ÉCOLES NATIONALES DES SCIENCES APPLIQUÉES · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année des ENSA · Maroc

Session de juillet 2018

2018

Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14
D	A	B	A	A	B	A	D	C	C	C	C	A	B

Q15	Q16	Q17	Q18	Q19	Q20
A	D	D	A	B	A

Q1 ✔ Réponse D

$\frac{u_n-u_0}{n}=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1}-u_k)$ est la moyenne des n premiers écarts. Comme ces écarts tendent vers 2, leur moyenne tend aussi vers 2 (théorème de Cesàro). Et $\frac{u_0}{n}\to 0$, donc $\frac{u_n}{n}\to 2$. (Exemple : $u_n=2n$.)

Q2 ✔ Réponse A

$|\sin^2 n-\cos^3 n|\le 2$, donc $\left|\frac{\sin^2 n-\cos^3 n}{n}\right|\le\frac{2}{n}\to 0$.

Q3 ✔ Réponse B

Avec $t=\ln x\to 0^+$ quand $x\to 1^+$: $\ln x\cdot\ln(\ln x)=t\ln t\to 0$ (croissances comparées).

Q4 ✔ Réponse A

$u_{2n}-u_n=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}$ compte n termes, chacun $\ge\frac{1}{2n}$: la somme est $\ge n\times\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}$.

Q5 ✔ Réponse A

D'après Q4, $u_{2j}-u_{2j-1}\ge\frac{1}{2}$ pour tout $j\ge 1$. En sommant de $j=1$ à 10 :

$$u_{2^{10}}\ge u_1+10\times\frac{1}{2}=1+5=6.$$

Q6 ✔ Réponse B

Avec $t=\operatorname{Arctan}x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$: $\cos t>0$ et $\cos^2 t=\frac{1}{1+\tan^2 t}=\frac{1}{1+x^2}$.
Donc $\cos(\operatorname{Arctan}x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Q7 ✔ Réponse A

Pour tout x et tout n : $f(x)=f\left(\frac{x}{2}\right)=\cdots=f\left(\frac{x}{2^n}\right)$. Quand $n\to+\infty$, $\frac{x}{2^n}\to 0$ et, par continuité en 0, $f\left(\frac{x}{2^n}\right)\to f(0)$.
Donc $f(x)=f(0)$: f est constante.

Q8 ✔ Réponse D

$xf(a)-af(x)=$
$(x-a)f(a)-a\big(f(x)-f(a)\big)$, donc

$$\frac{xf(a)-af(x)}{x-a}=f(a)-a\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\to f(a)-af'(a).$$

Q9 ✔ Réponse C

$\frac{x^4}{x^2+1}=x^2-1+\frac{1}{x^2+1}$, donc l'intégrale vaut $\left[\frac{x^3}{3}-x+\arctan x\right]_0^1=\frac{1}{3}-1+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}$.

Q10 ✔ Réponse C

Par parties ($u=\ln(x^2+1)$, $v'=x^2$) :

$$\int_0^{\sqrt3}x^2\ln(x^2+1)\,dx=\left[\frac{x^3}{3}\ln(x^2+1)\right]_0^{\sqrt3}-\frac{2}{3}\int_0^{\sqrt3}\frac{x^4}{x^2+1}\,dx$$
$$=\sqrt3\ln 4-\frac{2}{3}\left[\frac{x^3}{3}-x+\arctan x\right]_0^{\sqrt3}.$$

Le crochet vaut $\sqrt3-\sqrt3+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$.
L'intégrale vaut
$2\sqrt3\ln 2-\frac{2\pi}{9}=2\left(\sqrt3\ln 2-\frac{\pi}{9}\right)$.

Q11 ✔ Réponse C

Dans le repère $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$:
$A(0,0,0)$, $B(1,0,0)$, $D(0,1,0)$, $E(0,0,1)$, $C(1,1,0)$, $F(1,0,1)$, $G(1,1,1)$, $H(0,1,1)$.
$\overrightarrow{FD}=D-F=(0-1,\ 1-0,\ 0-1)=(-1,1,-1)$.

Q12 ✔ Réponse C

Dans le repère $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$:
$A(0,0,0)$, $B(1,0,0)$, $D(0,1,0)$, $E(0,0,1)$, $C(1,1,0)$, $F(1,0,1)$, $G(1,1,1)$, $H(0,1,1)$.
La droite (FD) passe par $D(0,1,0)$ et est dirigée par $\overrightarrow{FD}(-1,1,-1)$: $x=-t$, $y=1+t$, $z=-t$. Les autres systèmes passent bien par D (pour $t=0$) mais ont un mauvais vecteur directeur.

Q13 ✔ Réponse A

Dans le repère $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$:
$A(0,0,0)$, $B(1,0,0)$, $D(0,1,0)$, $E(0,0,1)$, $C(1,1,0)$, $F(1,0,1)$, $G(1,1,1)$, $H(0,1,1)$.
Milieux : $I\left(\frac12,0,0\right)$, $J\left(0,\frac12,1\right)$, $K\left(1,\frac12,0\right)$.
$\overrightarrow{IJ}\left(-\frac12,\frac12,1\right)$ et $\overrightarrow{IK}\left(\frac12,\frac12,0\right)$. Avec $\overrightarrow{FD}(-1,1,-1)$:

$$\overrightarrow{FD}\cdot\overrightarrow{IJ}=\tfrac12+\tfrac12-1=0,$$
$$\overrightarrow{FD}\cdot\overrightarrow{IK}=-\tfrac12+\tfrac12+0=0.$$

$\overrightarrow{FD}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan : (FD) est orthogonale au plan (IJK).

Q14 ✔ Réponse B

Dans le repère $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$:
$A(0,0,0)$, $B(1,0,0)$, $D(0,1,0)$, $E(0,0,1)$, $C(1,1,0)$, $F(1,0,1)$, $G(1,1,1)$, $H(0,1,1)$.
Milieux : $I\left(\frac12,0,0\right)$, $J\left(0,\frac12,1\right)$, $K\left(1,\frac12,0\right)$.
D'après Q13, $\overrightarrow{FD}(-1,1,-1)$, ou $(1,-1,1)$, est normal au plan : $x-y+z+d=0$. Avec I : $\frac12+d=0$, donc $d=-\frac12$.
Vérification : J : $0-\frac12+1-\frac12=0$; K : $1-\frac12+0-\frac12=0$.

Q15 ✔ Réponse A

Avec la représentation de (FD) ($x=-t$, $y=1+t$, $z=-t$) et l'équation $x-y+z-\frac12=0$ du plan :

$$-t-(1+t)-t-\tfrac12=0\iff t=-\tfrac12.$$

$M\left(\frac12,\frac12,\frac12\right)$: c'est le centre du cube.

Q16 ✔ Réponse D

Dans le repère $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$:
$A(0,0,0)$, $B(1,0,0)$, $D(0,1,0)$, $E(0,0,1)$, $C(1,1,0)$, $F(1,0,1)$, $G(1,1,1)$, $H(0,1,1)$.
Milieux : $I\left(\frac12,0,0\right)$, $J\left(0,\frac12,1\right)$, $K\left(1,\frac12,0\right)$.
$IJ^2=\frac14+\frac14+1=\frac32$, $IK^2=\frac14+\frac14=\frac12$, $JK^2=1+0+1=2$.
$IJ^2+IK^2=2=JK^2$: d'après la réciproque de Pythagore, le triangle est rectangle en I (on a aussi $\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{IK}=-\frac14+\frac14+0=0$).

Q17 ✔ Réponse **D**

Chacune des 20 questions offre 4 choix indépendants : $4 \times 4 \times \cdots \times 4 = 4^{20}$ grilles.

Q18 ✔ Réponse **A**

Pour chaque question, il y a 3 réponses fausses sur 4 : 3^{20} grilles sans aucune bonne réponse sur 4^{20} grilles équiprobables.

$$P(A_0) = \frac{3^{20}}{4^{20}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{20}.$$

Q19 ✔ Réponse **B**

On choisit les n questions réussies : $\binom{20}{n}$ façons ; chacune a une seule bonne réponse, et chacune des $20-n$ autres a 3 réponses fausses possibles.

$P(A_n) = \dfrac{\binom{20}{n}\, 3^{20-n}}{4^{20}}$ (loi binomiale de paramètres 20 et $\frac{1}{4}$).

Q20 ✔ Réponse **A**

« Au moins 6 » est la réunion disjointe des A_n pour $n = 6, \ldots, 20$: on additionne les probabilités de Q19 pour n allant de 6 à 20.