ÉCOLES NATIONALES DES SCIENCES APPLIQUÉES · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année des ENSA · Maroc

Session de juillet 2025 · Durée 1h30

2025 — Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14
D	D	A	C	B	D	A	C	C	C	D	C	A	A

Q15	Q16	Q17	Q18	Q19	Q20
C	A	A	A	B	A

Q1 ✔ Réponse D

$-1+i\sqrt{3}=2e^{2i\pi/3}$, donc $\left(-1+i\sqrt{3}\right)^{2010}=2^{2010}e^{1340i\pi}=2^{2010}$. De même pour le conjugué, d'où $Z=2\times 2^{2010}=2^{2011}$.

Q2 ✔ Réponse D

En passant aux modules : $|z|^6=\sqrt{2}\,|z|$, et $z\neq 0$ donne $|z|^5=\sqrt{2}=2^{1/2}$, soit $|z|=2^{1/10}$.

Q3 ✔ Réponse A

Pour $z\neq -1$: $(z^2+z+1)(z+1)=1 \iff z^3+2z^2+2z=0 \iff z(z^2+2z+2)=0$. Les solutions non réelles sont $-1\pm i$, conjuguées : $|z_1|=|z_2|=\sqrt{2}$.

Q4 ✔ Réponse C

Avec $z=x+iy$: $2\left[(x-3)^2+y^2\right]=(x-5)^2+y^2 \iff x^2-2x+y^2-7=0 \iff (x-1)^2+y^2=8$: cercle de centre $(1,0)$ et de rayon $2\sqrt{2}$.

Q5 ✔ Réponse B

A,B,C,D ont pour affixes les racines de z^4-1, donc $p(M)=|z^4-1|\leq |z|^4+1=2$, avec égalité pour $z^4=-1$ (par exemple $z=e^{i\pi/4}$). Donc $m=2$.

Q6 ✔ Réponse D

$2025=7\times 289+2$, donc $2025^{2025}\equiv 2^{2025}\ [7]$. Or $2^3=8\equiv 1\ [7]$ et $2025=3\times 675$, d'où $2^{2025}\equiv 1\ [7]$: $a=1$.

Q7 ✔ Réponse A

$125=5^3$; il suffit de voir si 5 divise $3^{123}-5$, c'est-à-dire 3^{123}. Or $3^4\equiv 1\ [5]$ et $123=4\times 30+3$, donc $3^{123}\equiv 27\equiv 2\ [5]$: 5 ne divise pas $3^{123}-5$, le PGCD vaut 1.

Q8 ✔ Réponse C

$\ln\left(1+\sqrt{n}\right)\sim \ln\sqrt{n}=\dfrac{1}{2}\ln n$ et $\ln\left(1+n^3\right)\sim 3\ln n$, donc $u_n\to\dfrac{1/2}{3}=\dfrac{1}{6}$.

Q9 ✔ Réponse C

$v_{n+1}=\dfrac{1+2u_n}{u_n}=v_n+2$: (v_n) est arithmétique, $v_n=1+2n$.

Donc $nu_n=\dfrac{n}{1+2n}\to\dfrac{1}{2}$.

Q10 ✔ Réponse C

$u_n\geq\sqrt{n}\to+\infty$, donc $L=+\infty$.

Q11 ✔ Réponse D

Les $2n+1$ termes sont compris entre $\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2n+1}}=\dfrac{1}{n+1}$ et $\dfrac{1}{n}$:

$$\frac{2n+1}{n+1}\leq S_n\leq\frac{2n+1}{n},$$

et les deux bornes tendent vers 2.

Q12 ✔ Réponse C

Avec $(3+\sqrt{5})^n=2K_n-(3-\sqrt{5})^n$ (K_n entier) : $\cos\left((3+\sqrt{5})^n\pi\right)=\cos\left((3-\sqrt{5})^n\pi\right)$. Comme $0<3-\sqrt{5}<1$, $(3-\sqrt{5})^n\to 0$ et $L=\cos 0=1$.

Q13 ✔ Réponse A

On pose $x=a+h$, $h\to 0^+$. $\sqrt{x}-\sqrt{a}\sim\dfrac{h}{2\sqrt{a}}$ est négligeable devant $\sqrt{h}$, donc le numérateur est équivalent à $-\sqrt{h}$, et le dénominateur $\sqrt{h(2a+h)}\sim\sqrt{2a}\sqrt{h}$. La limite vaut $-\dfrac{1}{\sqrt{2a}}$.

Q14 ✔ Réponse A

$0\leq\dfrac{x}{1}-\dfrac{x}{1+x^{2n}}=\dfrac{x^{2n+1}}{1+x^{2n}}\leq x^{2n+1}$, donc $0\leq\dfrac{1}{2}-I_n\leq\dfrac{1}{2n+2}\to 0$: $L=\dfrac{1}{2}$.

Q15 ✔ Réponse C

Par parties :

$$I=\left[\frac{x^3}{3}\ln(x^2+1)\right]_0^{\sqrt{3}}-\frac{2}{3}\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x^4}{x^2+1}\,dx.$$

Le crochet vaut $\sqrt{3}\ln 4=2\sqrt{3}\ln 2$, et $\dfrac{x^4}{x^2+1}=x^2-1+\dfrac{1}{x^2+1}$ donne $\dfrac{2}{3}\left[\dfrac{x^3}{3}-x+\arctan x\right]_0^{\sqrt{3}}=\dfrac{2\pi}{9}$. Donc $I=2\left(\sqrt{3}\ln 2-\dfrac{\pi}{9}\right)$.

Q16 ✔ Réponse A

Avec $u=\ln x$, $f(x)=\dfrac{2u'u}{1+u^2}$: une primitive est $\ln\left(1+(\ln x)^2\right)$, qui vaut 0 en $x=1$.

Q17 ✔ Réponse A

$d(\Omega,P)=\dfrac{|4+10-18+4|}{\sqrt{65}}=0$: le plan passe par le centre, il coupe (S) suivant un grand cercle de centre Ω et de rayon 3.

Q18 ✔ Réponse A

Les deux jets sont indépendants : $p=P(F_2)=\dfrac{1}{2}$.

Q19 ✔ Réponse **B**

Probabilités totales :

$$p = 0{,}001 \times 0{,}9 + 0{,}999 \times 0{,}01 = 0{,}0009 + 0{,}00999 = 0{,}01089,$$

soit $p = 1{,}089\%$.

Q20 ✔ Réponse **A**

Les jets sont indépendants : $p_n = P(\text{second jet} \leq 3) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ pour tout $n \geq 2$, donc $p = \frac{1}{2}$.