ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES DE KHOURIBGA · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'entrée en 1re année · ENSA Khouribga

Année 2011–2012

2011 — Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14
B	C	B	B	A	D	A	D	A	C	D	D	C	B

Q15	Q16	Q17	Q18	Q19
C	C	B	A	D

Q1 ✔ Réponse B

Inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^2$: $1\cdot 1+1\cdot\|x\|\le\sqrt{1+1}\sqrt{1+\|x\|^2}$. (A et C sont fausses en général ; D est fausse pour $x=0$.)

Q2 ✔ Réponse C

$6X^3+5X^2-2X-1=(X+1)(3X+1)(2X-1)$: racines -1, $-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$. Avec $X=\ln x$: $x\in\left\{\frac{1}{e},\frac{1}{\sqrt[3]{e}},\sqrt{e}\right\}$. (A ne contient pas -1 ; B : $\cos 0=1$ n'est pas racine ; D : seul $e^x=\frac{1}{2}$ convient.)

Q3 ✔ Réponse B

$$v_{n+1}=qu_n+r-\frac{r}{1-q}=qu_n-\frac{qr}{1-q}=q\,v_n.$$

Q4 ✔ Réponse B

$\tan x-\sin x=\tan x\,(1-\cos x)\sim x\cdot\dfrac{x^2}{2}$: la limite vaut $\dfrac{1}{2}$.

Q5 ✔ Réponse A

$r^2+6r+9=(r+3)^2$: racine double -3, d'où $y=(ax+b)e^{-3x}$. (B : racine double 2 ; C : $r=-1\pm i\sqrt{2}$, il manque e^{-x} ; D : racines réelles -2, -3.)

Q6 ✔ Réponse D

Croissances comparées : $t^3e^{-t}\to 0$. ($|t|\ln|t|\to 0$, $\frac{\ln t}{t}\to 0$, $\frac{e^t}{t}\to+\infty$.)

Q7 ✔ Réponse A

$$I=\left[\frac{\sin^3 x}{3}\right]_0^{\pi/2}=\frac{1}{3}\text{ et }I+J=\int_0^{\pi/2}\cos x\,dx=1.$$

Q8 ✔ Réponse D

$n^2-n\cos n\ge n^2-n\to+\infty$. (Les suites de A, B, C ne sont pas bornées.)

Q9 ✔ Réponse A

Toute suite convergente est bornée. Les réciproques B, C, D sont fausses ($u_n=n$, $u_n=-n$, $u_n=(-1)^n$).

Q10 ✔ Réponse C

M (distinct de A et B) est sur le cercle de diamètre $[AB]$ si et seulement si $\widehat{AMB}$ est droit : le triangle est rectangle en M.

Q11 ✔ Réponse D

Les racines sont conjuguées : $|z_1|=|z_2|$, donc $OM_1=OM_2$. $z_1+z_2=-\frac{1}{3}$ est réel et $z_I=-\frac{1}{6}$. $|z_1|=\sqrt{\frac{5}{3}}$ mais $|z_1-z_2|=\frac{\sqrt{59}}{3}$: pas équilatéral.

Q12 ✔ Réponse D

$t\sin t\sim t^2$ et $1-\cos t\sim\dfrac{t^2}{2}$: la limite vaut 2.

Q13 ✔ Réponse C

En dimension n, une famille libre de n vecteurs est une base.

Q14 ✔ Réponse B

$\dfrac{f(x)+2f(y)}{3}$ est compris entre $f(x)$ et $f(y)$; par le théorème des valeurs intermédiaires, il est atteint en un z entre x et y. (A : $f(x)=\frac{1}{x}$ sur $]0,1[$; D demande la dérivabilité.)

Q15 ✔ Réponse C

Strictement monotone $\Rightarrow$ injective. Elle n'est bijective que sur son image.

Q16 ✔ Réponse C

Il y a 13 jetons rouges équiprobables : un numéro donné a la probabilité $\dfrac{1}{13}$. (L'énoncé omet le numéro.)

Q17 ✔ Réponse B

$$f(-x)=\ln\left|\frac{-x-a}{-x+a}\right|=\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right|=-f(x)$$: f est impaire.

Q18 ✔ Réponse A

f est de dérivée nulle sur chaque intervalle : $f(t)=\dfrac{\pi}{2}$ pour $t>0$ et $-\dfrac{\pi}{2}$ pour $t<0$.

Q19 ✔ Réponse D

Avec $(\arctan\sqrt{t})'=\dfrac{1}{2\sqrt{t}(1+t)}$:

$$f'(t)=\frac{\frac{1+\sqrt{t}}{\sqrt{t}(1+t)}-\frac{\arctan\sqrt{t}}{\sqrt{t}}}{(1+\sqrt{t})^2}=\frac{1}{\sqrt{t}(1+\sqrt{t})}\left(\frac{1}{1+t}-\frac{\arctan\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}\right).$$