ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES DE MARRAKECH · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'entrée en 1re année du cycle préparatoire · ENSA Marrakech

Session du 24 juillet 2009

2009 — Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14
C	AD	B	A	AB	C	D	D	A	D	C	B	A	C

Q15	Q16
D	CD

Q1 ✔ Réponse C

Un produit de 5 entiers consécutifs est divisible par $5! = 120$. (A : $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$; B : $5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 1680 = 48 \times 35$.)

Q2 ✔ Réponse AD

$h'(x) = -h(x) + \dfrac{1}{1+e^x}$: h vérifie $y' + y = \dfrac{1}{1+e^x}$. L'énoncé écrit $y' - y$ (coquille probable). Avec $y' + y$: h est solution (A) et $f = h + 2e^{-x}$ aussi, car $2e^{-x}$ est solution de $y' + y = 0$ (D). La solution générale de $y' + y = 0$ est ke^{-x} (C faux).

Q3 ✔ Réponse B

$P = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{10} + \dfrac{3}{4} \times \dfrac{1}{3} = 0{,}025 + 0{,}25 = 0{,}275.$

Q4 ✔ Réponse A

$\omega = \cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8} = e^{3i\pi/8}$, donc $\omega^2 = e^{3i\pi/4} = \dfrac{i-1}{\sqrt{2}}$.

($\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$; $\omega^4 = -i$; les racines de $z^2 - \sqrt{2}z + 1$ sont $e^{\pm i\pi/4}$.)

Q5 ✔ Réponse AB

$\overrightarrow{AB}(\sqrt{3}, -1)$ et $\overrightarrow{DC}(\sqrt{3}, 1)$: A vraie, C fausse.
$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} = (-\sqrt{3})(-\sqrt{3}) + 1 \times (-3) = 0$: rectangle en B. Les quatre points sont à distance 2 de $\Omega(1, 0)$: D fausse.

Q6 ✔ Réponse C

Le dénominateur tend vers 1 mais $\sin^9 x + \cos^6 x$ oscille : pas de limite.

Q7 ✔ Réponse D

f est 2π-périodique. $f'(x) = (\cos^2 x - \sin x)e^{\sin x}$; une primitive est $e^{\sin x}$. Sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f \geq 0$ et l'aire vaut $e - 1 \neq e + 1$.

Q8 ✔ Réponse D

Si $r + x = q$ rationnel, alors $x = q - r$ serait rationnel. (A : $0 \times \sqrt{2} = 0$; B : $\sqrt{2} + (-\sqrt{2})$; C : $\sqrt{2} \times \sqrt{2}$.)

Q9 ✔ Réponse A

$\overrightarrow{AB}(-3, 1, 5)$ et $\overrightarrow{AC}(-2, -3, 4)$ ne sont pas colinéaires. $C \notin P$ ($0 + 4 + 3 + 1 \neq 0$), A ne vérifie pas l'équation de C, et $(0, 2, 3)$ n'est pas C (D fausse).

Q10 ✔ Réponse D

$d(C, P) = \dfrac{8}{\sqrt{6}} = \dfrac{4\sqrt{6}}{3}$; le projeté est $C - \frac{4}{3}(1, -2, 1) = \left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right)$. $d(D, P) = \dfrac{2}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$: la sphère est tangente (C fausse). $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -25 \neq 0$.

Q11 ✔ Réponse C

$0 \leq x_n \leq \frac{1}{n+1}$: $x_n \to 0$ (A faux). Par parties $x_{n+1} = \sin 1 - (n+1)y_n$ (B faux de signe). Avec la relation donnée : $nx_n = \dfrac{n}{n+1}(y_{n+1} + \cos 1) \to \cos 1$, car $y_n \to 0$. ($ny_n \to \sin 1$.)

Q12 ✔ Réponse B

$J + iI = \displaystyle\int_0^\pi e^{(1+i)x}dx = \frac{-e^\pi - 1}{1+i}$, d'où $I = \dfrac{1+e^\pi}{2}$ et $J = -\dfrac{1+e^\pi}{2}$. Donc $I = J + e^\pi + 1$.

Q13 ✔ Réponse A

$\left(\sqrt{2}\right)^2 \times 2 = 4$. (B donne $-\ln 8$; C donne $\frac{2}{3}$; D n'a pas de solution car il faut $x > 1$.)

Q14 ✔ Réponse C

$\displaystyle\int_0^3 f = 1 - 2 + 4 = 3$. $F(x) = 4x - 9$ sur $]2, 3]$ (B faux). F est continue mais pas dérivable en 1 et 2.

Q15 ✔ Réponse D

$v_{n+1} = \dfrac{1}{3}v_n$, $v_0 = -1$: $v_n = -3^{-n}$ croissante,

$u_n = \dfrac{3 + v_n}{1 - v_n} = \dfrac{3^{n+1} - 1}{3^n + 1} \to 3.$

Q16 ✔ Réponse CD

$f\left(\frac{4}{\pi}\right) = \frac{4}{\pi}\sin\frac{\pi}{2} = \frac{4}{\pi}$. En $+\infty$, $\sin\frac{2}{x} \sim \frac{2}{x}$: $f \to 2$.
$f = 0 \iff x = \frac{2}{k\pi}$ (A faux) et $f \to 0$ en 0 (B faux).