ÉCOLES NATIONALES DES SCIENCES APPLIQUÉES · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année des ENSA · Maroc

Session de juillet 2017

2017 — Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14
B	B	C	B	C	C	A	C	C	A	D	A	C	B

Q15	Q16	Q17	Q18	Q19	Q20
A	C	A	D	A	A

Q1 ✔ Réponse B

$-\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}$, donc l'expression vaut $\sqrt{9{,}8} \times \sqrt{\frac{375}{147}} = \sqrt{\frac{9{,}8 \times 375}{147}} = \sqrt{\frac{3675}{147}} = \sqrt{25} = 5$.

Q2 ✔ Réponse B

Avec $a = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2}$ et $b = \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$: $a^3 - b^3 = 4$ et $ab = \sqrt[3]{5-4} = 1$. $X^3 = (a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b) = 4 - 3X$, donc $X^3 + 3X - 4 = (X-1)(X^2+X+4) = 0$. Comme $X^2 + X + 4 > 0$, $X = 1$.

Q3 ✔ Réponse C

Avec $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$: $\tan\left(2 \operatorname{Arctan} \frac{1}{3}\right) = \dfrac{2/3}{1 - 1/9} = \dfrac{3}{4}$, puis

$$\tan\left(2 \operatorname{Arctan} \tfrac{1}{3} + \operatorname{Arctan} \tfrac{1}{7}\right) = \frac{\frac{3}{4} + \frac{1}{7}}{1 - \frac{3}{28}} = \frac{25/28}{25/28} = 1.$$

La somme est dans $]0, \frac{\pi}{2}[$ (chaque angle est petit), donc elle vaut $\dfrac{\pi}{4}$.

Q4 ✔ Réponse B

En divisant par n : $\dfrac{1 - \frac{(-1)^n}{n}}{1 + \frac{(-1)^n}{n}} \to \dfrac{1}{1} = 1$, car $\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n} \to 0$.

Q5 ✔ Réponse C

$$\frac{xe^{-x} + x^2}{x - \ln x} = x \times \frac{e^{-x} + x}{x - \ln x} = x \times \frac{1 + \frac{e^{-x}}{x}}{1 - \frac{\ln x}{x}}.$$

La fraction tend vers 1 et $x \to +\infty$: la limite est $+\infty$.

Q6 ✔ Réponse C

$x^3 + x^2 - x - 1 = (x+1)^2(x-1)$ et $x^3 - 3x - 2 = (x+1)^2(x-2)$. Pour $x \neq -1$, la fraction vaut $\dfrac{x-1}{x-2} \to \dfrac{-2}{-3} = \dfrac{2}{3}$.

Q7 ✔ Réponse A

$\dfrac{|x| - 0}{x - 0}$ vaut 1 pour $x > 0$ et -1 pour $x < 0$: les limites à droite et à gauche diffèrent. f n'est pas dérivable en 0.

Q8 ✔ Réponse C

$(\cos x)^7 = (1 - \sin^2 x)^3 \cos x$. Avec $u = \sin x$:

$$\int_0^1 (1-u^2)^3\,du = \int_0^1 (1 - 3u^2 + 3u^4 - u^6)\,du = 1 - 1 + \frac{3}{5} - \frac{1}{7} = \frac{16}{35}.$$

Q9 ✔ Réponse C

Pour $x > 0$: $\left(x - x^3\right)^{\frac{1}{3}} = x\left(\frac{1}{x^2} - 1\right)^{\frac{1}{3}}$, donc l'intégrande vaut $\dfrac{1}{x^3}\left(\dfrac{1}{x^2} - 1\right)^{\frac{1}{3}}$.

Avec $u = \dfrac{1}{x^2} - 1$, $du = -\dfrac{2}{x^3}dx$; u va de 8 (pour $x = \frac{1}{3}$) à 0 :

$$\int_{1/3}^1 \ldots = \frac{1}{2}\int_0^8 u^{\frac{1}{3}}\,du = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4}\left[u^{\frac{4}{3}}\right]_0^8 = \frac{3}{8} \times 16 = 6.$$

Q10 ✔ Réponse A

$$\left(\frac{e^x}{x+1}\right)' = \frac{e^x(x+1) - e^x}{(x+1)^2} = \frac{xe^x}{(x+1)^2}.$$

L'intégrale vaut $\left[\dfrac{e^x}{x+1}\right]_0^1 = \dfrac{e}{2} - 1$.

Q11 ✔ Réponse D

Une droite orthogonale au plan est dirigée par son vecteur normal $\vec{n}(2,-3,4)$. Passant par $A(-1,2,-3)$: $x = -1 + 2t$, $y = 2 - 3t$, $z = -3 + 4t$.

Q12 ✔ Réponse A

Le point $M(t) = (-1+2t, 2-2t, 3+3t)$ de (D) est le projeté de A quand $\overrightarrow{AM}$ est orthogonal à $\vec{u}(2,-2,3)$:

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 2(2t) - 2(-1-2t) + 3(2+3t) = 17t + 8 = 0 \iff t = -\frac{8}{17}.$$

$M\left(-1 - \frac{16}{17},\ 2 + \frac{16}{17},\ 3 - \frac{24}{17}\right) = \left(-\frac{33}{17}, \frac{50}{17}, \frac{27}{17}\right)$.

Q13 ✔ Réponse C

La droite : $(1+3t, 2+2t, 3+t)$. Le plan (Oxy) a pour équation $z = 0$, donc $t = -3$ et $B(1-9, 2-6, 0) = (-8, -4, 0)$.

Q14 ✔ Réponse B

Premier tirage : Taha est désigné avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et tire 100 DH avec la probabilité $\frac{1}{4}$ ($\frac{3}{4}$ pour 50 DH) ; Jawad tire 100 DH avec la probabilité $\frac{1}{2}$. Le billet tiré ne revient pas dans la poche.
Le repas coûte 150 DH si le premier billet est de 50 DH et le second de 100 DH.

- Taha tire 50 DH ($\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$). Il lui reste deux billets de 50 et un de 100. Second tirage de 100 DH : $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{12}$. Contribution : $\frac{3}{8} \times \frac{5}{12} = \frac{5}{32}$.
- Jawad tire 50 DH ($\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$). Il ne lui reste que le billet de 100. Second tirage de 100 DH : $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times 1 = \frac{5}{8}$. Contribution : $\frac{1}{4} \times \frac{5}{8} = \frac{5}{32}$.

Total : $\dfrac{10}{32}$.

Q15 ✔ Réponse A

Premier tirage : Taha est désigné avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et tire 100 DH avec la probabilité $\frac{1}{4}$ ($\frac{3}{4}$ pour 50 DH) ; Jawad tire 100 DH avec la probabilité $\frac{1}{2}$. Le billet tiré ne revient pas dans la poche.
Ils paient la même somme seulement si chacun donne un billet de 50 DH : un premier tirage de 50 DH par l'un, puis un second de 50 DH par l'autre.

- Taha 50 puis Jawad 50 : $\frac{3}{8} \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{32}$.
- Jawad 50 puis Taha 50 : $\frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{4}\right) = \frac{3}{32}$.

Total : $\dfrac{6}{32}$.

Q16 ✔ Réponse C

Premier tirage : Taha est désigné avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et tire 100 DH avec la probabilité $\frac{1}{4}$ ($\frac{3}{4}$ pour 50 DH) ; Jawad tire 100 DH avec la probabilité $\frac{1}{2}$. Le billet tiré ne revient pas dans la poche.
L'un mange gratuitement si tous les billets viennent de la poche de l'autre :

- un seul tirage, de 100 DH : $\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{8}=\frac{12}{32}$;
- deux tirages par Taha (le premier de 50 DH) : $\frac{3}{8}\times\frac{1}{2}=\frac{6}{32}$;
- deux tirages par Jawad (le premier de 50 DH) : $\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{4}{32}$.

Total : $\dfrac{22}{32}$.

Q17 ✔ Réponse A

$$Z=\frac{(\sqrt{2}+i\sqrt{6})(2-2i)}{(2+2i)(2-2i)}=\frac{2\sqrt{2}+2\sqrt{6}+i(2\sqrt{6}-2\sqrt{2})}{8}=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(1+\sqrt{3}+i\sqrt{3}-i\right).$$

Q18 ✔ Réponse D

$|z_1|=\sqrt{2+6}=2\sqrt{2}$ et
$|z_2|=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$, donc $|Z|=1$.

Q19 ✔ Réponse A

$z_1=2\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\sqrt{2}\,e^{i\pi/3}$ et
$z_2=2\sqrt{2}\,e^{i\pi/4}$.
$\arg Z=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{12}\ [2\pi]$.

Q20 ✔ Réponse A

$Z=e^{i\pi/12}$, donc $Z^{24}=e^{2i\pi}=1$.
Comme $2017=24\times84+1$: $Z^{2017}=Z$, dont la forme algébrique est celle de Q17.