ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES DE TANGER · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'entrée en 1re année du cycle préparatoire · ENSA Tanger

Tanger, le 08/08/2011

2011

Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14
B	A	A	A	BC	–	A	A	A	C	A	B	A	A

Q15	Q16	Q17	Q18	Q19	Q20	Q21	Q22	Q23	Q24	Q25
A	–	B	B	A	C	C	A	C	A	C

Q1 ✔ Réponse **B**

$w = z_1 z_2$ vérifie $|w| = 1$ et $|w+2| = 1$: w est sur le cercle unité et sur le cercle de centre -2 et de rayon 1, dont le seul point commun est -1.

Q2 ✔ Réponse **A**

$A = I + N$ avec $N^2 = 0$: $A^n = I + nN = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Q3 ✔ Réponse **A**

Pour $n = 1$, A donne $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ (B et C non). On vérifie par récurrence que la formule A est stable par multiplication par A (valeurs propres 1 et 2).

Q4 ✔ Réponse **A**

$|a| = 1$ donne $\overline{a}a = 1$ et $1 - \overline{a}b = \overline{a}(a-b)$, donc le quotient a pour module $\dfrac{1}{|\overline{a}|} = 1$.

Q5 ✔ Réponse **BC**

$|ab+bc+ca| = |abc|\left|\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right| = |\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}|$ car $\dfrac{1}{a} = \overline{a}$.

Comme un nombre et son conjugué ont même module, c'est aussi $|a+b+c|$: B et C sont justes.

Q6 ✔ Réponse –

$\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e$, donc la somme à partir de $k = 1$ vaut $e - 1$. Aucune proposition n'est juste (erreur du sujet).

Q7 ✔ Réponse **A**

Taux d'accroissement : $\tan'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$ et $(2\cos)'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$. La limite vaut $\dfrac{2}{-\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$.

Q8 ✔ Réponse **A**

Avec $h = x - \frac{\pi}{2}$: $\operatorname{cotan} x = -\tan h \sim -h$. La limite vaut -1.

Q9 ✔ Réponse **A**

C'est la dérivée de x^4 en 3 : $4 \times 27 = 108$.

Q10 ✔ Réponse **C**

Croissances comparées : $x^2 \ln x \to 0$.

Q11 ✔ Réponse **A**

e^x l'emporte sur x^2 : la limite est 0.

Q12 ✔ Réponse **B**

$n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \to 1$: la limite est e.

Q13 ✔ Réponse **A**

Formule d'addition : $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$.

Q14 ✔ Réponse **A**

On remplace b par $-b$: $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$.

Q15 ✔ Réponse **A**

$(\arctan u)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$ avec $u = 3x^2$: $\dfrac{6x}{1+9x^4}$.

Q16 ✔ Réponse –

$\dfrac{y'}{y} = \dfrac{4x}{x^2+2} - \dfrac{12x^2}{1-x^3}$, d'où

$$y' = 4x(x^2+2)(1-x^3)^3\left(1 - 6x - 4x^3\right).$$

Aucune proposition n'est juste (erreur du sujet).

Q17 ✔ Réponse **B**

$f(x) = 2(1-x)^{-1}$, $f'(x) = 2(1-x)^{-2}$, $f''(x) = 2 \cdot 2(1-x)^{-3}\ldots$ Par récurrence $f^{(n)}(x) = 2\,n!\,(1-x)^{-(n+1)}$.

Q18 ✔ Réponse **B**

En dérivant : $y + xy' + 1 - 2y' = 0$, d'où $y'(2-x) = 1 + y$ et $y' = \dfrac{1+y}{2-x}$.

Q19 ✔ Réponse **A**

$\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$: $I = \dfrac{x}{2} - \dfrac{\sin 2x}{4} + C$.

Q20 ✔ Réponse **C**

$\dfrac{1}{x^2-4} = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x+2}\right)$: $I = \dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{x-2}{x+2}\right| + C$.

Q21 ✔ Réponse **C**

$1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Q22 ✔ Réponse **A**

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (vérifier avec $n = 1$: 1).

Q23 ✔ Réponse C

$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ (vérifier avec $n = 2 : 9$).

Q24 ✔ Réponse A

La courbe et la droite se coupent en 0 ; sur $[0, 3]$, $x^2 \geq -\frac{x}{2}$:

$$\mathcal{A} = \int_0^3 \left(x^2 + \frac{x}{2}\right) dx = 9 + \frac{9}{4} = \frac{45}{4}.$$

Q25 ✔ Réponse C

$e \approx 2{,}71828$.