ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES DE KHOURIBGA · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'entrée en 1re année · ENSA Khouribga

Année 2009–2010

2009 — Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14
B	C	D	A	B	BD	A	C	B	A	C	D	A	D

Q15	Q16	Q17
B	C	A

Q1 ✔ Réponse B

$a^2+b^2-2|ab| = (|a|-|b|)^2 \geq 0$.

Q2 ✔ Réponse C

Ils sont racines de $t^2 - St + P = 0$, équation équivalente à $-t^2 + St - P = 0$.

Q3 ✔ Réponse D

Seule $2x+3y-z=0$ est linéaire homogène ; les autres ensembles ne contiennent pas 0.

Q4 ✔ Réponse A

Centre $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et $R^2 = \frac{18}{4} = \frac{9}{2}$: $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{2} \iff x^2+y^2+x-y=4$. (B est centré en B ; le milieu est $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$; $(AB) : y = x+1$.)

Q5 ✔ Réponse B

On vérifie que i et $1-2i$ sont racines. Somme des racines $= 1$: la troisième est $1-i-(1-2i) = i$. Racine double i : $S = \{i, 1-2i\}$.

Q6 ✔ Réponse BD

$z^3 = 8 \iff z = 2e^{2ik\pi/3}$: 2, $-1+i\sqrt{3}$, $-1-i\sqrt{3}$. B et D sont identiques et justes.

Q7 ✔ Réponse A

Toute suite convergente est bornée ; B, C, D sont fausses ($(-1)^n$, n, $\frac{(-1)^n}{n}$).

Q8 ✔ Réponse C

$k\ln\left(1+\frac{\sin k}{k}\right) = \sin k + O\left(\frac{1}{k}\right)$: bornée mais sans limite (B faux). A et D tendent vers 0.

Q9 ✔ Réponse B

$a < a^3$. $D_f =]-\infty, a] \cup]a^3, +\infty[$. Pour $x > a^3$, les deux termes sont positifs et $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x-a^3}}$; ce n'est pas vrai pour $x < a$ (D faux).

Q10 ✔ Réponse A

Le numérateur s'annule en 1 ; sa dérivée y vaut $-\frac{2\pi}{3}\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$, celle du dénominateur -2 : limite $\dfrac{\pi\sqrt{3}}{6}$ (même valeur en -1 par parité).

Q11 ✔ Réponse C

$\dfrac{1-\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\cos x}{x}} \to 1$.

Q12 ✔ Réponse D

Pour $x > 1$, en multipliant par la quantité conjuguée :

$$f(x) = \frac{(x+1)\left(\sqrt{x^2+a^2}+\sqrt{x+a^2}\right)}{x} \to 4\sqrt{1+a^2}.$$

Continuité : $4\sqrt{1+a^2} = f(1) = 4\sqrt{2}$, soit $a = \pm 1$.

Q13 ✔ Réponse A

$\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} + \dfrac{f(a)-f(a-h)}{h} \to 2f'(a)$.

Q14 ✔ Réponse D

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-x^2} + \arcsin x \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{\sqrt{1-x^2}+x\arcsin x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}.$$

Q15 ✔ Réponse B

$\sqrt{t} \geq t^2$ sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ et l'inverse sur $[1,2]$. Avec $F(t) = \frac{t^3}{3} - \frac{2}{3}t^{3/2}$:

$$\mathcal{A} = \left(F\left(\tfrac{1}{2}\right) - F(1)\right) + (F(2) - F(1)) = \frac{27}{8} - \frac{3}{2}\sqrt{2}.$$

(A et D ne tiennent pas compte du changement de signe.)

Q16 ✔ Réponse C

$r^2 - 6r + 9 = (r-3)^2$: racine double 3, $y = (ax+b)e^{3x}$.

Q17 ✔ Réponse A

Les 28 pièces sont les paires $\{i, j\}$ avec $0 \leq i \leq j \leq 6$. Somme 6 : $\{0,6\}, \{1,5\}, \{2,4\}, \{3,3\}$, soit $\frac{4}{28} = \frac{1}{7}$. ($P(12) = \frac{1}{28}$, $P(3) = \frac{2}{28}$, $P(8) = \frac{3}{28}$.)