ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES DE TANGER · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'entrée en 1re année du cycle préparatoire · ENSA Tanger

Tanger, le 23/07/2010

2010 — Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14
C	A	C	C	–	C	A	B	B	B	A	B	B	A

Q15	Q16	Q17	Q18	Q19	Q20	Q21	Q22	Q23	Q24	Q25
B	C	A	–	B	B	A	–	C	B	B

Q1 ✔ Réponse C

$S(m) = \int_m^{2m} \frac{dx}{x} = \ln(2m) - \ln m = \ln 2$: constante.

Q2 ✔ Réponse A

$\ln\left(1+\frac{h}{\pi}\right) \sim \frac{h}{\pi}$: la limite vaut $\frac{1}{\pi}$.

Q3 ✔ Réponse C

Le produit vaut $3^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\cdots}$ et la somme géométrique tend vers $\frac{1/3}{1-1/2} = \frac{2}{3}$: limite $3^{2/3} = \sqrt[3]{9}$.

Q4 ✔ Réponse C

$f(x) = e^{(\ln x)^2}$, $f(e) = e$ et $f'(x) = \frac{2\ln x}{x} f(x)$, $f'(e) = 2$.
Tangente : $y = 2(x-e)+e = 2x-e$.

Q5 ✔ Réponse –

La somme dépend des termes $x_1, \ldots, x_{n-1}$, que l'énoncé ne donne pas : elle ne peut pas être calculée (erreur du sujet). B correspond au cas où (x_n) est arithmétique de raison $\frac{1}{2}$ ($x_n = 1 + \frac{n}{2}$).

Q6 ✔ Réponse C

$0 < u_n \leq M^n$ avec $0 \leq M < 1$: (u_n) est bornée et tend vers 0, et (w_n) est croissante majorée par $\frac{1}{1-M}$, donc convergente.

Q7 ✔ Réponse A

$f'(x) = (2x-3)e^{(x^2-3x)^2}$ change de signe de $-$ à $+$ en $x = \frac{3}{2}$: minimum.

Q8 ✔ Réponse B

$f'(1) = \frac{1}{\sqrt{1+2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \neq \frac{1}{2\sqrt{3}}$. ($f(0) = 0$ et $f(1) > 0$ sont vraies.)

Q9 ✔ Réponse B

$e^{2x} - 1 \sim 2x$ et $\tan x \sim x$: la limite vaut 2.

Q10 ✔ Réponse B

$\int_1^x e^{u^2} du \sim e(x-1)$ et $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$: la limite vaut $\frac{e}{2}$.

Q11 ✔ Réponse A

$f' = ee^{2x}$, donc $f = \frac{e}{2}e^{2x} + c$ et $f(0) = e$ donne $c = \frac{e}{2}$.
$f(1) = \frac{e}{2}\left(e^2+1\right)$.

Q12 ✔ Réponse B

Une primitive est $x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x$:

$$\int_1^2 (\ln x)^2 dx = 2(\ln 2)^2 - 4\ln 2 + 2 = 2(1-\ln 2)^2.$$

Q13 ✔ Réponse B

$h'(x) = 3x^2 g\left(x^3\right)$, puis $h''(x) = 6xg\left(x^3\right) + 3x^2 \cdot 3x^2 f\left(x^6\right)$.

Q14 ✔ Réponse A

$v_n = \left[-\frac{1}{2(1+x^2)}\right]_1^n = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(1+n^2)} \to \frac{1}{4}$.

Q15 ✔ Réponse B

$H'(x) = \frac{e^x}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\ln x}} = \frac{e^x}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{2x\ln x}}$.

Q16 ✔ Réponse C

$(2h - 2\arctan h)' = 2h'\left(1 - \frac{1}{1+h^2}\right) = \frac{2h'h^2}{e^x}$ avec $h' = \frac{e^x}{2h}$: on obtient h.

Q17 ✔ Réponse A

$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\varphi)$: amplitude $\sqrt{a^2+b^2}$.

Q18 ✔ Réponse –

A : $(u+w)-(v+w) = u-v$, famille liée. B et D sont liées. Seule C (triangulaire) est une base. Aucune proposition n'est juste (erreur du sujet).

Q19 ✔ Réponse B

F : $x = 3z$, de dimension 2 ; $(3,0,1)$ et $(0,1,0)$ sont dans F et libres.

Q20 ✔ Réponse B

A et D sont définis par des équations linéaires homogènes. B ne contient pas 0 et C ($y = xz$) n'est pas stable par somme.

Q21 ✔ Réponse A

Deux équations indépendantes dans $\mathbb{R}^3$: $\dim w = 1$ (droite dirigée par $(1,2,3)$).

Q22 ✔ Réponse –

$B = I_n - A^2$ et $A(I_n - A^2) = -I_n$, d'où $B^{-1} = -A$: (I) est fausse. $I_n - A$ et $I_n + A$ commutent, donc (II) et (III) sont vraies toutes les deux. Aucune proposition n'est exacte.

Q23 ✔ Réponse C

$(I_n - BA)\left(I_n + B(I_n - AB)^{-1}A\right) =$
$I_n - BA + B(I_n - AB)(I_n - AB)^{-1}A = I_n.$

Q24 ✔ Réponse B

$g' \leq 0$ donne $G'(x) = xg'(x) \leq 0$: G est décroissante, B est fausse. A ($tg' \leq 0$) et C (intégration par parties) sont vraies.

Q25 ✔ Réponse B

$$\left(\ln\left|\tan x + \frac{1}{\cos x}\right|\right)' = \frac{\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\sin x}{\cos^2 x}}{\frac{\sin x + 1}{\cos x}} = \frac{1}{\cos x}.$$