ÉCOLES NATIONALES DES SCIENCES APPLIQUÉES · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année des ENSA · Maroc

Session de juillet 2021

2021

Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14
D	B	D	A	C	B	C	C	A	D	B	D	A	A

Q15	Q16	Q17	Q18	Q19	Q20
B	B	A	D	C	D

Q1 ✔ Réponse D

Une condition nécessaire est vérifiée par **tous** ceux qui réussissent. Personne ne réussit sans avoir passé le concours : D est nécessaire.
Les autres propositions ne sont pas imposées par l'énoncé : on peut réussir sans tout répondre correctement, et le texte ne fixe aucun seuil de réponses justes ou fausses.

Q2 ✔ Réponse B

Du 17 juillet 2021 au 17 juillet 2023 : $365 + 365 = 730$ jours (pas de 29 février entre les deux).
Du 17 juillet 2023 au 29 février 2024 : 14 (fin juillet)
$+31 + 30 + 31 + 30 + 31 + 31 + 29 = 227$ jours.
Total : 957 jours, et $957 = 7 \times 136 + 5$. Le 29 février 2024 tombe 5 jours de la semaine après un samedi : un **jeudi**.

Q3 ✔ Réponse D

$72 = 2^3 \times 3^2$ et $162 = 2 \times 3^4$, donc $N = 2^{30}3^{20} \times 2^{50}3^{200} = 2^{80} \times 3^{220}$.
Nombre de diviseurs : $81 \times 221 = 17901$.

Q4 ✔ Réponse A

$xy = 1$ et
$(x+y)^2 + x^2 + y^2 = 2(x^2+y^2) + 2 = 10$,
donc $x^2 + y^2 = 4$, soit $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = 4$.
Avec $X = x^2$: $X^2 - 4X + 1 = 0$, donc $X = 2 \pm \sqrt{3}$ (les deux sont positifs).

Q5 ✔ Réponse C

$\displaystyle\prod_{k=0}^{9} 5^{\frac{1}{3\cdot 2^k}} = 5^{\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{9}\frac{1}{2^k}}$ et
$\displaystyle\sum_{k=0}^{9} \frac{1}{2^k} = 2 - \frac{1}{2^9} = \frac{1023}{512}$.
Donc le produit vaut $5^{\frac{1}{3}\cdot\frac{1023}{512}} = \sqrt[3]{5^{\frac{1023}{512}}}$.

Q6 ✔ Réponse B

$3^n e^{-3n} = \left(\dfrac{3}{e^3}\right)^n$ et $0 < \dfrac{3}{e^3} < 1$ (car $e^3 \approx 20{,}1$) : la suite géométrique tend vers 0.

Q7 ✔ Réponse C

Notons $(3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n = 2k_n$ avec k_n entier. Alors $(3+\sqrt{5})^n\pi = 2k_n\pi - (3-\sqrt{5})^n\pi$ et, par 2π-périodicité :

$$\sin\left((3+\sqrt{5})^n\pi\right) = -\sin\left((3-\sqrt{5})^n\pi\right) \to 0,$$

car $0 < 3-\sqrt{5} < 1$, donc $(3-\sqrt{5})^n \to 0$.

Q8 ✔ Réponse C

$\sqrt{3}\sin x - \cos x =$
$2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x\right) = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.
Avec $h = x - \frac{\pi}{6} \to 0$: $\dfrac{2\sin h}{h} \to 2$.

Q9 ✔ Réponse A

$x^{\frac{1}{\ln 3x}} = e^{\frac{\ln x}{\ln 3 + \ln x}}$ et
$\dfrac{\ln x}{\ln 3 + \ln x} = \dfrac{1}{\frac{\ln 3}{\ln x} + 1} \to 1$ quand $x \to 0^+$ (car $\ln x \to -\infty$).
La limite vaut $e^1 = e$.

Q10 ✔ Réponse D

Notons $L \neq 0$ la limite. Pour tout x, la suite $f(x+nT) = f(x)$ est constante et tend vers L quand $n \to +\infty$, donc $f(x) = L$.
f est la constante L, non nulle.

Q11 ✔ Réponse B

$\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = x + x^2\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ et
$\left|x^2\cos\frac{1}{x}\right| \le x^2$: ce taux tend vers 0.
Donc $f'(0) = 0$.

Q12 ✔ Réponse D

Pour $x \neq 0$:
$f'(x) = 2x + 3x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) + x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$, et $f'(0) = 0$.
$\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x} = 2 + 3x\cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right)$: les deux premiers termes tendent vers 2, mais $\sin\frac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0. f' n'est pas dérivable en 0.

Q13 ✔ Réponse A

La région est limitée aussi par l'axe des abscisses. Pour $x \in \left[e^{\pi/2}, e^{\pi}\right]$, $\ln x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ donc $\cos(\ln x) \le 0$.
Une primitive de $\cos(\ln x)$ est $\dfrac{x}{2}\left(\cos(\ln x) + \sin(\ln x)\right)$ (à vérifier en dérivant). Ainsi

$$\int_{e^{\pi/2}}^{e^{\pi}} \cos(\ln x)\,dx = \frac{e^{\pi}}{2}(-1+0) - \frac{e^{\pi/2}}{2}(0+1) = -\frac{1}{2}\left(e^{\pi} + e^{\pi/2}\right),$$

et l'aire vaut $\dfrac{1}{2}\left(e^{\pi} + e^{\pi/2}\right)$.

Q14 ✔ Réponse A

Notons I l'intégrale. Le changement de variable $x \mapsto \alpha - x$ donne

$$I = \int_0^{\alpha} \frac{dx}{1+f(\alpha-x)} = \int_0^{\alpha} \frac{dx}{1+\frac{1}{f(x)}} = \int_0^{\alpha} \frac{f(x)}{1+f(x)}\,dx.$$

En additionnant : $2I = \displaystyle\int_0^{\alpha} 1\,dx = \alpha$,
donc $I = \dfrac{\alpha}{2}$.

Q15 ✔ Réponse B

$f(x) = \mathrm{Im}\left(e^{(-1+i)x}\right)$, donc
$f^{(4)}(x) = \mathrm{Im}\left((-1+i)^4 e^{(-1+i)x}\right)$.
$(-1+i)^2 = -2i$, donc $(-1+i)^4 = -4$ et $f^{(4)} = -4f$.

Q16 ✔ Réponse B

Une primitive de $e^{-x}\sin x$ est $F(x) = -\dfrac{e^{-x}(\sin x + \cos x)}{2}$.
$\displaystyle\int_0^{\pi} f = F(\pi) - F(0) = \frac{e^{-\pi}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(1 + e^{-\pi}\right)$.

Q17 ✔ Réponse A

Avec $z = x + iy$:
$x^2 + y^2 - 4y + 4ix = -3 + 4i$.
Partie imaginaire : $x = 1$. Partie réelle : $1 + y^2 - 4y = -3$, soit $(y-2)^2 = 0$, $y = 2$.
$u = 1 + 2i$ et $\mathrm{Re}(u)\,\mathrm{Im}(u) = 2$.

Q18 ✔ Réponse **D**

Avec $z = x + iy$: $x^2 - y^2 - 2x + 3 = 0$ et $2xy + 2y = 2y(x+1) = 0$.

- $y = 0$: $x^2 - 2x + 3 = 0$ n'a pas de solution réelle.
- $x = -1$: $6 - y^2 = 0$, $y = \pm\sqrt{6}$.

$z_1 = -1 + i\sqrt{6}$, $z_2 = -1 - i\sqrt{6} = \overline{z_1}$ et $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1^2}{|z_1|^2} = \dfrac{-5 - 2i\sqrt{6}}{7}$, de partie réelle $-\dfrac{5}{7}$ (même résultat en échangeant z_1 et z_2).

Q19 ✔ Réponse **C**

$z = \cos\theta(\cos\theta + i\sin\theta) = \cos\theta\, e^{i\theta}$ (avec $\cos\theta \neq 0$ pour que z^{-3} existe).

$z^{-3} = \dfrac{e^{-3i\theta}}{\cos^3\theta}$, de partie réelle $\dfrac{\cos 3\theta}{\cos^3\theta}$.

Q20 ✔ Réponse **D**

Formule de Moivre et binôme : $\cos 5\theta = \mathrm{Re}\left((\cos\theta + i\sin\theta)^5\right)$. Les termes réels sont ceux d'indices pairs :

$$\cos^5\theta + \binom{5}{2}\cos^3\theta\,(i\sin\theta)^2 + \binom{5}{4}\cos\theta\,(i\sin\theta)^4 = \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta.$$