

Q15	Q16	Q17	Q18	Q19	Q20
B	A	C	B	A	C

Q1 ✔ Réponse C

$|t| = \dfrac{|c-a|}{|b-a|} = \dfrac{AC}{AB}$ et $\arg t = \arg(c-a) - \arg(b-a) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ $[2\pi]$.

$t = re^{i\theta}$ signifie donc $AC = rAB$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \theta$ $[2\pi]$.

Q2 ✔ Réponse D

A, B, C sont alignés si et seulement si $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv 0$ $[\pi]$, c'est-à-dire $\arg t \equiv 0$ $[\pi]$: t est réel (positif ou négatif).

Q3 ✔ Réponse A

ABC est rectangle en A si et seulement si $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{2}$ $[\pi]$: t est imaginaire pur ($t \neq 0$ car les points sont distincts). L'angle peut valoir $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$, d'où $i\mathbb{R}$ et non $i\mathbb{R}_+$.

Q4 ✔ Réponse B

Une partie est déterminée en décidant, pour chacun des n éléments, s'il y appartient ou non : 2^n parties.

Q5 ✔ Réponse C

On choisit l'unique élément de A (p façons), puis une partie quelconque de $E \setminus A$, qui a $n-p$ éléments (2^{n-p} façons) : $p\,2^{n-p}$.

Q6 ✔ Réponse A

Un chemin compte $p+q$ pas, dont q vers le haut. Il est déterminé par la position de ces q pas parmi les $p+q$: C_{p+q}^{q} chemins.

Q7 ✔ Réponse C

$f(2) = \dfrac{4}{5} = f\left(\dfrac{1}{2}\right)$: deux réels distincts ont la même image, f n'est pas injective. (Elle n'est pas surjective non plus : $|f(x)| \leq 1$ car $1 + x^2 \geq 2|x|$.)

Q8 ✔ Réponse A

$15! = 2^{11} \times 3^6 \times 5^3 \times 7^2 \times 11 \times 13$ (exposant de 2 : $7+3+1=11$; de 3 : $5+1=6$; de 5 : 3 ; de 7 : 2).
Nombre de diviseurs : $12 \times 7 \times 4 \times 3 \times 2 \times 2 = 4032$.

Q9 ✔ Réponse A

4 choix pour chacune des 20 questions : 4^{20} grilles.

Q10 ✔ Réponse D

Les trois nombres sont positifs, donc

$$\begin{aligned}\alpha^3 &\leq x(1-y)\,y(1-z)\,z(1-x)\\ &= \big(x(1-x)\big)\big(y(1-y)\big)\big(z(1-z)\big)\\ &\leq \left(\frac{1}{4}\right)^3,\end{aligned}$$

car $t(1-t) \leq \frac{1}{4}$ pour tout réel t. Donc $\alpha \leq \frac{1}{4}$ pour tout triplet.
A n'est pas toujours vraie : pour $x = y = z = \frac{1}{2}$, $\alpha = \frac{1}{4} \neq 0$. B et C ne sont pas toujours vraies (pour $x = 0$, $\alpha = 0$).

Remarque : Le corrigé de la bibliothèque (« Concours ENSA 2016 (corrigé) ») retient A (α = 0) en prenant x = 0, ce qui n'est qu'un cas particulier. La seule affirmation vraie pour tout triplet est D ($\alpha \leq 1/4$). À trancher par le professeur.

Q11 ✔ Réponse A

Formule du binôme : $\sum_{k=0}^{2016} C_{2016}^{k}(-1)^k\,1^{2016-k} = (1-1)^{2016} = 0$.

Q12 ✔ Réponse D

$(i+j)^2 = i^2 + 2ij + j^2$, avec $\sum_{i=1}^{10} i = 55$ et $\sum_{i=1}^{10} i^2 = 385$:

$$\begin{aligned}\sum_{i,j}(i+j)^2 &= 10 \times 385 + 2 \times 55^2 + 10 \times 385\\ &= 3850 + 6050 + 3850 = 13750.\end{aligned}$$

Q13 ✔ Réponse B

Une fonction dérivable en un point y est continue. Par contraposée, une fonction discontinue en un point n'y est pas dérivable : elle n'est pas dérivable (sur tout son domaine).

Q14 ✔ Réponse A

$f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$, et pour $x \neq 0$: $f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$.
$2x\sin\frac{1}{x} \to 0$ mais $\cos\frac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0 : f' n'a pas de limite en 0, elle n'est pas continue en 0.

Q15 ✔ Réponse B

$\left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)^{x+2} = e^{(x+2)\ln\left(1-\frac{4}{x+3}\right)}$ et $\ln\left(1-\frac{4}{x+3}\right) \sim -\frac{4}{x+3}$, donc l'exposant tend vers -4. La limite vaut e^{-4}.

Q16 ✔ Réponse A

Le numérateur est toujours $\geq 0 - 1 + 3 = 2$, et le dénominateur tend vers 0^+. Donc le quotient est $\geq \dfrac{2}{x+\sqrt{x}} \to +\infty$.

Q17 ✔ Réponse C

L'équation s'écrit $P(x) = (x-7)(x-5)(x+4)(x+6) - 608 = 0$, avec P unitaire de degré 4 : le produit des racines est $P(0) = 7 \times 5 \times 4 \times 6 - 608 = 840 - 608 = 232$.
(Les quatre racines sont bien réelles : avec $y = x^2 - x$, l'équation devient $(y-42)(y-20) = 608$, soit $y = 58$ ou $y = 4$.)

Q18 ✔ Réponse B

$\dfrac{1+\ln x}{x\ln x} = \dfrac{1/x}{\ln x} + \dfrac{1}{x}$, d'où l'intégrale $\Big[\ln(\ln x) + \ln x\Big]_e^{e^2} = (\ln 2 + 2) - (0 + 1) = 1 + \ln 2$.

Q19 ✔ Réponse A

Deux intégrations par parties donnent la primitive $-\dfrac{x^2\cos(\pi x)}{\pi} + \dfrac{2x\sin(\pi x)}{\pi^2} + \dfrac{2\cos(\pi x)}{\pi^3}$.
Entre 0 et 1 : $\left(\dfrac{1}{\pi} - \dfrac{2}{\pi^3}\right) - \dfrac{2}{\pi^3} = \dfrac{\pi^2 - 4}{\pi^3}$.

Q20 ✔ Réponse C

Le changement de variable $x \mapsto \frac{\pi}{2} - x$ échange sin et cos : $I = J$. Et $I + J = \displaystyle\int_0^{\pi/2} 1\,dx = \frac{\pi}{2}$.
Donc $I = J = \dfrac{\pi}{4}$.