ÉCOLES NATIONALES DES SCIENCES APPLIQUÉES · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année des ENSA · Maroc

Session de juillet 2019

2019

Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14
A	B	C	D	D	B	D	C	–	–	A	B	C	B

Q15	Q16	Q17	Q18	Q19	Q20
B	D	D	A	B	B

Q1 ✔ Réponse A

Notons $D = b^2u_n + b^2 - ab - a^2 = b(bu_n - a) + (b^2 - a^2)$. Un calcul direct donne

$$bu_{n+1} - a = \frac{(b^2-a^2)(bu_n - a)}{D},$$

donc

$$v_{n+1} = \frac{bD}{(b^2-a^2)(bu_n-a)} = v_n + \frac{b^2}{b^2-a^2}.$$

(v_n) est arithmétique de raison $\frac{b^2}{b^2-a^2}$, avec $v_0 = \frac{ab}{b^2-a^2}$: $v_n = \frac{b(a+nb)}{b^2-a^2}$.

Alors $bu_n - a = \frac{b}{v_n} = \frac{b^2-a^2}{a+nb}$, d'où $u_n = \frac{an+b}{bn+a}$. (Vérification : $u_0 = \frac{b}{a}$.)

Q2 ✔ Réponse B

Pour $1 \le k \le n$: $n+2 \le 2k+n \le 3n$, donc $\frac{1}{3n} \le \frac{1}{2k+n} \le \frac{1}{n+2}$.

En sommant les n termes : $\frac{1}{3} \le u_n \le \frac{n}{n+2} < 1$.

Q3 ✔ Réponse C

$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+2\frac{k}{n}}$ est une somme de Riemann de $x \mapsto \frac{1}{1+2x}$ sur $[0,1]$:

$$\lim u_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+2x} = \left[\frac{1}{2}\ln(1+2x)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln 3 = \ln\sqrt{3}.$$

Q4 ✔ Réponse D

Notons I l'intégrale. Par parties :

$I = \left[x\sqrt{4+x^2}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{4+x^2}}dx =$

$\sqrt{5} - \int_0^1 \frac{(4+x^2)-4}{\sqrt{4+x^2}}dx =$

$\sqrt{5} - I + 4\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$.

Avec l'indication : $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}} = \ln(1+\sqrt{5}) - \ln 2 = \ln\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Donc $2I = \sqrt{5} + 4\ln\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, soit $I = \frac{\sqrt{5}}{2} + 2\ln\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} + \ln\frac{3+\sqrt{5}}{2}$, car $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Q5 ✔ Réponse D

$\cos^4 t + \sin^4 t = (\cos^2 t + \sin^2 t)^2 - 2\sin^2 t\cos^2 t = 1 - \frac{1}{2}\sin^2(2t)$.

Avec $t = 3x$: $(E) \iff \sin^2(6x) = 0 \iff 6x = k\pi \iff x = \frac{k\pi}{6}$.

Q6 ✔ Réponse B

Avec $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$: $\varphi^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ et $\varphi^4 = \frac{14+6\sqrt{5}}{4} = \frac{7+3\sqrt{5}}{2}$. De même $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^4 = \frac{7-3\sqrt{5}}{2}$.

Donc $\lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 1$ (et l'on vérifie $\lambda^4 = 1$).

Q7 ✔ Réponse D

La courbe $y = \sqrt{a^2-x^2}$ est le demi-cercle supérieur de centre O et de rayon a. Entre $x = 0$ et $x = a$, l'intégrale est l'aire d'un quart de disque : $\frac{\pi a^2}{4}$.

Q8 ✔ Réponse C

Racine double $\iff b^2 = 4ac$, donc b est pair :

- $b = 2$: $ac = 1$, soit $(1,1)$;
- $b = 4$: $ac = 4$, soit $(1,4), (2,2), (4,1)$;
- $b = 6$: $ac = 9$, soit $(3,3)$.

5 cas favorables sur $6^3 = 216$: $P = \frac{5}{216}$.

Q9 ✔ Réponse –

Par symétrie des tirages (ou probabilités totales) :

$$P(R_2) = \frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9} + \frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9} + \frac{3}{10}\cdot\frac{3}{9} = \frac{27}{90} = \frac{3}{10}.$$

Aucune proposition n'est juste (erreur du sujet).

Q10 ✔ Réponse –

Après une boule jaune, il reste 9 boules dont 3 rouges : $P_{J_1}(R_2) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

Aucune proposition n'est juste (erreur du sujet).

Q11 ✔ Réponse A

$\mathrm{Re}(z) = \sqrt{2} - 1 > 0$ et $\mathrm{Im}(z) = 1 > 0$: $\arg z \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, avec

$\tan(\arg z) = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$.

Or $\tan\frac{3\pi}{8} = \frac{1}{\tan\frac{\pi}{8}} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$.

Donc $\arg z = \frac{3\pi}{8}$.

Q12 ✔ Réponse B

$\cos\frac{5\pi}{8} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = -\sin\frac{\pi}{8} < 0$, et

$\sin^2\frac{\pi}{8} = \frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$.

Donc $\cos\frac{5\pi}{8} = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

Q13 ✔ Réponse C

$a\sin\frac{\pi}{5} = \sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4}\sin\frac{4\pi}{5} = \frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{5}$.

Comme $\sin\frac{\pi}{5} \neq 0$: $a = \frac{1}{4}$.

Q14 ✔ Réponse B

$b - a = -\cos\left(\frac{\pi}{5} + \frac{2\pi}{5}\right) = -\cos\frac{3\pi}{5} = \cos\frac{2\pi}{5}$ et $b + a = \cos\left(\frac{2\pi}{5} - \frac{\pi}{5}\right) = \cos\frac{\pi}{5}$.

Donc $b^2 - a^2 = \cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5} = a = \frac{1}{4}$, soit $b^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$ et, comme $b > 0$, $b = \frac{\sqrt{5}}{4}$.

Q15 ✔ Réponse **B**

$\overrightarrow{AM}\cdot\left(\overrightarrow{AM}-4\overrightarrow{BM}\right)=0$. Soit G le point tel que $\overrightarrow{AG}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$; on vérifie que $\overrightarrow{AM}-4\overrightarrow{BM}=-3\overrightarrow{GM}$.
La condition devient $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{GM}=0$: c'est le cercle de diamètre $[AG]$.

Q16 ✔ Réponse **D**

$\frac{k^2+5k+6}{k^2+5k+4}=\frac{(k+2)(k+3)}{(k+1)(k+4)}$. Les deux produits télescopent :

$$\prod_{k=0}^{n}\frac{k+2}{k+1}=n+2,$$

$$\prod_{k=0}^{n}\frac{k+3}{k+4}=\frac{3}{n+4}.$$

Donc $u_n=\frac{3(n+2)}{n+4}=\frac{3n+6}{n+4}$.

Q17 ✔ Réponse **D**

Le chiffre des unités de 23^n est celui de 3^n, qui suit le cycle $3,9,7,1$ de période 4. $2019=4\times504+3$: c'est le troisième du cycle, 7.

Q18 ✔ Réponse **A**

Pour tout k : $\left(e^{2^k}-e^{-2^k}\right)\left(e^{2^k}+e^{-2^k}\right)=e^{2^{k+1}}-e^{-2^{k+1}}$. Le produit télescope :

$$(e-e^{-1})\prod_{k=0}^{n}\left(e^{2^k}+e^{-2^k}\right)=e^{2^{n+1}}-e^{-2^{n+1}}.$$

La proposition A est donc le produit **pour k allant de 0 à n**. Avec k partant de 1 comme sur le sujet, il faut encore diviser par $e+e^{-1}$: $u_n=\frac{e^{2^{n+1}}-e^{-2^{n+1}}}{e^2-e^{-2}}$, qui n'est pas proposé.

Remarque : Tel qu'imprimé (produit à partir de k = 1), aucune proposition n'est juste : A correspond au produit à partir de k = 0 (pour n = 1 : $e^2+e^{-2}\approx7{,}52$ alors que A $\approx 23{,}2$). À trancher par le professeur (corriger l'énoncé en k = 0 ou retirer la question).

Q19 ✔ Réponse **B**

f_n est strictement croissante sur $[0,+\infty[$, avec $f_n(0)=-2<0$: u_n existe et est unique.
$f_{n+1}(u_n)=f_n(u_n)+u_n^2=u_n^2>0=f_{n+1}(u_{n+1})$, donc $u_n>u_{n+1}$: la suite est décroissante.

Q20 ✔ Réponse **B**

$nu_n^2=3-e^{u_n}\le2$ (car $e^{u_n}\ge1$), donc $0\le u_n\le\sqrt{\frac{2}{n}}\to0$.