ÉCOLES NATIONALES DES SCIENCES APPLIQUÉES · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année des ENSA · Maroc

Session de juillet 2023

2023 — Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14
C	A	C	D	B	B	A	B	A	C	D	C	B	C

Q15	Q16	Q17	Q18	Q19	Q20
A	A	C	A	B	C

Q1 ✔ Réponse C

On alterne une soustraction et une multiplication, avec un nombre qui augmente de 1 à chaque paire :

$$6 \xrightarrow{-2} 4 \xrightarrow{\times 2} 8 \xrightarrow{-3} 5 \xrightarrow{\times 3} 15 \xrightarrow{-4} 11.$$

Remarque : Suite « logique » : d'autres règles peuvent produire d'autres réponses. La règle « -2, $\times 2$, -3, $\times 3$, -4 » donne 11 (choix C) ; à confirmer avant publication.

Q2 ✔ Réponse A

Un entier est congru modulo 9 à la somme de ses chiffres. Déplacer un chiffre ne change pas cette somme, donc $y \equiv x \equiv 0\ [9]$: le reste est 0.

Q3 ✔ Réponse C

$150 = 2 \times 3 \times 5^2$. Si $ab = 150$ avec $a \wedge b = 1$, chacune des puissances 2, 3 et 5^2 figure en entier dans a ou dans b : $2^3 = 8$ choix.
Les 8 couples d'entiers naturels (a, b) sont : $(1, 150)$, $(2, 75)$, $(3, 50)$, $(6, 25)$, $(25, 6)$, $(50, 3)$, $(75, 2)$, $(150, 1)$.

Q4 ✔ Réponse D

Si x est un entier solution, alors $x(9x^4 - 12x^3 + 6) = 5$, donc x divise 5 : $x \in \{-5, -1, 1, 5\}$.

- $x = 1 : 9 - 12 + 6 - 5 = -2 \neq 0$
- $x = -1 : -9 - 12 - 6 - 5 = -32 \neq 0$
- $x = 5$: $28125 - 7500 + 30 - 5 = 20650 \neq 0$
- $x = -5$: $-28125 - 7500 - 30 - 5 = -35660 \neq 0$

Aucune solution entière.

Q5 ✔ Réponse B

Pour $n \geq 1 : n^2 \leq n^2 + 2n < (n+1)^2$, donc $\lfloor \sqrt{n^2 + 2n} \rfloor = n$ et

$$u_{(n^2+2n)} = \sqrt{n^2 + 2n} - n = \frac{2n}{\sqrt{n^2 + 2n} + n} = \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + 1} \to 1.$$

Q6 ✔ Réponse B

Posons $t = e^{-x} \to 0^+$:
$e^x \sin(e^{-x}) = \dfrac{\sin t}{t} \to 1.$

Q7 ✔ Réponse A

Pour $x > 0$: $\left| \dfrac{\cos(x^2 + x - 1)}{x} \right| \leq \dfrac{1}{x} \to 0.$
Par encadrement, la limite vaut 0.

Q8 ✔ Réponse B

Si f prenait deux valeurs entières $p < q$, le théorème des valeurs intermédiaires lui ferait prendre la valeur $p + \frac{1}{2}$, qui n'est pas entière. Donc f est constante.

Q9 ✔ Réponse A

Avec $x = y = 0$:
$f(0)\left(1 - f(0)^2\right) = 2f(0)$, soit
$f(0)\left(1 + f(0)^2\right) = 0$, donc $f(0) = 0$.
À x fixé, on dérive par rapport à y puis on prend $y = 0$:

$$f'(x)\left(1 - f(x)f(0)\right) - f(x)\,f(x)f'(0) = f'(0),$$

soit $f'(x) = f'(0)\left(1 + f(x)^2\right)$. Donc $\dfrac{f'(x)}{1 + f(x)^2} = f'(0)$.

Q10 ✔ Réponse C

Notons I l'intégrale et posons $x = \frac{1}{t}$, $dx = -\frac{dt}{t^2}$:

$$I = \int_\alpha^{1/\alpha} \frac{-\ln t}{1 + \frac{1}{t^2}} \left(-\frac{dt}{t^2}\right) = \int_\alpha^{1/\alpha} \frac{\ln t}{1 + t^2}\, dt = -I.$$

Donc $I = 0$.

Q11 ✔ Réponse D

$$I + J = \int_0^{\pi/2} x^2\, dx = \frac{\pi^3}{24} \text{ et } J - I = \int_0^{\pi/2} x^2 \cos(2x)\, dx.$$

Deux intégrations par parties :

$$\int_0^{\pi/2} x^2 \cos 2x\, dx = \left[\frac{x^2 \sin 2x}{2}\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} x \sin 2x\, dx = -\left(\left[-\frac{x \cos 2x}{2}\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2x}{2} dx\right) = -\frac{\pi}{4}.$$

Donc $2I = \dfrac{\pi^3}{24} + \dfrac{\pi}{4}$, soit $I = \dfrac{\pi^3}{48} + \dfrac{\pi}{8}$.

Q12 ✔ Réponse C

Une primitive de $(\cos x)^{1445} \sin x$ est $-\dfrac{(\cos x)^{1446}}{1446}$, donc l'intégrale vaut $0 - \left(-\dfrac{1}{1446}\right) = \dfrac{1}{1446}$.

Q13 ✔ Réponse B

La somme des solutions d'une équation $z^2 + bz + c = 0$ vaut $-b$: $z_1 + z_2 = 4i$.
Donc $\mathrm{Im}(z_1) + \mathrm{Im}(z_2) = \mathrm{Im}(z_1 + z_2) = 4$.

Q14 ✔ Réponse C

$(1+i)^2 = 2i$, donc $(1+i)^{2000} = (2i)^{1000} = 2^{1000}\, i^{1000} = 2^{1000} = 4^{500}$ (car $i^4 = 1$ et 1000 est multiple de 4).

Q15 ✔ Réponse A

$-i(15 + 7i) = -15i + 7 = 7 - 15i$, donc $\dfrac{7 - 15i}{15 + 7i} = -i$.
$2023 = 4 \times 505 + 3$, donc $(-i)^{2023} = (-i)^3 = -i^3 = i$.

Q16 ✔ Réponse A

Avec $\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}} \neq 1$ et $\omega^5 = 1$:
$1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = \dfrac{1 - \omega^5}{1 - \omega} = 0.$
Donc la quantité vaut $0^{1000} = 0$.

Q17 ✔ Réponse C

L'équation caractéristique $r^2 - 7r + 12 = 0$ a pour racines 3 et 4, donc $f(x) = ae^{3x} + be^{4x}$.
$f(0) = a + b = 0$ et $f'(0) = 3a + 4b = 1$ donnent $b = 1$, $a = -1 : f(x) = e^{4x} - e^{3x}$.

Q18 ✔ Réponse A

$$d_A = \frac{|2 + 0 + 2 + 4|}{\sqrt{4 + 1 + 1}} = \frac{8}{\sqrt{6}} \text{ et } d_B = \frac{|-3 + 10 - 4 - 5|}{\sqrt{1 + 25 + 16}} = \frac{2}{\sqrt{42}}.$$

$$d_A d_B = \frac{16}{\sqrt{252}} = \frac{16}{6\sqrt{7}} = \frac{8}{3\sqrt{7}}.$$

Q19 ✔ Réponse **B**

Intersection : $\frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{2} \iff x^4 + x^2 - 2 = 0 \iff x^2 = 1 \iff x = \pm 1$. Sur $[-1, 1]$, la cloche est au-dessus de la parabole :

$$\mathcal{A} = \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{2} \right) dx$$
$$= \Big[\arctan x \Big]_{-1}^{1} - \left[\frac{x^3}{6} \right]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}.$$

Q20 ✔ Réponse **C**

Le cercle a pour centre $\Omega\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ et pour rayon R avec $R^2 = \frac{1}{4} + \frac{9}{4} + 3 = \frac{11}{2}$. Le triangle $AM\Omega$ est rectangle en M, donc $AM^2 = A\Omega^2 - R^2 = \left(\frac{9}{4} + \frac{49}{4}\right) - \frac{11}{2} = \frac{58}{4} - \frac{22}{4} = 9$. (On retrouve la puissance de A : $1 + 4 + 1 + 6 - 3 = 9$.) Donc $AM = 3$.