ÉCOLES NATIONALES DES SCIENCES APPLIQUÉES · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année des ENSA · Maroc

Session du 1er août 2022

2022 — Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14
C	A	D	B	D	A	B	D	D	A	B	D	D	A

Q15	Q16	Q17	Q18	Q19	Q20
C	C	D	A	C	B

Q1 — ✔ Réponse C

Le carré d'un nombre formé de n chiffres 1 (pour $n \le 9$) s'écrit en montant de 1 à n puis en redescendant : $11^2 = 121$, $111^2 = 12321$, $1111^2 = 1234321$, … Avec neuf chiffres 1 : $111111111^2 = 12345678987654321$. (Le résultat a 17 chiffres, ce qui élimine aussi les autres propositions.)

Q2 — ✔ Réponse A

$546 = 2 \times 3 \times 7 \times 13$ et $840 = 2^3 \times 3 \times 5 \times 7$, donc $546 \times 840 = 2^4 \times 3^2 \times 5 \times 7^2 \times 13$. Nombre de diviseurs : $(4+1)(2+1)(1+1)(2+1)(1+1) = 5 \times 3 \times 2 \times 3 \times 2 = 180$.

Q3 — ✔ Réponse D

« f est la fonction nulle » s'écrit $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$. Sa négation est $\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0$: il suffit d'un seul x où f ne s'annule pas.

Q4 — ✔ Réponse B

Domaine : $x^2 > 1$ et $x > \frac{1}{2}$, soit $x > 1$. L'équation équivaut à $\ln\big(2(x^2-1)\big) = \ln(2x-1)$, c'est-à-dire $2x^2 - 2x - 1 = 0$. Racines : $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$. Seule $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \approx 1{,}37$ est dans le domaine.

Q5 — ✔ Réponse D

$\dfrac{u_{k+1}}{u_k} = \dfrac{22-k}{k+1} \times \dfrac{21}{20}$, et ce rapport est > 1 si et seulement si $21(22-k) > 20(k+1)$, soit $41k < 442$, c'est-à-dire $k \le 10$. Les termes croissent donc jusqu'à u_{11}, puis décroissent : le maximum est atteint pour $k = 11$.

Q6 — ✔ Réponse A

$\sqrt[n]{n^2} = e^{\frac{2\ln n}{n}}$ et $\dfrac{\ln n}{n} \to 0$, donc la limite vaut $e^0 = 1$.

Q7 — ✔ Réponse B

Avec la quantité conjuguée :

$$n - \sqrt{n^2+12n+35} = \frac{n^2 - (n^2+12n+35)}{n + \sqrt{n^2+12n+35}} = \frac{-12 - \frac{35}{n}}{1 + \sqrt{1 + \frac{12}{n} + \frac{35}{n^2}}} \to \frac{-12}{2} = -6.$$

Q8 — ✔ Réponse D

Au voisinage de 0 : $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$, donc $\dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2} \to -\dfrac{1}{2}$ quand $x \to 0^+$. À gauche, $f(0) = b$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = b$. La continuité en 0 équivaut à $b = -\dfrac{1}{2}$, quel que soit a.

Q9 — ✔ Réponse D

On écrit $f(x) = (x-1)^{\frac{1}{2}}(x+2)^{-\frac{2}{3}}(x+3)^{-\frac{3}{2}}$ et on utilise la dérivée logarithmique :

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{2(x-1)} - \frac{2}{3(x+2)} - \frac{3}{2(x+3)} = \frac{-10x^2 - 2x + 48}{6(x-1)(x+2)(x+3)} = -\frac{5x^2 + x - 24}{3(x-1)(x+2)(x+3)}.$$

D'où

$$f'(x) = -\frac{5x^2 + x - 24}{3\sqrt{x-1}\ \sqrt[3]{(x+2)^5}\ \sqrt{(x+3)^5}}.$$

C'est l'expression D **au signe près** : la fonction est décroissante pour x grand ($f(x)$ se comporte comme $x^{-5/3}$), donc sa dérivée y est négative. La proposition D est la seule qui ait la bonne forme.

Remarque : Aucune proposition n'est exactement juste : le calcul donne l'opposé de D (signe « − » absent sur le sujet). La correction suggérée (Prof. Barkouz) retient D. À trancher par le professeur.

Q10 — ✔ Réponse A

$f(1) = e$, donc $f^{-1}(e) = 1$. Et $f'(x) = (x+1)e^x$, donc $f'(1) = 2e$ et $(f^{-1})'(e) = \dfrac{1}{f'(1)} = \dfrac{1}{2e}$. Tangente : $y = \dfrac{1}{2e}(x-e) + 1 = \dfrac{1}{2e}x + \dfrac{1}{2}$. C'est la proposition A, dans laquelle le « x » manque sur le sujet.

Remarque : La bonne tangente est y = x/(2e) + 1/2 ; la proposition A est imprimée sans le « x ». La correction suggérée retient A. À trancher par le professeur.

Q11 — ✔ Réponse B

$\dfrac{1-x^2}{1+x^2} = \dfrac{2}{1+x^2} - 1$, donc l'intégrale vaut $\Big[2\arctan x - x\Big]_0^1 = 2 \times \dfrac{\pi}{4} - 1 = \dfrac{\pi}{2} - 1$.

Q12 — ✔ Réponse D

$(x^2-1)^4 = x^8 - 4x^6 + 6x^4 - 4x^2 + 1$ est paire, donc

$$I_4 = 2\left(\frac{1}{9} - \frac{4}{7} + \frac{6}{5} - \frac{4}{3} + 1\right) = 2 \times \frac{35 - 180 + 378 - 420 + 315}{315} = 2 \times \frac{128}{315} = \frac{256}{315}.$$

Q13 — ✔ Réponse D

Pour $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$: $2\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{2 + 2\cos\theta}$. En partant de $2\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$:

$$2\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{2+\sqrt{2}},$$

$$2\cos\frac{\pi}{16} = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}.$$

Donc $\cos\dfrac{\pi}{16} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$.

Q14 — ✔ Réponse A

$\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\pi/3}$, et $e^{i\pi/3}$ a pour puissance sixième 1. Comme $2023 = 6 \times 337 + 1$:

$$\left(e^{i\pi/3}\right)^{2023} = e^{i\pi/3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Q15 ✔ Réponse C

$z = 2e^{i\pi/6}$, donc $z^5 = 32e^{5i\pi/6}$ et $\overline{z} = 2e^{-i\pi/6}$.

$$\frac{z^5}{\overline{z}} = 16\,e^{i\pi} = -16, \quad \text{donc } z^5 = -16\,\overline{z}.$$

Q16 ✔ Réponse C

Discriminant réduit :
$\Delta' = (m+1+i)^2 - 2\big(m^2+(1+i)m+i\big) = -m^2 = (im)^2$ (car $(1+i)^2 = 2i$).
Solutions : $z_1 = \dfrac{(m+1+i)+im}{2} = \dfrac{(1+i)(m+1)}{2}$ et $z_2 = \dfrac{(m+1+i)-im}{2}$.
Si m est **réel** : $\mathrm{Im}(z_1) = \dfrac{m+1}{2}$ et $\mathrm{Im}(z_2) = \dfrac{1-m}{2}$, d'où $\mathrm{Im}(z_1)\,\mathrm{Im}(z_2) = \dfrac{1-m^2}{4}$.

Remarque : Le résultat $(1 - m^2)/4$ n'est valable que si m est réel ; or l'énoncé dit $m \in \mathbb{C}^*$. Pour m complexe non réel, le produit des parties imaginaires ne s'exprime pas ainsi. La correction suggérée retient C. À trancher par le professeur.

Q17 ✔ Réponse D

Équation caractéristique : $r^2 + r + \frac{5}{2} = 0$, de discriminant $1 - 10 = -9$:
$r = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}i$. Donc
$y = e^{-x/2}\left(A\cos\frac{3x}{2} + B\sin\frac{3x}{2}\right)$.
$y(0) = A = -4$ et
$y'(0) = -\frac{A}{2} + \frac{3}{2}B = 2 + \frac{3}{2}B = 6$, donc $B = \frac{8}{3}$.

Q18 ✔ Réponse A

(« perpendiculaire au point P » se lit « perpendiculaire au plan P ».)
$(x-3)^2 + y^2 + (z+5)^2 = 36$: le centre est $\Omega(3, 0, -5)$. La droite perpendiculaire au plan P est dirigée par son vecteur normal $\vec{n}(2, -1, -2)$:

$$\begin{aligned} x &= 3 + 2t, \\ y &= -t, \\ z &= -5 - 2t, \\ t &\in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Q19 ✔ Réponse C

Nombre de filles :
$0{,}3 \times 60 + 0{,}6 \times 90 + 0{,}72 \times 150 = 18 + 54 + 108 = 180$.
$P(F) = \dfrac{180}{300} = 0{,}6$.

Q20 ✔ Réponse B

Garçons : 42 en Cyber Sécurité, 36 en Sport et $150 - 108 = 42$ en Environnement, soit 120 garçons.
$P_G(\text{Environnement}) = \dfrac{42}{120} = 0{,}35$.