ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES DE MARRAKECH · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année · ENSA Marrakech

Session du 8 août 2011

2011 — Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14	Q15
C	B	D	B	C	A	B	C	C	A	D	B	C	C	B

Q1 — Réponse C

- C : $\int_{-2}^{0} |x+1|\,dx = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$ (deux triangles) et $\int_{-2}^{0} \frac{4}{x-1}\,dx = 4\left[\ln|x-1|\right]_{-2}^{0} = 4(0-\ln 3)$. Total : $1-4\ln 3$. **Vraie.**
- B : $\cos^3 x = \cos x(1-\sin^2 x)$, primitive $\sin x - \frac{\sin^3 x}{3}$; l'intégrale vaut $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{8} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$, pas $\frac{3\sqrt{3}}{11}$.
- D : une primitive est $\frac{(2x-5)e^{2x+1}}{4}$, d'où $\frac{5}{4}e - \frac{1}{4}e^5$.
- A : une primitive est $(x-1)\ln(x-1) - x\ln x + 1$, d'où $-2\ln 2 + k\ln k - (k-1)\ln(k-1)$, différent de $-2\ln 2 + \ln(k-1)$ (par exemple pour $k=\frac{3}{2}$).

Q2 — Réponse B

Avec $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$:
$G'(x) = 2f(2x) - f(x) = \frac{2}{\sqrt{16x^4+4x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$.
$G'(x) \geq 0 \iff 4(x^4+x^2+1) \geq 16x^4 + 4x^2 + 1 \iff 3 \geq 12x^4 \iff |x| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$.
Donc G est croissante sur $\left[0;\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ (B) et décroissante ensuite (C fausse).
A : f est paire, donc G est impaire (et non nulle). D : pour $t \geq x > 0$, $f(t) \leq \frac{1}{t^2}$, donc $0 \leq G(x) \leq \int_x^{2x} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{2x} \to 0$.

Q3 — Réponse D

$2^{-t} = e^{-t\ln 2}$ a pour primitive $-\frac{2^{-t}}{\ln 2}$.
Valeur moyenne :

$$\frac{1}{T}\int_0^T y_0 2^{-t}\,dt = \frac{y_0}{T}\cdot\frac{1-2^{-T}}{\ln 2} = \frac{y_0}{T\ln 2}\left(1-2^{-T}\right).$$

C est l'intégrale elle-même, sans la division par T.

Q4 — Réponse B

f est définie pour $x \neq 0$ et $f(x) = x + \ln|1-e^x|$.
- Sur $]0;+\infty[$: $f(x) = x + \ln(e^x - 1)$, $f'(x) = 1 + \frac{e^x}{e^x-1} > 0$: B est vraie.
- Sur $]-\infty;0[$: $f'(x) = 1 - \frac{e^x}{1-e^x} = \frac{1-2e^x}{1-e^x}$, positive pour $x < -\ln 2$: A est fausse.
- C : $f(x) = x + \ln(1-e^x) \to -\infty$.
- D : $f(x) = 2x + \ln(1-e^{-x})$, l'asymptote est $y = 2x$.

Q5 — Réponse C

Pour $x > 0$: $y = \sqrt{2}\left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right)$, donc

$$y' = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x\sqrt{x}}\right) = \frac{\sqrt{2}\,(x-1)}{2x\sqrt{x}}.$$

$y' = 0 \iff x = 1$, et
$y(1) = \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$: point $(1;2\sqrt{2})$.

Q6 — Réponse A

- A : $\frac{x^2}{x-1} = x+1+\frac{1}{x-1}$ et $e^{\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$. Le produit vaut $x+1+1+o(1) = x+2+o(1)$: $y = x+2$ est asymptote. **Vraie.**
- Dérivée : $f'(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}\left(x^2-3x+1\right)}{(x-1)^2}$.
  Sur $]-\infty;0[$, $x^2-3x+1 > 0$: f est croissante (B fausse). Sur $\left]1;\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right[$, $x^2-3x+1 < 0$: f décroît (D fausse).
- C : f n'est pas définie en 1 mais l'est en -1 : elle ne peut pas être impaire.

Q7 — Réponse B

La contraposée de « $P \Longrightarrow Q$ » est « non $Q \Longrightarrow$ non P » ; les quantificateurs ne changent pas. Ici :
$\forall x,\ \forall y,\ f(x) \neq f(y) \Longrightarrow x \leq y$.

Q8 — Réponse C

Les $\forall$ deviennent $\exists$, et la négation de « $P \Longrightarrow Q$ » est « P et non Q ». La négation de $f(a) \geq f(b)$ est $f(a) < f(b)$.
On obtient : $\exists a,\ \exists b,\ a \leq b$ et $f(a) < f(b)$.

Q9 — Réponse C

Par récurrence, $u_n > 0$ pour tout n (si $u_n > 0$, alors $1+u_n > 1$ et $\ln(1+u_n) > 0$).
Pour $u > 0$, $\ln(1+u) < u$ (la fonction $u \mapsto u - \ln(1+u)$ est nulle en 0 et croissante). Donc $u_{n+1} < u_n$: la suite est (strictement) décroissante. A est fausse ($u_0 = 1$), D aussi ($u_1 = \ln 2 < 1$).

Q10 — Réponse A

$32 = 2^5$ et $\sqrt[6]{32} = 2^{\frac{5}{6}}$. Le système équivaut à $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} = 5$ et $x+y = \frac{5}{6}$.
$\frac{1}{x}+\frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy}$, donc $xy = \frac{5/6}{5} = \frac{1}{6}$. x et y sont les racines de $t^2 - \frac{5}{6}t + \frac{1}{6} = 0$, soit $6t^2 - 5t + 1 = 0$: $t = \frac{1}{2}$ ou $t = \frac{1}{3}$.
$S = \left\{\left(\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right);\left(\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right)\right\}$.

Q11 — Réponse D

$B = (x-1)(x-2)$: A est divisible par B si et seulement si $A(1) = 0$ et $A(2) = 0$, soit $1+a+b = 0$ et $8+2a+b = 0$. Par différence $7+a = 0$: $a = -7$, puis $b = 6$.
Vérification : $x^3 - 7x + 6 = (x-1)(x-2)(x+3)$.

Q12 — Réponse B

Les deux tirs sont indépendants. La cible n'est pas atteinte si les deux tireurs la manquent : $\frac{1}{5}\times\frac{1}{4} = \frac{1}{20}$. Donc $P(\text{cible atteinte}) = 1 - \frac{1}{20} = \frac{19}{20}$.

Q13 — Réponse C

$P(\text{blanche puis rouge}) = \frac{3}{y}\times\frac{y-3}{y-1} = \frac{1}{4} \iff 12(y-3) = y(y-1) \iff y^2 - 13y + 36 = 0 \iff (y-4)(y-9) = 0$.
Vérification : $y = 4$ donne $\frac{3}{4}\times\frac{1}{3} = \frac{1}{4}$; $y = 9$ donne $\frac{3}{9}\times\frac{6}{8} = \frac{1}{4}$.

Q14 — Réponse C

Un ensemble de 6 élèves a $2^6 = 64$ sous-ensembles ; on retire l'ensemble vide (au moins un élève) : $64 - 1 = 63$.

Q15 ✔ Réponse B

Chaque baisse multiplie le prix par $0{,}8$: au total $0{,}8^3 = 0{,}512$. Le prix a diminué de $1 - 0{,}512 = 0{,}488$, soit $48{,}8\ \%$.