ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES DE KHOURIBGA · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'entrée en 1re année · ENSA Khouribga

Année 2011–2012

2011 Énoncé

Q1 Pour tout vecteur $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ on pose

$$< x, y >= \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \quad \text{et} \quad \|x\| = \sqrt{< x, x >} = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

et on a

- A $| < x, y > | \geq \|x\| \, \|y\|$
- B $(1 + \|x\|) \leq \sqrt{2}\sqrt{1 + \|x\|^2}$
- C $< x, y >= \|x\| \, \|y\|$
- D $(1 + \|x\|) \leq \dfrac{1}{\sqrt{2}} (1 + \|x\|^2)$

Q2 L'ensemble S des solutions de l'équation en « x »

- A $6x^3 + 5x^2 - 2x - 1 = 0$ est $S = \left\{\dfrac{-1}{3}, \dfrac{1}{2}, 1\right\}$
- B $6\cos^3 x + 5\cos^2 x - 2\cos x - 1 = 0$ est $S = \left\{0, \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{3}\right\}$
- C $6\ln^3 x + 5\ln^2 x - 2\ln x - 1 = 0$ est $S = \left\{\dfrac{1}{\sqrt[3]{e}}, \dfrac{1}{e}, \sqrt{e}\right\}$
- D $6e^{3x} + 5e^{2x} - 2e^x - 1 = 0$ est $S = \{-\ln 3, -\ln 2, 0\}$

Q3 On considère la suite récurrente de nombres réels $(u_n)_n$ donnée par $\begin{cases} u_0 = a \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = qu_n + r \end{cases}$ avec $q \neq 1$ et $r \neq 0$. Alors la suite $(v_n)_n$ définie par $v_n = u_n - \dfrac{r}{1-q}$ est

- A Géométrique de raison (rq)
- B Géométrique de raison q
- C Arithmétique de raison r
- D Arithmétique de raison $(r - q)$

Q4 On a $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{x^3} =$

A $\dfrac{-1}{2}$ B $\dfrac{1}{2}$ C -1 D 1

Q5 La solution générale de l'équation différentielle homogène du second ordre

- A $y'' + 6y' + 9y = 0$ est $y = (ax + b)e^{-3x}$
- B $y'' - 4y' + 4y = 0$ est $y = (a\cos 2x + b\sin 2x)e^{2x}$
- C $y'' + 2y' + 3y = 0$ est $y = \left(a\cos\sqrt{2}x + b\sin\sqrt{2}x\right)$
- D $y'' + 5y' + 6y = 0$ est $y = (a\cos 3x - b\sin 3x)e^{-2x}$

Q6 On a

- A $\lim\limits_{t \to 0} (|t| \ln |t|) = -\infty$
- B $\lim\limits_{t \to \infty} \left(\dfrac{\ln t}{t}\right) = +\infty$
- C $\lim\limits_{t \to \infty} \left(\dfrac{e^t}{t}\right) = 0$
- D $\lim\limits_{t \to +\infty} (t^3 e^{-t}) = 0$

Q7 On considère les intégrales

$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^2 x \, dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \, dx$.

Alors on a

A $I + J = 1$ B $I - J = 1$
C $I = J$ D $I = -J$

Q8 La suite de nombre réels $(u_n)_n$ donnée par

- A $u_n = (-1)^n \left(\dfrac{5^n}{3^n}\right)$ est majorée
- B $u_n = (-1)^n \ln\left(1 + n^2\right)$ est convergente
- C $u_n = (-1)^n \ln\left(1 + n^2\right)$ est bornée
- D $u_n = \left(n^2 - n\cos n\right)$ est divergente.

Q9 Toute suite de nombres réels

- A Convergente est bornée
- B Croissante est majorée
- C Décroissante est minorée
- D Bornée est convergente

Q10 Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$, un point M est sur le cercle de diamètre $[AB]$ si, et seulement, si

- A Le triangle AMB est isocèle
- B Le triangle AMB est équilatéral
- C Le triangle AMB est droit
- D Le triangle AMB est quelconque

Q11 Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$, on considère les points M_1 et M_2 d'affixe respectifs z_1 et z_2 dans $\mathbb{C}$ solutions de l'équation en « z » : $3z^2 + z + 5 = 0$. Et soit I le milieu du segment $[M_1, M_2]$. Alors on a

- A Le triangle OM_1M_2 est équilatéral
- B $(z_1 + z_2)$ est imaginaire pur
- C L'affixe de I est imaginaire pur
- D Le triangle OM_1M_2 est isocèle

Q12 On a $\lim\limits_{t \to 0} \left(\dfrac{t \sin t}{1 - \cos t}\right) =$

A $\dfrac{-1}{2}$ B -2 C $\dfrac{1}{2}$ D 2

Q13 Dans un espace vectoriel de dimension n :

- A Une partie libre de moins de n éléments est génératrice
- B Une partie génératrice de plus de n éléments est libre
- C Une partie libre de n éléments est une base
- D Une partie génératrice de n éléments n'est pas une base

Q14 Pour tout $a < b$ dans $\mathbb{R}$ et toute fonction f continue sur $]a; b[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$,

- A La fonction f est bornée sur $]a; b[$
- B $\forall x, y \in]a; b[, \exists z \in]a; b[$ / $f(x) + 2f(y) = 3f(z)$
- C $\forall x, y \in]a; b[$ si $f(x) = f(y)$ alors $\exists z \in]a; b[$ / $f(z) = 0$
- D $\forall x, y \in]a; b[, \exists z \in]a; b[$ / $f(x) - f(y) = (x - y)f(z)$

Q15 Une fonction strictement monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est

A Bijective B Inversible
C Injective D Surjective

Q16 Dans une urne à 52 jetons numérotés de 1 à 13 et de quatre couleurs différentes : noire, blanche, rouge et verte. On tire un jeton rouge. La probabilité pour qu'il porte le numéro est de

A $P = \dfrac{1}{52}$ B $P = \dfrac{4}{52}$
C $P = \dfrac{1}{13}$ D $P = \dfrac{4}{13}$

Q17 Pour tout réel $a > 0$, la fonction f donnée par $f(x) = \ln\left|\dfrac{x - a}{x + a}\right|$ est

- A Paire sur son domaine
- B Impaire sur son domaine
- C Croissante sur son domaine
- D Décroissante sur son domaine

Q18 On considère la fonction $f(t) = \arctan(t) + \arctan\left(\dfrac{1}{t}\right)$; $t \neq 0$. Alors on a

- A La fonction f ne prend que deux valeurs distinctes sur son domaine
- B La fonction f est constante sur son domaine
- C La fonction f prend plus de deux valeurs distinctes sur son domaine
- D La fonction f est non bornée sur son domaine

Q19 La dérivée $f'(t)$ de la fonction $f(t) = \dfrac{2\arctan\left(\sqrt{t}\right)}{1 + \sqrt{t}}$; $t > 0$ est

- A $f'(t) = \dfrac{1}{(1 + \sqrt{t})}\left(\dfrac{1}{1 + t} - \dfrac{\arctan\left(\sqrt{t}\right)}{1 + \sqrt{t}}\right)$
- B $f'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}\,(1 + \sqrt{t})}\left(\dfrac{1}{1 + t} + \dfrac{\arctan\left(\sqrt{t}\right)}{1 + \sqrt{t}}\right)$
- C $f'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}\,(1 + \sqrt{t})^2}\left(\dfrac{1}{1 + t} - \dfrac{\arctan\left(\sqrt{t}\right)}{1 + \sqrt{t}}\right)$
- D $f'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}\,(1 + \sqrt{t})}\left(\dfrac{1}{1 + t} - \dfrac{\arctan\left(\sqrt{t}\right)}{1 + \sqrt{t}}\right)$