ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES DE TANGER · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'entrée en 1re année du cycle préparatoire · ENSA Tanger

Session du 24 juillet 2009

2009 — Énoncé

Q1 Soit L une liste d'entiers relatifs **consécutifs** dont le premier terme est -22 et le dernier terme est noté par x. $L = \{-22, \ldots, x\}$. Si la somme de tous les éléments de L est égale à 72 alors $x =$

A -72 B 25 C 22

Q2 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n e^n}{\pi^{n+1}} =$

A $\dfrac{1}{\pi}$ B 0 C n'existe pas

Q3 Soit $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{2^k}{e^{k+1}}$; alors $\lim\limits_{n\to\infty} x_n =$

A $+\infty$ B $\dfrac{1}{e-2}$ C $\dfrac{2}{e(e-2)}$

Q4 On considère un carré C_0 dont les côtés mesurent a cm. Soit C_1 le carré inscrit dans C_0 dont les sommets sont les milieux des côtés de C_0. Nous procédons de la même manière et nous formons une famille infinie de carrés (C_i) tel que C_{i+1} est le carré inscrit dans C_i dont les sommets sont les milieux des côtés de C_i. **La somme totale des périmètres des carrés C_i est égale à**

A $4a\left(2+\sqrt{2}\right)$ B $4a\left(1+\sqrt{2}\right)$ C $4a$

Q5 Soit $w_n = \sum\limits_{p=2}^{n} \dfrac{1}{p^2-1}$; alors $\lim\limits_{n\to\infty} w_n =$

A $\dfrac{3}{2}$ B $\dfrac{3}{4}$ C $+\infty$

Q6 Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite numérique à termes strictement positifs ($u_n > 0$) vérifiant $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq k$, $\forall n \in \mathbb{N}$ avec k une constante strictement inférieure à 1 ($k < 1$). On définit la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ par $v_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$. On considère les assertions suivantes :
(I) $(u_n)_n$ est bornée
(II) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$
(III) $(v_n)_{n\geq 0}$ est convergente
Laquelle (lesquelles) des assertions est (sont) vraie(s) ?

A Seulement I
B Seulement I et II
C I, II et III

Q7 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{(9+\tan^2 x)\cos^2 x}\,dx$

A $\dfrac{\pi}{9}$ B $\dfrac{\pi}{18}$ C $\dfrac{1}{3}\arctan\dfrac{1}{3}$

Q8 $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\arctan \pi x}{x} =$

A π B 1 C 0

Q9 $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin^2 3x}{3x^2} =$

A 1 B $\dfrac{1}{3}$ C 3

Q10 $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{h} \displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}+h} \frac{1}{\tan x}\,dx =$

A $\dfrac{\pi\sqrt{2}}{2}$ B $\sqrt{2}$ C 0

Q11 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{\pi}x}{1-\cos \pi x} =$

A $\sqrt{\pi}$ B $\dfrac{\sqrt{\pi}}{\pi}$ C 0

Q12 $\displaystyle\int_{-2}^{0} \frac{dx}{x^2+6x+12}$

A $\dfrac{\pi}{6}$ B $\dfrac{\pi\sqrt{3}}{18}$ C $\dfrac{1}{6}$

Q13 La surface formée par la courbe de $f(x) = \dfrac{1}{x(1+\ln x)}$ et par les droites $x = 1$ et $x = e^2$ est égale à

A $\ln 3$ B $\ln\left(e^2+1\right) - \ln 2$ C $e^2 - 1$

Q14 Soit $(u_n)_{n\geq 3}$ la suite définie par $u_n = \displaystyle\int_e^n \frac{1}{x(\ln x)^3}\,dx$. Alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n =$

A $+\infty$ B $\dfrac{1}{2}$ C $\dfrac{1}{2e^2}$

Q15 Soit $g(x) = \displaystyle\int_{\sqrt{x}}^{x^2} e^{u^2}\,du$, alors la tangente à la courbe de g en $x = 1$ admet pour équation

A $y = \dfrac{3e}{2}(x-1)$
B $y = ex - (e+1)$
C Les données sont insuffisantes pour la déterminer

Q16 $\displaystyle\int \frac{\tan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = (K \text{ une constante})$

A $\ln\left(\dfrac{1}{\cos^2 x}\right) + K$
B $-\ln\left(\cos\sqrt{x}\right) + K$
C $\ln\left(\dfrac{1}{\cos^2\sqrt{x}}\right) + K$

Q17 $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n}{3n-1}\right)^{2n-1} =$

A 0 B $\dfrac{1}{3}$ C $+\infty$

Q18 Soit $B = \{i, j, k\}$ une base de $(\mathbb{R}^3, +, .)$. On considère les familles suivantes
$E = \{i+j, i+k, j+k\}$;
$N = \{i, j+k, i+j+k\}$;
$S = \{i, 2j, 3k\}$ et $A = \{i, 2j-k, j\}$.
Alors laquelle (ou lesquelles) des familles forme une base ?

A Aucune
B Seulement S
C Seulement E, S et A

Q19 Soit $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + 2y - z = 0\}$. Lequel des systèmes suivants forme une base pour S ?

A $\{(1,0,1); (0,1,2)\}$
B $\{(0,1,2); (1,0,2); (1,2,0)\}$
C $\{(0,1,2)\}$

Q20 On considère les ensembles suivants
$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / y = 0\}$;
$N = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 1\}$;
$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = 2\}$ et
$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\}$. Lesquels parmi ces ensembles sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?

A Seulement E et A
B Seulement N et S
C Tous (E, N, S et A)

Q21 Soit A une matrice carrée d'ordre n vérifiant $A^2 = A + 3I_n$ (I_n est la matrice identité). On considère les égalités suivantes
(I) $\det A = 0$ (II) $A^{-1} = 3I_n - A$
(III) $\det A \neq 0$ (IV) $A^{-1} = \dfrac{1}{3}(A - I_n)$
Alors

A (II) et (III) sont vraies
B (III) et (IV) sont vraies
C (I) et (IV) sont vraies

Q22 Soit A une matrice carrée d'ordre n vérifiant $A^2 - A - I_n = 0_n$ (I_n est la matrice identité et 0_n est la matrice nulle). Alors $\det(A - I_n) =$

A $\det(A) - 1$ B $\sqrt{\det(A)}$ C $\dfrac{1}{\det(A)}$

Q23 Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice carrée d'ordre n. On appelle la trace de A notée par $\mathrm{Tr}(A)$ le nombre $\mathrm{Tr}(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}$.
Alors $\mathrm{Tr}(A + I_n) =$

A $\mathrm{Tr}(A) + n$ B $n\,\mathrm{Tr}(A)$ C $\mathrm{Tr}(A) + 1$

Q24 Si $\displaystyle\int_0^x h(t)\,dt = x\ln\left(1+x^2\right)$ alors $h(1) =$

A $\ln 2$
B $1 + \ln 2$
C Les données sont insuffisantes

Q25 $\displaystyle\int \sin(\ln x)\,dx = (K \text{ une constante})$

A $\dfrac{e^x}{2}[\sin x - \cos x] + K$
B $\dfrac{x}{2}[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] + K$
C $\dfrac{\cos(\ln x)}{x} + K$