ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES DE MARRAKECH · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'entrée en 1re année du cycle préparatoire · ENSA Marrakech

Année 2010–2011

2010 — Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14	Q15
C	B	B	B	C	C	A	AC	C	D	C	C	B	A	BC

Q1 ✔ Réponse C

$x \sin x \sim x^2$ et $1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$: la limite vaut 2.

Q2 ✔ Réponse B

Pour $x > 0$:
$\arctan \dfrac{x}{x+1} - \arctan \dfrac{x-1}{x} = \arctan \dfrac{\frac{x}{x+1} - \frac{x-1}{x}}{1 + \frac{x-1}{x+1}} = \arctan \dfrac{1}{2x^2}$,
donc $f = 0$. (En $+\infty$: $0 - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 0$.)

Q3 ✔ Réponse B

$u_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{1 + k/n} \to \int_0^1 \dfrac{dx}{1+x} = \ln 2$ (somme de Riemann).

Q4 ✔ Réponse B

$u_n > 0$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{1+u_n^2} < 1$: décroissante minorée, de limite $\ell = \dfrac{\ell}{1+\ell^2}$, soit $\ell = 0$. ($u_2 = 0{,}4 < \frac{1}{2}$.)

Q5 ✔ Réponse C

Équation caractéristique $r^2 - (1+m)r + m = (r-1)(r-m)$.
Pour $m = 1$, racine double 1 : $y = (\alpha t + \beta)e^t$. (Pour $m = 0$: $y = \alpha e^t + \beta$.)

Q6 ✔ Réponse C

$1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\pi/3}$, donc $z = 2\ \mathrm{Re}\left(32e^{5i\pi/3}\right) = 64 \cos \dfrac{5\pi}{3} = 32$.

Q7 ✔ Réponse A

Pour $n \geq 2$, les racines de $z^n - 1$ ont pour somme 0 (coefficient de z^{n-1} nul) et pour produit $(-1)^n \times (-1) = (-1)^{n+1}$.

Q8 ✔ Réponse AC

$\cos(nt)\cos(mt) = \frac{1}{2}\left[\cos((n+m)t) + \cos((n-m)t)\right]$. Si $m \neq n$: $I = 0$. Si $m = n \neq 0$: $I = \pi$ (2π seulement si $m = n = 0$).

Q9 ✔ Réponse C

Par parties,
$\displaystyle\int f(t)\cos(nt)\,dt = \left[\frac{f(t)\sin(nt)}{n}\right] - \frac{1}{n}\int f'(t)\sin(nt)\,dt$, qui est majoré par $\dfrac{K}{n} \to 0$ (f de classe C^1). (Les bornes 0, 2π du sujet sont à lire a, b.)

Q10 ✔ Réponse D

$2x - y + z = 0$ est un plan vectoriel. (A n'est pas stable par somme, B pas par $\lambda < 0$, C ne contient pas 0.)

Q11 ✔ Réponse C

$A = aI + bN$ avec $N^2 = 0$ et $IN = NI$: binôme, $A^n = a^n I + n a^{n-1} b N$.

Q12 ✔ Réponse C

$1{,}1^2 = 1{,}21$: augmentation de 21%.

Q13 ✔ Réponse B

$1{,}1 \times 0{,}9 = 0{,}99$: baisse de 1%.

Q14 ✔ Réponse A

$(AB) : x + 3y - 5 = 0$. $d = \dfrac{|3 + 12 - 5|}{\sqrt{10}} = \dfrac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$.

Q15 ✔ Réponse BC

$\overrightarrow{AB}(0,1,1)$, $\overrightarrow{AC}(2,-2,2)$: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, droites perpendiculaires. Le plan $2x + y - z - 3 = 0$ contient A, B et C (vérification directe) : C est vraie aussi.