ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES DE MARRAKECH · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'entrée en 1re année du cycle préparatoire · ENSA Marrakech

Session du 24 juillet 2009

2009 — Énoncé

Q1

A $\forall n \in \mathbb{N}^* : n(n+1)(n+2)(n+3)$ est divisible par 22

B $\forall n \in \mathbb{N}^* : n(n+1)(n+2)(n+3)$ n'est pas divisible par 48

C $\forall n \in \mathbb{N}^* : n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$ est divisible par 120

D $\forall n \in \mathbb{N}^* : n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$ n'est pas divisible par 120

Q2 Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = e^{-x}\ln(1+e^x)$

A h est solution de l'équation différentielle $E : y' - y = \dfrac{1}{1+e^x}$

B Si $f - h$ est solution de E alors f est solution de E

C La solution générale de $y' + y = 0$ est $y = ke^x$, $k \in \mathbb{R}$

D La fonction f définie par $f(x) = e^{-x}\ln(1+e^x) + 2e^{-x}$ est solution de E

Q3 Dans une classe, les garçons représentent le quart de l'effectif. Une fille sur trois a eu son permis du premier coup, alors que seulement un garçon sur dix l'a eu du premier coup. On interroge un élève (garçon ou fille) au hasard. La probabilité qu'il ait eu son permis du premier coup est égale à : (résultats arrondis à 10^{-3} près)

A 0,043 B 0,275 C 0,217 D 0,033

Q4 Soit le complexe

$$\omega = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} + i\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

A ω est racine carrée de $\dfrac{1}{\sqrt{2}}(i-1)$

B $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

C ω^2 est solution de l'équation $z^2 - \sqrt{2}z + 1 = 0$

D $\omega^4 = i$

Q5 Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct, on considère les points A, B, C, D d'affixes respectives $z_A = 1+2i$, $z_B = 1+\sqrt{3}+i$, $z_C = 1+\sqrt{3}-i$, $z_D = 1-2i$

A $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{DC}$

B Le triangle ABD est rectangle

C Le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme

D Les points A, B, C, D ne sont pas sur un même cercle

Q6 La limite de la fonction $g(x) = \dfrac{\sin^9 x + \cos^6 x + 1}{e^{-x}+1}$ quand x tend vers $+\infty$ vaut :

A 0 B $+\infty$ C n'existe pas D 1

Q7 Soit la fonction f de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \cos(x)e^{\sin(x)}$

A La fonction f n'est pas périodique

B On a $f'(x) = \left(\cos^2(x) + \sin(x)\right)e^{\sin(x)}$

C Une primitive de f est $F(x) = \sin(x)e^{\sin(x)} - 1$

D L'aire du domaine plan délimité par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2}$ est différente de $e+1$ unités d'aire.

Q8 Indiquer la phrase qui vous semble correcte parmi les phrases suivantes :

A Le produit d'un rationnel et d'un irrationnel est un irrationnel

B La somme de deux nombres irrationnels est irrationnelle

C Le produit de deux nombres irrationnels est irrationnel

D La somme d'un nombre rationnel et d'un irrationnel est irrationnelle

L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$. On considère les points : $A(2;1;-1)$, $B(-1;2;4)$, $C(0;-2;3)$, $D(1;1;-2)$ et le plan P d'équation $x - 2y + z + 1 = 0$.

Q9

A Les points A, B et C définissent un plan

B La droite (AC) est incluse dans le plan P

C Une équation cartésienne du plan (ABD) est : $x + 8y + z - 11 = 0$

D Une représentation paramétrique de la droite (AC) est : $\begin{cases} x = 2k \\ y = 2 + 3k \\ z = 3 - 4k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$

Q10

A Les droites (AB) et (CD) sont orthogonales

B La distance du point C au plan P est égale à $4\sqrt{6}$

C La sphère de centre D et de rayon $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ n'est pas tangente au plan P.

D Le point $E\left(-\dfrac{4}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{5}{3}\right)$ est le projeté orthogonal du point C sur le plan P

Q11 On considère les suites (x_n) et (y_n) définies pour tout entier naturel n non nul par :

$$x_n = \int_0^1 t^n\cos(t)\,dt \text{ et } y_n = \int_0^1 t^n\sin(t)\,dt$$

A La suite (x_n) converge vers $\ell > 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$

B Pour tout entier naturel n non nul, $x_{n+1} = (n+1)y_n + \sin(1)$

C Si on admet que, pour tout entier naturel n non nul, $y_{n+1} = (n+1)x_n - \cos(1)$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} nx_n = \cos(1)$

D Si on admet que, pour tout entier naturel n non nul, $y_{n+1} = (n+1)x_n - \cos(1)$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} ny_n = \cos(1)$

Q12 Soient les deux intégrales définies par : $I = \int_0^\pi e^x\sin(x)\,dx$ et $J = \int_0^\pi e^x\cos(x)\,dx$

A On a $I = -2J$

B On a $I = J + e^\pi + 1$

C On a $I = -\dfrac{1}{2}(1+e^\pi)$

D On a $J = 1 + e^\pi$

Q13

A Si $x = \left[\ln\left(e^{\sqrt{2}}\right)\right]^2 e^{-\ln\left(\frac{1}{2}\right)}$ alors $x = 4$

B Si $x = \ln\left(\dfrac{3^2}{2^3}\right) - 4\ln\left(\sqrt{3}\right)$ alors $x = \ln 8$

C Si $x = \dfrac{\left(\sqrt[4]{4}\right)^2}{\left(\sqrt[4]{3\sqrt{3}}\right)^2\sqrt{\sqrt{3}}}$ alors $x = \dfrac{2}{5}$

D Si $\ln(2x-1) = \ln(x-1)$ alors $x = 0$

Q14 Soit f la fonction définie sur $[0,3]$ par

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \\ -2 & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 4 & \text{si } 2 < x \leq 3 \end{cases} \quad \text{et}$$

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

A $\int_0^3 f(t)\,dt = 4$

B $F(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 3 - 2x & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 9 + 4x & \text{si } 2 < x \leq 3 \end{cases}$

C F est continue sur $[0,3]$.

D F est dérivable sur $[0,3]$.

Q15 Soient les suites numériques (u_n) et (v_n) définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $u_0 = 1$, $u_{n+1} = \dfrac{5u_n + 3}{u_n + 3}$ et $v_n = \dfrac{u_n - 3}{u_n + 1}$

A La suite (u_n) n'est pas bornée

B La suite (v_n) est décroissante

C Pour tout entier $n > 0$, $u_n = \dfrac{3 - 3^n}{1 - 3^n}$

D La suite (u_n) est convergente.

Q16 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = x\sin\left(\dfrac{2}{x}\right)$

A On a $f(x) = 0$ si et seulement s'il existe un entier relatif non nul k tel que $x = \dfrac{1}{k\pi}$

B On a $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$

C On a $f\left(\dfrac{4}{\pi}\right) = \dfrac{4}{\pi}$

D On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$