ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES DE SAFI · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année · ENSA Safi

Session du mercredi 1er août 2012

2012 — Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10.1	Q10.2	Q10.3	Q11	Q12
A	C	B	A	B	B	D	B	A	C	B	C	A	D

Q13	Q14
C	D

Q1 ✔ Réponse A

Les solutions de $y' + 2y = 6$ sont $y(x) = Ce^{-2x} + 3$ (solution constante 3 plus solution de l'équation homogène). $y(0) = C + 3 = 1$ donne $C = -2$: $y(x) = -2e^{-2x} + 3$.

Q2 ✔ Réponse C

$z - (1 - 2i) = e^{i\theta}$, donc $|z - (1 - 2i)| = 1$; quand θ décrit $\mathbb{R}$, $e^{i\theta}$ décrit tout le cercle unité. (E) est le cercle de centre d'affixe $1 - 2i$ et de rayon 1.

Q3 ✔ Réponse B

Factorisation par l'angle moitié :

$$1 + e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}\right) = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}.$$

Q4 ✔ Réponse A

Pour $z \neq 1$ (c'est-à-dire $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$) : $1 + z + z^2 = \dfrac{z^3 - 1}{z - 1} = \dfrac{e^{3i\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1}$. Avec $e^{ia} - 1 = 2i\sin\left(\frac{a}{2}\right)e^{i\frac{a}{2}}$:

$$1 + z + z^2 = \frac{2i\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)e^{i\frac{3\theta}{2}}}{2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}} = \frac{\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}e^{i\theta}.$$

Q5 ✔ Réponse B

Intégration par parties avec $u = \ln x$, $v' = \dfrac{1}{x^2}$ $\left(v = -\dfrac{1}{x}\right)$:

$$I_n = \left[-\frac{\ln x}{x}\right]_1^n + \int_1^n \frac{dx}{x^2} = -\frac{\ln n}{n} + \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{\ln n}{n} - \frac{1}{n}.$$

Q6 ✔ Réponse B

Soit $K = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x}\,dx$. Le changement $x = \frac{\pi}{2} - t$ échange sin et cos, donc $J = K$. Et $J + K = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dx = \frac{\pi}{2}$. Donc $J = \dfrac{\pi}{4}$.

Q7 ✔ Réponse D

$u_n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$ et $n\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \dfrac{\ln(1+h)}{h} \to 1$ avec $h = \frac{1}{n} \to 0$. Donc $l = e^1 = e$.

Q8 ✔ Réponse B

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, donc $u_n = \dfrac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} \to \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$.

Q9 ✔ Réponse A

Nombre de tirages : $\binom{10}{3} = 120$. Tirages favorables : $\binom{7}{2} \times \binom{3}{1} = 21 \times 3 = 63$. Probabilité : $\dfrac{63}{120} = \dfrac{21}{40}$.

Q10.1 ✔ Réponse C

Quand $x \to 0$: $\sin^2 x \to 0$ et $\ln(1 + u) \sim u$, donc $\ln(1 + \sin^2 x) \sim \sin^2 x \sim x^2$. Ainsi $f(x) \sim \dfrac{x^2}{x} = x \to 0$. (La limite est égale à $f(0)$: f est continue en 0.)

Q10.2 ✔ Réponse B

Taux d'accroissement en 0 :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{\ln(1 + \sin^2 x)}{x^2} \sim \frac{\sin^2 x}{x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} 1.$$

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$.

Q10.3 ✔ Réponse C

$x \mapsto \ln(1 + \sin^2 x)$ est π-périodique, mais le facteur $\dfrac{1}{x}$ ne l'est pas : par exemple $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \dfrac{2\ln 2}{\pi}$ alors que $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \dfrac{2\ln 2}{3\pi}$. Plus généralement, $|f(x)| \leq \dfrac{\ln 2}{|x|} \to 0$ en $+\infty$: une fonction périodique qui tend vers 0 serait identiquement nulle, ce qui n'est pas le cas. f n'a pas de période.

Q11 ✔ Réponse A

$\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$, donc

$$\sin^4 x = \frac{1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x}{4} = \frac{1 - 2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}}{4} = \frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}.$$

Remarque : comme cos est paire, la proposition C est exactement la même expression que A.

Remarque : Les propositions A et C sont égales (cos(−4x) = cos 4x et cos(−2x) = cos 2x) : les deux sont justes, alors que le QCM n'accepte qu'une réponse. À trancher par le professeur (garder A comme réponse attendue ou retirer la question).

Q12 ✔ Réponse D

Avec la linéarisation $\sin^4 x = \dfrac{1}{8}\cos 4x - \dfrac{1}{2}\cos 2x + \dfrac{3}{8}$: les intégrales de $\cos 4x$ et de $\cos 2x$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ sont nulles ($\left[\frac{\sin 4x}{4}\right]$ et $\left[\frac{\sin 2x}{2}\right]$ valent 0 aux bornes). Il reste $\dfrac{3}{8} \times \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{3\pi}{16}$.

Q13 ✔ Réponse C

$1 + \cos x = 2\cos^2\dfrac{x}{2}$, donc $\dfrac{1}{1 + \cos x} = \dfrac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}$, dont une primitive est $\tan\dfrac{x}{2}$. L'intégrale vaut $\tan\dfrac{\pi}{4} - \tan 0 = 1$.

Q14 ✔ Réponse D

Les diagonales sont $[MP]$ et $[NQ]$. Avec $\vec{a} = \overrightarrow{MN}$ et $\vec{b} = \overrightarrow{MQ}$: $\overrightarrow{MP} = \vec{a} + \vec{b}$ et $\overrightarrow{QN} = \vec{a} - \vec{b}$, donc

$$MP^2 + NQ^2 = \|\vec{a} + \vec{b}\|^2 + \|\vec{a} - \vec{b}\|^2 = 2\left(\|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2\right) = 2(MN^2 + MQ^2).$$

D est vraie (identité du parallélogramme). A : la somme des poids est nulle, il n'y a pas de barycentre. B : $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QM} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QN} \neq \vec{0}$. C : $MQ^2 - PQ^2 = 4\,\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$, différent de $2\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{MQ}$ en général.