ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES DE TANGER · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'entrée en 1re année du cycle préparatoire · ENSA Tanger

Session du 24 juillet 2009

2009 — Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14
B	B	C	A	B	C	B	A	C	–	–	B	A	B

Q15	Q16	Q17	Q18	Q19	Q20	Q21	Q22	Q23	Q24	Q25
A	C	A	C	A	A	B	C	A	B	B

Q1 ✔ Réponse B

Les termes de -22 à 22 ont une somme nulle ; il reste $23+24+25=72$: $x=25$.

Q2 ✔ Réponse B

$\left|\dfrac{(-1)^n e^n}{\pi^{n+1}}\right| = \dfrac{1}{\pi}\left(\dfrac{e}{\pi}\right)^n \to 0$ car $e<\pi$.

Q3 ✔ Réponse C

$$x_n = \frac{1}{e}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{e}\right)^k \to \frac{1}{e}\cdot\frac{2/e}{1-2/e} = \frac{2}{e(e-2)}.$$

Q4 ✔ Réponse A

Le côté est multiplié par $\frac{1}{\sqrt{2}}$ à chaque étape :

$$\sum_{i\geq 0} 4a\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^i = \frac{4a\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = 4a\left(2+\sqrt{2}\right).$$

Q5 ✔ Réponse B

$\dfrac{1}{p^2-1} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p-1}-\dfrac{1}{p+1}\right)$: somme télescopique de limite $\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{4}$.

Q6 ✔ Réponse C

$0<u_n\leq u_0 k^n$: (u_n) est bornée et tend vers 0, et (v_n) est croissante majorée par $\dfrac{u_0}{1-k}$, donc convergente.

Q7 ✔ Réponse B

Avec $t=\tan x$: $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dt}{9+t^2} = \frac{1}{3}\arctan\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{18}$.

Q8 ✔ Réponse A

$\arctan \pi x \sim \pi x$: la limite vaut π.

Q9 ✔ Réponse C

$\sin^2 3x \sim 9x^2$: la limite vaut $\dfrac{9}{3}=3$.

Q10 ✔ Réponse –

C'est la valeur de l'intégrande en $\frac{\pi}{4}$: $\dfrac{1}{\tan\frac{\pi}{4}}=1$. Aucune proposition n'est juste (erreur du sujet).

Q11 ✔ Réponse –

Le numérateur est d'ordre x et le dénominateur $\sim \dfrac{\pi^2 x^2}{2}$: le quotient tend vers $\pm\infty$ (pas de limite finie). Aucune proposition n'est juste (erreur du sujet).

Q12 ✔ Réponse B

$x^2+6x+12=(x+3)^2+3$:

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\arctan\frac{x+3}{\sqrt{3}}\right]_{-2}^{0} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi\sqrt{3}}{18}.$$

Q13 ✔ Réponse A

$$\int_1^{e^2}\frac{dx}{x(1+\ln x)} = \left[\ln(1+\ln x)\right]_1^{e^2} = \ln 3.$$

Q14 ✔ Réponse B

$$u_n = \left[-\frac{1}{2(\ln x)^2}\right]_e^n = \frac{1}{2}-\frac{1}{2(\ln n)^2}\to\frac{1}{2}.$$

Q15 ✔ Réponse A

$g(1)=0$ et $g'(x)=2xe^{x^4}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}e^x$, $g'(1)=2e-\dfrac{e}{2}=\dfrac{3e}{2}$.

Q16 ✔ Réponse C

Avec $u=\sqrt{x}$: $\displaystyle\int 2\tan u\,du = -2\ln(\cos u) = \ln\frac{1}{\cos^2\sqrt{x}}$.

Q17 ✔ Réponse A

$\dfrac{n}{3n-1}\to\dfrac{1}{3}<1$ et l'exposant tend vers $+\infty$: la limite est 0.

Q18 ✔ Réponse C

E : déterminant $-2\neq 0$; S : diagonale ; A : déterminant $1\neq 0$. N est liée ($i+j+k=i+(j+k)$).

Q19 ✔ Réponse A

S est un plan (dimension 2) ; $(1,0,1)$ et $(0,1,2)$ vérifient $x+2y-z=0$ et sont libres. (L'énoncé écrit E pour S.)

Q20 ✔ Réponse A

E et A sont définis par des équations linéaires homogènes ; N et S ne contiennent pas 0.

Q21 ✔ Réponse B

$A(A-I_n)=3I_n$: A est inversible et $A^{-1}=\dfrac{1}{3}(A-I_n)$.

Q22 ✔ Réponse C

$A(A - I_n) = I_n$, donc $\det A \det(A - I_n) = 1$.

Q23 ✔ Réponse A

On ajoute 1 à chacun des n termes diagonaux : $\mathrm{Tr}(A) + n$.

Q24 ✔ Réponse B

$h(x) = \ln(1 + x^2) + \dfrac{2x^2}{1 + x^2}$, donc $h(1) = \ln 2 + 1$.

Q25 ✔ Réponse B

$\left(\dfrac{x}{2}(\sin \ln x - \cos \ln x)\right)' =$
$\dfrac{1}{2}(\sin \ln x - \cos \ln x) + \dfrac{1}{2}(\cos \ln x + \sin \ln x) = \sin \ln x.$