ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES DE OUJDA · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année · ENSA Oujda

Session du mercredi 1er août 2012

2012

Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14
C	A	D	B	A	D	C	C	B	–	B	C	D	C

Q15	Q16	Q17	Q18	Q19	Q20
B	A	B	D	A	B

Q1 ✔ Réponse C

$$f'(x) = \frac{e^x+1}{e^x+x} - 1 = \frac{e^x+1-e^x-x}{e^x+x} = \frac{1-x}{e^x+x}.$$

Q2 ✔ Réponse A

Équation caractéristique : $r^2-5r+4=0$, soit $(r-1)(r-4)=0$. Deux racines réelles distinctes 1 et 4 : $y=\lambda e^t+\mu e^{4t}$.

Q3 ✔ Réponse D

On complète les carrés :

$$(x-t)^2-t^2+(y-\sin t)^2-\sin^2 t+(z+1)^2-1+t^2+\sin^2 t-1=0,$$

soit $(x-t)^2+(y-\sin t)^2+(z+1)^2=2$: sphère de centre $\Omega(t,\sin t,-1)$ et de rayon $\sqrt{2}$.

Q4 ✔ Réponse B

Vecteurs normaux : $\vec{n}(1,2,-1)$ et $\vec{n}'(-1,1,1)$. Ils ne sont pas colinéaires (plans sécants) et $\vec{n}\cdot\vec{n}' = -1+2-1=0$: les plans sont perpendiculaires.

Q5 ✔ Réponse A

Formule du binôme : $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k = (1-1)^n = 0$ pour $n \geq 1$.

Remarque : pour $n=0$, la somme se réduit à $C_0^0 = 1$.

Remarque : L'énoncé dit « n un entier naturel » : pour n = 0 la somme vaut 1 (proposition C), pour n ≥ 1 elle vaut 0 (proposition A, réponse visée). À trancher par le professeur (valider A ou retirer la question).

Q6 ✔ Réponse D

Soit G le barycentre de S (somme des poids $3+1+1+1=6$). Pour tout point M : $3\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=6\overrightarrow{MG}$. La condition devient $6MG=5$, soit $MG=\frac{5}{6}$: sphère de centre G et de rayon $\frac{5}{6}$.

Q7 ✔ Réponse C

2 racine donne le facteur $(x-2)$, -3 racine donne $(x+3)$. Le quotient de p (degré 3) par $(x-2)(x+3)$ (degré 2) est de degré 1 : $p(x)=(x-2)(x+3)(ax+b)$ avec $a\neq 0$. D serait de degré 4.

Q8 ✔ Réponse C

On factorise a^x :

$$\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = a\left(\frac{1+(b/a)^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

Comme $0<\frac{b}{a}<1$, $\frac{1+(b/a)^x}{2}\to\frac{1}{2}$, et $\frac{1}{x}\ln\frac{1+(b/a)^x}{2}\to 0$. La limite est $a\cdot e^0 = a$.

Q9 ✔ Réponse B

- $a-b=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{2}\geq 0$, donc $b\leq a$.
- $c^2-a^2=\frac{x^2+y^2}{2}-\frac{(x+y)^2}{4}=\frac{(x-y)^2}{4}\geq 0$, et $a,c>0$, donc $a\leq c$.

D'où $b\leq a\leq c$ (moyennes géométrique, arithmétique et quadratique).

Q10 ✔ Réponse –

Quand $x\to\frac{\pi}{2}^+$: $1+\cos x\to 1$ et $x\sin x\to\frac{\pi}{2}$, donc la limite vaut $\frac{2}{\pi}$.

Aucune proposition n'est juste (erreur du sujet).

Q11 ✔ Réponse B

$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$, donc la suite vaut $\frac{n+1}{2n}\to\frac{1}{2}$.

Q12 ✔ Réponse C

$\frac{1}{2}(\ln a+\ln b)=\ln\sqrt{ab}$ et $\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}$ (car $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geq 0$). La fonction ln étant croissante, $\ln\sqrt{ab}\leq\ln\frac{a+b}{2}$, avec égalité seulement si $a=b$: A et D sont fausses en général, B est toujours fausse.

Q13 ✔ Réponse D

Une primitive de $e^{-x}\cos x$ est $F(x)=\frac{e^{-x}(\sin x-\cos x)}{2}$ (on vérifie $F'(x)=e^{-x}\cos x$, ou on fait deux intégrations par parties). Donc

$$I=F(\pi)-F(0)=\frac{e^{-\pi}}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{e^{-\pi}+1}{2}.$$

Q14 ✔ Réponse C

Les tirages sont indépendants (avec remise) et à chaque tirage $P(\text{noire})=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$. Donc $P=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$. (D correspondrait à des tirages sans remise ; B est supérieur à 1.)

Q15 ✔ Réponse B

$\frac{z+i}{z+1}=\frac{z-z_B}{z-z_A}$ (défini pour $M\neq A$). Il vaut 0 en $M=B$; pour $M\neq A,B$ il est imaginaire pur si et seulement si $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})=\pm\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire si M voit $[AB]$ sous un angle droit.

L'ensemble est le cercle de diamètre $[AB]$ privé de A.

Q16 ✔ Réponse A

$p(A\cap B)=p(A)+p(B)-p(A\cup B)=0{,}6+0{,}3-0{,}8=0{,}1$.

- $p_A(B)=\frac{0{,}1}{0{,}6}=\frac{1}{6}$: A est vraie.
- $p_B(A)=\frac{0{,}1}{0{,}3}=\frac{1}{3}$; $p(A\cap B)=\frac{1}{10}$.
- $p(A)\,p(B)=0{,}18\neq 0{,}1$: pas indépendants.

Q17 ✔ Réponse B

$\frac{1}{1-2i}=\frac{1+2i}{5}$ et $\frac{1}{2+i}=\frac{2-i}{5}$. Donc $z_3=\frac{3+i}{5}=\frac{3}{5}+\frac{1}{5}i$.

Q18 ✔ Réponse D

$f(x)=2x-1+\frac{1}{\ln\sqrt{x}}$ et $\frac{1}{\ln\sqrt{x}}\to 0$ quand $x\to+\infty$: la droite $y=2x-1$ est asymptote oblique.

(La courbe a aussi l'asymptote verticale $x=1$, mais pas $x=2$, où f est définie.)

Q19 ✔ Réponse **A**

Les quantificateurs $\forall$ deviennent $\exists$ (sur le même ensemble I), et la négation de « $P \Longrightarrow Q$ » est « P et non Q ». On obtient : $\exists x \in I,\ \exists y \in I,\ f(x) = f(y)$ et $x \neq y$.

Q20 ✔ Réponse **B**

Une primitive de e^{2x} est $\frac{1}{2}e^{2x}$; une primitive de $(x+1)e^x$ est xe^x (dériver : $e^x + xe^x$). Donc $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - xe^x$ et

$$\begin{aligned}\int_{-4}^{0} f(x)\,dx &= F(0) - F(-4)\\ &= \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}e^{-8} + 4e^{-4}\right)\\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-8} - 4e^{-4}.\end{aligned}$$