ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES DE TANGER · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année · ENSA Tanger

Édition 2012

2012

Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14
A	B	B	B	C	B	A	C	B	A	B	A	C	–

Q15	Q16	Q17	Q18	Q19	Q20	Q21	Q22	Q23	Q24	Q25
A	B	A	C	B	A	B	B	B	C	A

Q1 ✔ Réponse A

Avec n termes $-15, -14, \dots, n-16$ (suite arithmétique de raison 1) :

$$S = \frac{n\,(-15 + (n-16))}{2} = \frac{n(n-31)}{2}.$$

$S = 51 \iff n^2 - 31n - 102 = 0$.
Discriminant : $961 + 408 = 1369 = 37^2$, donc $n = \dfrac{31+37}{2} = 34$ (l'autre racine est négative).
Vérification : la liste va de -15 à 18 ; les termes de -15 à 15 s'annulent et il reste $16 + 17 + 18 = 51$.

Q2 ✔ Réponse B

$\dfrac{(-1)^n 3^{n+1}}{\pi^n} = 3\left(-\dfrac{3}{\pi}\right)^n$ et $\left|-\dfrac{3}{\pi}\right| < 1$ car $3 < \pi$. La suite géométrique tend vers 0.

Q3 ✔ Réponse B

$Z_n = \dfrac{1}{\pi^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{e}{\pi}\right)^{k-1}$: somme géométrique de raison $\dfrac{e}{\pi} \in]0,1[$. Donc

$$\lim_{n\to\infty} Z_n = \frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{e}{\pi}} = \frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{\pi}{\pi-e} = \frac{1}{\pi(\pi-e)}.$$

Q4 ✔ Réponse B

Une diminution de 10 % multiplie la production par $1 - 0{,}1 = 0{,}9$, puis on ajoute les 150 mixeurs de la commande : $t_{n+1} = 0{,}9\,t_n + 150$.

Q5 ✔ Réponse C

La suite arithmético-géométrique converge (coefficient 0,9 de valeur absolue < 1) vers le point fixe P :

$$\begin{aligned} P &= 0{,}9\,P + 150 \\ &\iff 0{,}1\,P = 150 \\ &\iff P = 1500. \end{aligned}$$

En effet $t_n - 1500 = 0{,}9^n\,(t_0 - 1500) \to 0$.

Q6 ✔ Réponse B

Comme le rapport tend vers $\frac{1}{2} < \frac{3}{4}$, il existe un rang N tel que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \le \dfrac{3}{4}$ pour $n \ge N$. Alors $0 < u_n \le \left(\frac{3}{4}\right)^{n-N} u_N$ pour $n \ge N$, et le majorant tend vers 0. Donc $L = 0$.

Q7 ✔ Réponse A

Avec $a_p = 2^{\frac{1}{2p-1}}$, on a $2^{\frac{1}{2p+1}} = a_{p+1}$: la somme télescope.

$$\begin{aligned} T_n &= a_1 - a_{n+1} \\ &= 2^1 - 2^{\frac{1}{2n+1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 2 - 2^0 = 1. \end{aligned}$$

Q8 ✔ Réponse C

Le rectangle a pour base $2x$ et pour hauteur $f(x) = e^{-x^2}$: $S(x) = 2x\,e^{-x^2}$.
$S'(x) = 2e^{-x^2}(1 - 2x^2)$ s'annule en $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (S croît avant, décroît après). Le maximum vaut

$$S\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2}{\sqrt{2}}\,e^{-1/2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{e}} = \sqrt{\frac{2}{e}}.$$

Q9 ✔ Réponse B

Quand $x \to 0^+$: $\sin \pi x \sim \pi x$ et, avec $u = \sqrt{\pi x} \to 0$, $1 - \cos u \sim \dfrac{u^2}{2} = \dfrac{\pi x}{2}$. Le quotient tend vers $\dfrac{\pi x}{\pi x/2} = 2$.

Q10 ✔ Réponse A

Si F est une primitive de $f(x) = \dfrac{1}{(\ln x)^2}$ (continue près de e), la quantité vaut $\dfrac{F(e+h) - F(e)}{h} \to F'(e) = f(e) = \dfrac{1}{(\ln e)^2} = 1$.

Q11 ✔ Réponse B

Le changement de variable $x = \frac{\pi}{2} - t$ échange sin et cos :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\frac{1+\cos t}{1+\sin t}\,dt = -I.$$

Donc $I = 0$.

Q12 ✔ Réponse A

$4x^2 + 4x + 5 = (2x+1)^2 + 4$. Une primitive est $\dfrac{1}{4}\arctan\dfrac{2x+1}{2}$ (dériver pour vérifier). Donc

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{4x^2+4x+5} &= \frac{1}{4}\,(\arctan 1 - \arctan 0) \\ &= \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{16}. \end{aligned}$$

Q13 ✔ Réponse C

$f \ge 0$, donc l'aire est $\displaystyle\int_1^e (\ln x)^2\,dx$. Deux intégrations par parties donnent la primitive $x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x$. D'où

$$\begin{aligned} \int_1^e (\ln x)^2\,dx &= (e - 2e + 2e) - (0 - 0 + 2) \\ &= e - 2. \end{aligned}$$

Q14 ✔ Réponse –

Avec $u = \ln x$: $V_n = \displaystyle\int_1^{\ln n} u^{-3/2}\,du = \left[-\frac{2}{\sqrt{u}}\right]_1^{\ln n} = 2 - \frac{2}{\sqrt{\ln n}} \to 2$. Aucune proposition n'est juste (erreur du sujet).

Q15 ✔ Réponse A

$g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \displaystyle\int_1^1 \cdots = 0$. Pour x proche de $\frac{\pi}{4}$:

$$g'(x) = \frac{1+\tan^2 x}{\arctan(\tan x)} = \frac{1+\tan^2 x}{x},$$

$$g'\left(\tfrac{\pi}{4}\right) = \frac{2}{\pi/4} = \frac{8}{\pi}.$$

Tangente : $y = \dfrac{8}{\pi}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{8}{\pi}x - 2$.

Q16 ✔ Réponse B

On divise par $\cos^2 x$: l'intégrande devient $\dfrac{1+\tan^2 x}{1+4\tan^2 x}$. Avec $t = \tan x$, $dt = (1+\tan^2 x)\,dx$:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dt}{1+4t^2} &= \left[\frac{1}{2}\arctan(2t)\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}\arctan 2. \end{aligned}$$

Q17 ✔ Réponse **A**

Avec $u_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{n+1}{2(2n+1)} \leq \frac{1}{2} \text{ pour } n \geq 1.$$

Donc $0 < u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u_1$ et $u_n \to 0$.

Q18 ✔ Réponse **C**

Trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ forment une base si et seulement s'ils sont libres. Dans la base B :

- E : $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$: base.
- N : $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$: base.
- S : $v - u + w = (-u) + (v + w)$: famille liée.
- A : $(u - v - w) + (u + v + w) = 2u$: famille liée.

Seules E et N sont des bases.

Q19 ✔ Réponse **B**

L'ensemble défini dans l'énoncé (noté S, puis E dans la question) est le plan d'équation $x + 2y = 0$: $(x, y, z) = (-2y, y, z) = y(-2, 1, 0) + z(0, 0, 1)$. La famille $\{(-2, 1, 0); (0, 0, 1)\}$ est génératrice et libre : c'est une base (dimension 2). A contient $(0, 1, 0)$, qui n'est pas dans le plan ; C n'engendre qu'une droite.

Q20 ✔ Réponse **A**

- A est défini par une équation linéaire : c'est un sous-espace vectoriel (un plan).
- S ne contient pas $(0, 0, 0)$.
- N : $(1, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$ sont dans N, mais leur somme $(1, 1, 1)$ ne l'est pas.
- E : $(-1, 1, 1) \in E$ mais $2 \cdot (-1, 1, 1) = (-2, 2, 2)$ donne $-2 + 4 = 2 \neq 0$.

Seul A est un sous-espace vectoriel.

Q21 ✔ Réponse **B**

$A^2 + A = 2I_n$ s'écrit $A \cdot \frac{1}{2}(A + I_n) = I_n$: A est inversible, $A^{-1} = \frac{1}{2}(A + I_n)$. Donc (II) et (III) sont vraies, (I) est fausse, et (IV) est fausse (l'inverse est unique). Pour (V) : $A + I_n = 2A^{-1}$, donc $\det(A + I_n) = 2^n \det(A^{-1}) = \dfrac{2^n}{\det A}$. Cela vaut $\dfrac{2}{\det A}$ seulement si $n = 1$; la proposition B suppose donc $n = 1$ (ou un oubli du facteur 2^n).

Remarque : (V) n'est vraie que pour n = 1 : en général $\det(A + I_n) = 2^n/\det A$ (par exemple $A = I_n$ vérifie $A^2 = 2I_n - A$ et $\det(2I_n) = 2^n$). Pour $n \geq 2$ aucune proposition n'est exacte ; B est la réponse visée par le sujet. À trancher par le professeur.

Q22 ✔ Réponse **B**

Avec $a = 12345$:
$12343 \times 12347 = (a - 2)(a + 2) = a^2 - 4$.
Donc $\sqrt{a^2 - (a^2 - 4)} = \sqrt{4} = 2$.

Q23 ✔ Réponse **B**

Le produit vaut $2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}} = 2^{1 - \frac{1}{2^n}}$, qui tend vers $2^1 = 2$.

Q24 ✔ Réponse **C**

En dérivant (h continue) : $h(x) = \arctan x + \dfrac{x}{1 + x^2}$. Donc $h(1) = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi + 2}{4}$.

Q25 ✔ Réponse **A**

$$\frac{1}{\tan^3 x} = \frac{\cos^3 x}{\sin^3 x} = \frac{\cos x\,(1 - \sin^2 x)}{\sin^3 x} = \frac{\cos x}{\sin^3 x} - \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Une primitive est donc $-\dfrac{1}{2\sin^2 x} - \ln|\sin x|$, c'est-à-dire A. (B est la primitive de $\dfrac{1 + \tan^2 x}{\tan^3 x}$, pas de $\dfrac{1}{\tan^3 x}$.)