ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES DE TANGER · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'entrée en 1re année du cycle préparatoire · ENSA Tanger

2010

Énoncé

Tanger, le 23/07/2010

Q1 Soit $S(m)$ la fonction qui associe à chaque réel m strictement positif, la surface délimitée par le graphe $y = \frac{1}{x}$ et les droites $x = m$ et $x = 2m$ alors

A $S(m)$ est strictement croissante
B $S(m)$ est strictement décroissante
C $S(m)$ est une fonction constante

Q2 $\lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{h} \ln\left(1 + \frac{h}{\pi}\right) =$

A $\frac{1}{\pi}$ B 0 C n'existe pas

Q3 $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{3}\right)\left(\sqrt[6]{3}\right)\left(\sqrt[12]{3}\right)\ldots\left(\sqrt[3\cdot 2^n]{3}\right) =$

A $\sqrt[3]{6}$ B 1 C $\sqrt[3]{9}$

Q4 Soit $f(x) = x^{\ln x}$. La tangente à la courbe de f au point $x = e$ est donnée par

A $y = e(x - e)$ B $y = x$ C $y = 2x - e$

Q5 Soit $(x_n)_n$ une suite numérique telle que $x_0 = 1$. Alors : $\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_{i-1} + \frac{1}{2}\right) =$

A $\frac{3n}{2}$ B $\frac{n^2+5n}{4}$ C $\frac{2n-1}{4}$

Q6 Soit $(u_n)_n$ une suite numérique à termes strictement positifs vérifiant $(u_n)^{\frac{1}{n}} \leq M$; $\forall n \in \mathbb{N}$ tel que $M < 1$. On définit la suite $(w_n)_n$ par $w_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$. On considère les assertions suivantes :
(I) $(w_n)_n$ est convergente
(II) $(u_n)_n$ est bornée
(III) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$
Laquelle (lesquelles) des assertions est (sont) VRAIE(S) ?

A Seulement II
B Seulement II et III
C I, II et III.

Q7 Pour quelle valeur de x, la fonction définie par $f(x) = \int_{-2}^{x^2-3x} e^{t^2}\,dt$ prend une valeur minimale

A $\frac{3}{2}$ B -2 C 2

Q8 Soit $f(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t^3+2}}\,dt$. Laquelle parmi ces trois assertions est FAUSSE ?

A $f(0) = 0$
B $f'(1) = \frac{1}{2\sqrt{3}}$
C $f(1) > 0$

Q9 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{\tan x} =$

A N'existe pas B 2 C 0

Q10 $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{x^2-1}\int_1^x e^{u^2}\,du =$

A 0 B $\frac{e}{2}$ C N'existe pas

Q11 Soit f une fonction deux fois dérivable telle que $f''(x) = 2f'(x)$ avec $f'(0) = f(0) = e$. Alors $f(1) =$

A $\frac{e}{2}(e^2+1)$ B $2e$ C $\frac{e^3}{2}$

Q12 $\int_1^2 (\ln x)^2\,dx$

A $\frac{(\ln 2)^3}{3}$ B $2(1-\ln 2)^2$ C $\frac{8}{3}$

Q13 Soient f, g et h trois fonctions telles que : $\begin{cases} h(x) = f(x^3) \\ f'(x) = g(x) \\ g'(x) = f(x^2) \end{cases}$ Alors $h''(x) =$

A $3x^2 g(x^3)$
B $6xg(x^3) + 9x^4 f(x^6)$
C $3x^2 g(x^3) + 6x^3 f(x^5)$

Q14 Soit $(v_n)_{n\geq 3}$ la suite définie par $v_n = \int_1^n \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx$. Alors $\lim\limits_{n\to\infty} v_n =$

A $\frac{1}{4}$ B $\frac{1}{2}$ C $+\infty$

Q15 Soit $H(x) = \int_{\sqrt{x}}^{e^x} \frac{1}{\sqrt{\ln t}}\,dt$, alors $H'(x) =$

A $\frac{1}{\sqrt{\ln x}}$
B $\frac{e^x}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{2x\ln x}}$
C $\frac{e^x}{\sqrt{\ln x}} - \sqrt{\frac{x}{\ln x}}$

Q16 Soit $h(x) = \sqrt{e^x - 1}$. Une primitive de $h(x)$ est donnée par

A $2(x - \arctan x)$
B $\sin\sqrt{h(x)}$
C $2h(x) - 2\arctan h(x)$

Q17 La fonction $f(x) = a\cos x + b\sin x$ admet comme amplitude le nombre

A $\sqrt{a^2+b^2}$ B $a+b$ C $\frac{a+b}{2}$

Q18 Soit $B = \{u, v, w\}$ une base de $(\mathbb{R}^3, +, .)$. On considère les familles suivantes
$A = \{u - v, u + w, v + w\}$;
$B = \{u, v - 2u, v\}$;
$C = \{u + v + w, v + w, w\}$ et
$D = \{v + w, -v, -w\}$.
Alors laquelle (ou lesquelles) des familles forme une base ?

A Seulement B
B Seulement A et C
C Seulement A et D

Q19 Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - 3z = 0\}$. Lequel des systèmes suivants forme une base pour F ?

A $\{(3, 0, 1)\}$
B $\{(3, 0, 1); (0, 1, 0)\}$
C $\{(3, 0, 1); (1, 0, 3); (0, 1, 3)\}$

Q20 On considère les ensembles suivants
$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = 0\}$;
$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 - 2y + z = 1\}$;
$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / xz - y = 0\}$ et
$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + z = 0\}$. Lesquels parmi ces ensembles sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?

A Seulement A et C
B Seulement A et D
C Seulement A, C et D

Q21 Soit $w = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - z = 0 \text{ et } 2x - y = 0\}$

A $\dim w = 1$
B $\dim w = 2$
C $\dim w = 3$

Q22 Soit A une matrice carrée d'ordre n vérifiant $A^3 - A = -I_n$. Soit $B = (I_n - A)(I_n + A)$. On considère les égalités suivantes
(I) $B^{-1} = A$
(II) $B^{-1} = (I_n - A)^{-1}(I_n + A)^{-1}$
(III) $B^{-1} = (I_n + A)^{-1}(I_n - A)^{-1}$
Parmi lesquelles ou laquelle de ces égalités est VRAIE ?

A (I) et (III)
B Seulement (II)
C Seulement (III)

Q23 Soient A, B deux matrices carrées d'ordre n, telles que $I_n - AB$ est inversible. Alors $(I_n - BA)^{-1} =$

A $(I_n - AB)^{-1}$
B $B(I_n - AB)^{-1}A$
C $I_n + B(I_n - AB)^{-1}A$

Q24 Soit g une fonction décroissante sur $]0, +\infty[$ et $G(x) = \int_0^x tg'(t)\,dt$ définie sur $]0, +\infty[$. Laquelle parmi ces trois assertions est FAUSSE ?

A $G(x) \leq 0$ pour tout $x > 0$
B G est croissante sur $]0, +\infty[$
C $G(x) = xg(x) - \int_0^x g(t)\,dt$

Q25 $\int \frac{1}{\cos x}\,dx = (K \text{ une constante})$

A $\ln(|\cos x|) + K$
B $\ln\left(\left|\tan x + \frac{1}{\cos x}\right|\right) + K$
C $\ln\left|\frac{1}{\sin x}\right| + K$