ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES DE MARRAKECH · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'entrée en 1re année du cycle préparatoire · ENSA Marrakech

Année 2010–2011

2010

Énoncé

Q1 Soit f la fonction définie, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, par : $f(x) = \dfrac{x \sin x}{1 - \cos x}$. Alors :

- **A** $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$
- **B** $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$
- **C** $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 2$
- **D** $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -1$

Q2 Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \arctan\left(\dfrac{1}{2x^2}\right) - \arctan\left(\dfrac{x}{x+1}\right) + \arctan\left(\dfrac{x-1}{x}\right)$

- **A** f est constante égale à 1.
- **B** f est constante égale à 0.
- **C** f n'est pas constante.
- **D** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{\pi}{4}$

Q3 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n}$, on a alors :

- **A** $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$
- **B** $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ln(2)$
- **C** $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$
- **D** $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$

Q4 Soit $(u_n)_n$ la suite définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1 + u_n^2}$

- **A** La suite $(u_n)_n$ est croissante et tend vers $+\infty$.
- **B** La suite $(u_n)_n$ est décroissante et tend vers 0.
- **C** La suite $(u_n)_n$ est convergente vers 1.
- **D** $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq \dfrac{1}{2}$.

Q5 On considère l'équation différentielle $(E) : y'' - (1+m)y' + my = 0$.

- **A** Si $m = 1$ les solutions de (E) sont de la forme $y(t) = \alpha e^t + \beta e^{-t}$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.
- **B** Si $m \neq 1$ les solutions de (E) sont de la forme $y(t) = \alpha \cos t + \beta \sin(mt)$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.
- **C** Si $m = 1$ les solutions de (E) sont de la forme $y(t) = (\alpha t + \beta)e^t$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.
- **D** Si $m = 0$ les solutions de (E) sont de la forme $y(t) = (\alpha t + \beta)e^t$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

Q6 Soit $z = \left(1 + i\sqrt{3}\right)^5 + \left(1 - i\sqrt{3}\right)^5$ alors

- **A** $z = -32$
- **B** $z = 16e^{i\frac{5\pi}{3}}$
- **C** $z = 32$
- **D** $z = 64e^{i\frac{5\pi}{6}}$

Q7 On note $z_1, \ldots, z_n$ les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $z^n = 1$. On pose $S = z_1 + z_2 + \cdots + z_n$ et $P = z_1 z_2 \ldots z_n$, alors :

- **A** $S = 0$ et $P = (-1)^{n+1}$
- **B** $S = 0$ et $P = 1$
- **C** $S = 1$ et $P = (-1)^n$
- **D** $S = 1$ et $P = 0$

Q8 Pour $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, on pose $I_{n,m} = \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(nt)\cos(mt)\, dt$.

- **A** Si $m = n$, $I_{n,m} = \pi$.
- **B** Si $m \neq n$, $I_{n,m} = 2\pi$.
- **C** Si $m \neq n$, $I_{n,m} = 0$.
- **D** Si $m = n$, $I_{n,m} = 2\pi$.

Q9 Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $[a, b]$. Alors :

- **A** $\lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\, dt = b - a.$
- **B** $\lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\, dt = +\infty.$
- **C** $\lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\, dt = 0.$
- **D** La suite de terme général $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\, dt$ n'a pas de limite lorsque $n \to +\infty$.

Q10 Parmi les ensembles suivants lequel est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

- **A** $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 - y^2 = 0\}$
- **B** $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x \geq 0\}$
- **C** $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x - y + z = 1\}$
- **D** $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x - y + z = 0\}$

Q11 Soit a, b et c des réels et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors :

- **A** $A^n = \begin{pmatrix} a^n & b^n \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$
- **B** $A^n = \begin{pmatrix} a^n & nb^n \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$
- **C** $A^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$
- **D** $A^n = \begin{pmatrix} a^n & a^n b^n \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$

Q12 Deux augmentations successives de 10% du prix d'un produit donnent une augmentation de :

- **A** 20%
- **B** 12,1%
- **C** 21%
- **D** 10%

Q13 Une augmentation de 10% puis une baisse du prix d'un produit de 10% donne :

- **A** Un prix inchangé.
- **B** Une baisse de 1%.
- **C** Une augmentation de 1%.
- **D** Une variation de 10%.

Q14 Soit $A(2, 1)$, $B(-1, 2)$ et $M(3, 4)$ des points du plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Alors la distance d de M à la droite (AB) vaut :

- **A** $d = \sqrt{10}$
- **B** $d = 5$
- **C** $d = 10$
- **D** $d = \sqrt{5}$

Q15 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = \left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les points $A(1, 1, 0)$, $B(1, 2, 1)$, $C(3, -1, 2)$ alors :

- **A** A, B et C sont alignés
- **B** les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.
- **C** L'équation du plan contenant les points A, B et C est : $2x + y - z - 3 = 0$
- **D** Les droites (OA) et (BC) sont parallèles