ÉCOLES NATIONALES DES SCIENCES APPLIQUÉES · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

# Concours d'accès en 1re année des ENSA · Maroc

Session de juillet 2024

2024

Correction

| Q1 | Q2 | Q3 | Q4 | Q5 | Q6 | Q7 | Q8 | Q9 | Q10 | Q11 | Q12 | Q13 | Q14 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | A | D | B | C | D | A | C | A | C | B | D | C | A |

| Q15 | Q16 | Q17 | Q18 | Q19 | Q20 |
|---|---|---|---|---|---|
| B | D | C | C | B | C |

**Q1** ✔ Réponse A

Le candidat numéro $k$ reçoit une feuille jaune si et seulement si $k$ est un multiple de 3, et une feuille avec le logo si et seulement si $k$ est un multiple de 4.
Il faut donc compter les multiples de $\mathrm{ppcm}(3,4)=12$ entre 1 et 100 : $12, 24, \ldots, 96$, soit $\left\lfloor \frac{100}{12} \right\rfloor = 8$ candidats.

**Q2** ✔ Réponse A

Pour tout entier $n$ :
$n(n+1)(n+2)(n+3)+1 = (n^2+3n)(n^2+3n+2)+1 = (n^2+3n+1)^2$.
Avec $n=101$ :
$n^2+3n+1 = 10201+303+1 = 10505$, donc

$$\frac{1}{5}\sqrt{(101\times 102\times 103\times 104)+1} = \frac{10505}{5} = 2101.$$

**Q3** ✔ Réponse D

Notons $u_n = \dfrac{(-1)^n n+1}{n+\sqrt{n}}$.
Pour $n$ pair : $u_n = \dfrac{n+1}{n+\sqrt{n}} \to 1$. Pour $n$ impair : $u_n = \dfrac{-n+1}{n+\sqrt{n}} \to -1$.
Les deux suites extraites ont des limites différentes : la suite n'a pas de limite.

**Q4** ✔ Réponse B

En $\frac{\pi}{4}$, le numérateur vaut $\cos\frac{\pi}{6} - \sqrt{3}\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$ et le dénominateur $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ : forme indéterminée.
Les deux fonctions sont dérivables et s'annulent en $\frac{\pi}{4}$, donc la limite est le quotient des nombres dérivés (taux d'accroissement) :

$$N'(x) = -\tfrac{2}{3}\sin\left(\tfrac{2}{3}x\right) - 2\sqrt{3}\cos\left(2x-\tfrac{\pi}{3}\right), \quad N'\left(\tfrac{\pi}{4}\right) = -\tfrac{1}{3} - 3 = -\tfrac{10}{3}$$

$$D'(x) = -2\sin(2x), \quad D'\left(\tfrac{\pi}{4}\right) = -2.$$

La limite vaut $\dfrac{-10/3}{-2} = \dfrac{5}{3} = \dfrac{10}{6}$.

**Q5** ✔ Réponse C

Pour tout réel $t$ :
$t(1-t) = \frac{1}{4} - \left(t-\frac{1}{2}\right)^2 \le \frac{1}{4}$. Donc

$$(1-u_n)u_{n+1} > \tfrac{1}{4} \ge (1-u_n)u_n,$$

et comme $1-u_n>0$ : $u_{n+1}>u_n$. La suite est croissante et majorée par 1, donc elle converge vers un réel $\ell \in ]0,1]$.
Par passage à la limite : $(1-\ell)\ell \ge \frac{1}{4}$, c'est-à-dire $\left(\ell-\frac{1}{2}\right)^2 \le 0$, donc $\ell = \frac{1}{2}$.

**Q6** ✔ Réponse D

L'équation impose $x \ge 1$. Posons $t = \sqrt{x-1} \ge 0$, donc $x = t^2+1$ :

$$x+2t = (t+1)^2, \qquad x-2t = (t-1)^2.$$

L'équation devient $(t+1)+|t-1| = 1$.
- Si $t \ge 1$ : $2t = 1$, soit $t = \frac{1}{2}$, impossible.
- Si $0 \le t < 1$ : $(t+1)+(1-t) = 2 = 1$, impossible.

L'équation n'a pas de solution.

**Q7** ✔ Réponse A

Avec $X = e^x > 0$, l'équation devient $X^2 - 2mX + 1 = 0$, de discriminant réduit $m^2-1$. Le produit des racines vaut 1 et leur somme $2m$.
- Si $m > 1$ : deux racines positives distinctes $X_1 < 1 < X_2$ (produit 1), donc $x_1 = \ln X_1 < 0 < x_2 = \ln X_2$ : deux solutions de signe contraire. **A est vraie.**
- Si $-1 < m < 1$ : discriminant négatif, aucune solution (B fausse).
- Si $m \le -1$ : les racines sont négatives (ou $X=-1$), aucune ne vaut $e^x$ (C fausse).
- Si $m = 1$ : $X = 1$ racine double, une seule solution $x = 0$ (D fausse).

**Q8** ✔ Réponse C

Posons $g(x) = e^{-ax}f(x)$. Alors $g'(x) = e^{-ax}(f'(x) - af(x)) \le 0$ : $g$ est décroissante sur $[0,+\infty[$.
Donc $g(x) \le g(0) = 0$. Mais $g(x) \ge 0$ car $f$ est à valeurs positives. Ainsi $g = 0$, puis $f = 0$ : $f$ est la constante nulle.

**Q9** ✔ Réponse A

Pour $x<0$ : $f'(x) = 0$. Pour $x>0$ : $f'(x) = \dfrac{2}{x^3}e^{-1/x^2}$.
En posant $u = \frac{1}{x^2} \to +\infty$ quand $x \to 0^+$ : $\dfrac{2}{x^3}e^{-1/x^2} = 2u^{3/2}e^{-u} \to 0$ (croissances comparées).
Les limites à gauche et à droite valent 0, donc $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 0$.

**Q10** ✔ Réponse C

Intégration par parties avec $u(x) = \ln(1+x) - \ln x$, $u'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{x} = -\frac{1}{x(1+x)}$, et $v(x) = -\frac{1}{x}$ :

$$\int_1^2 \frac{\ln(1+x)-\ln x}{x^2}dx = \left[-\frac{\ln(1+x)-\ln x}{x}\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{dx}{x^2(1+x)}.$$

Le crochet vaut $-\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2} + \ln 2 = \frac{3}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 3$.
Avec $\dfrac{1}{x^2(1+x)} = -\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{1+x}$ :

$$\int_1^2 \frac{dx}{x^2(1+x)} = \left[-\ln x - \frac{1}{x} + \ln(1+x)\right]_1^2 = -2\ln 2 + \ln 3 + \frac{1}{2}.$$

Donc l'intégrale vaut $\frac{3}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 3 + 2\ln 2 - \ln 3 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2}\ln 2 - \frac{3}{2}\ln 3 - \frac{1}{2}$.

**Q11** ✔ Réponse B

La fonction $F(x) = \dfrac{e^x(\sin x - \cos x)}{2}$ vérifie $F'(x) = \dfrac{e^x(\sin x - \cos x) + e^x(\cos x + \sin x)}{2} = e^x \sin x$.
Donc $\displaystyle\int_0^{\pi/2} e^x \sin x\, dx = F\left(\tfrac{\pi}{2}\right) - F(0) = \frac{e^{\pi/2}}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1+e^{\pi/2}}{2}$.

**Q12** ✔ Réponse **D**

Pour $t \in [0,1]$ :

$$0 \leq 1 - \frac{1}{(1+t^n)^2} = \frac{2t^n + t^{2n}}{(1+t^n)^2} \leq 2t^n + t^{2n}.$$

En intégrant :
$0 \leq 1 - I_n \leq \frac{2}{n+1} + \frac{1}{2n+1} \to 0$.
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 1$.

**Q13** ✔ Réponse **C**

$10! = 2^8 \times 3^4 \times 5^2 \times 7$ (exposant de 2 : $5+2+1=8$ ; de 3 : $3+1=4$ ; de 5 : 2 ; de 7 : 1).
Le nombre de diviseurs est $(8+1)(4+1)(2+1)(1+1) = 9\times5\times3\times2 = 270$.

**Q14** ✔ Réponse **A**

$2^{10} = 1024 = 93\times11+1$, donc $2^{10} \equiv 1\ [11]$ et $2^{123} = (2^{10})^{12}\times 2^3 \equiv 8\ [11]$.
$3^5 = 243 = 22\times11+1$, donc $3^5 \equiv 1\ [11]$ et $3^{121} = (3^5)^{24}\times 3 \equiv 3\ [11]$.
Ainsi $2^{123} + 3^{121} \equiv 8+3 = 11 \equiv 0\ [11]$ : le reste est 0.

**Q15** ✔ Réponse **B**

En divisant par $i$ :
$z^2 - (3+2i)z + 5 + 5i = 0$.
Discriminant :
$\Delta = (3+2i)^2 - 4(5+5i) = -15 - 8i = (1-4i)^2$.
Solutions : $z_1 = \frac{3+2i+1-4i}{2} = 2-i$
et $z_2 = \frac{3+2i-1+4i}{2} = 1+3i$
(vérification : $z_1 z_2 = 5+5i$).
Donc $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 5+10 = 15$.

**Q16** ✔ Réponse **D**

$(1+i)^2 = 2i$, donc
$(1+i)^4 = (2i)^2 = -4$. De même
$(i-1)^2 = -2i$, donc $(i-1)^4 = -4$.
$Z = \frac{1}{2}(-8) = -4$, réel strictement négatif : $\arg Z \equiv \pi\ [2\pi]$.

**Q17** ✔ Réponse **C**

$\overrightarrow{BC}(1,6)$ dirige $(BC)$, donc
$(BC) : 6(x-3) - (y-1) = 0$, soit
$6x - y - 17 = 0$.

$$d(A,(BC)) = \frac{|6\times2 - 6 - 17|}{\sqrt{6^2+1^2}} = \frac{11}{\sqrt{37}}.$$

**Q18** ✔ Réponse **C**

$[AB]$ est un diamètre : le centre est le milieu $\Omega(2,2,3)$ et
$R^2 = \Omega A^2 = 1+9+1 = 11$. On vérifie que $C \in S$ : $\Omega C^2 = 1+9+1 = 11$.
Le plan tangent en $C$ est orthogonal à $\overrightarrow{\Omega C}(-1,3,1)$ et passe par $C$ :

$$-(x-1)+3(y-5)+(z-4) = 0 \iff -x+3y+z-18 = 0.$$

**Q19** ✔ Réponse **B**

Notons $S_1$ « le capteur vient du site 1 » et $D$ « le capteur est défectueux ». Le site 1 produit les deux tiers des capteurs : $P(S_1) = \frac{2}{3}$.

$$P(S_1 \cap D) = P(S_1) \times P_{S_1}(D) = \frac{2}{3} \times 0{,}03 = 0{,}02.$$

**Q20** ✔ Réponse **C**

Formule des probabilités totales : $P(D) = \frac{2}{3}\times0{,}03 + \frac{1}{3}\times0{,}04 = 0{,}02 + \frac{0{,}04}{3} = \frac{0{,}1}{3}$.

$$P_D(S_1) = \frac{P(S_1 \cap D)}{P(D)} = \frac{0{,}02}{0{,}1/3} = 0{,}6.$$