ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE CHIMIE DE KÉNITRA · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année · ENSCK Maroc

Session de septembre 2020 · Plusieurs réponses possibles

2020 — Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14	Q15
AC	ACD	BC	CD	B	D	B	A	BC	C	BC	BC	BCD	C	B

Q1 ✔ Réponse AC

$v_{n+1} = \dfrac{u_n}{2(u_n+1)} = \dfrac{1}{2}v_n$: géométrique de raison $\frac{1}{2}$, $v_0 = \frac{1}{2}$, donc $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ (B faux). $u_n = \dfrac{v_n}{1-v_n} = \dfrac{1}{2^{n+1}-1} \to 0$ (D faux).

Q2 ✔ Réponse ACD

$u_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}dx = \ln(1+e) - \ln 2$;
$u_1 = \left[-\ln(1+e^{-x})\right]_0^1 = \ln 2 - \ln(1+e^{-1}) = 1 + \ln 2 - \ln(1+e)$ (B faux). Donc $u_0 + u_1 = 1$. Et
$u_{n+1} + u_n = \displaystyle\int_0^1 e^{-nx}dx = \frac{1-e^{-n}}{n}$.

Q3 ✔ Réponse BC

$u_{n+1} - 2 = \dfrac{(u_n-2)^2}{2u_n}$: par récurrence $u_n > 2$. De même $u_{n+1} + 2 = \dfrac{(u_n+2)^2}{2u_n}$, d'où $v_{n+1} = v_n^2$. Ainsi $v_n = v_0^{2^n}$ (et non v_0^{2n} : D faux tel qu'imprimé).

Q4 ✔ Réponse CD

$p(-1) = 0$ et $p(z) = (z+1)(z^2+2z+4)$ (B faux), dont les racines sont $-1 \pm i\sqrt{3}$: C vrai. $p(-2i) = -8 - 4i \neq 0$.
$AB = AC = BC = 2\sqrt{3}$: ABC est équilatéral.

Q5 ✔ Réponse B

$z^2 = (2+\sqrt{3}) - (2-\sqrt{3}) - 2i\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = 2\sqrt{3} - 2i = 4e^{-i\pi/6}$.

Q6 ✔ Réponse D

$|z| = \sqrt{4} = 2$ et z est dans le quatrième quadrant, avec $z^2 = 4e^{-i\pi/6}$: $z = 2e^{-i\pi/12}$.

Q7 ✔ Réponse B

$\dfrac{\overline{z}}{2} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = e^{i\pi/12}$: l'angle est $\dfrac{\pi}{12}$.

Q8 ✔ Réponse A

$\dfrac{4e^x}{1+e^x} \to 4$ en $+\infty$, donc $f(x) - (x-4) \to 0$.

Q9 ✔ Réponse BC

$|z| = \dfrac{|1+i\omega|}{|1-i\omega|} = 1$. $\left|\dfrac{(1+i\omega)^2}{1-i\omega}\right| = \dfrac{1+\omega^2}{\sqrt{1+\omega^2}} = \sqrt{1+\omega^2}$.
$\operatorname{Re} z = \dfrac{1-\omega^2}{1+\omega^2} \neq 1$; le membre gauche de D vaut $\dfrac{1}{\sqrt{1+\omega^2}} \neq \sqrt{1+\omega^2}$ car $\omega > 0$.

Q10 ✔ Réponse C

$z_1 = 2e^{-i\pi/3}$ et $z_2 = 2\sqrt{2}e^{3i\pi/4}$.

Q11 ✔ Réponse BC

$f(x) = \dfrac{1}{e^x+1}$: $\to 0$ en $+\infty$ et $\to 1$ en $-\infty$.
$\displaystyle\int_0^1 f = \left[-\ln(1+e^{-x})\right]_0^1 = \ln 2 - \ln(1+e^{-1})$. f n'est pas paire.

Q12 ✔ Réponse BC

$F'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1} + 1 = \dfrac{(x+1)^2}{x^2+1} \geq 0$ (A faux) : F croissante.
$F \to +\infty$ en $+\infty$ et $F(x) = x + \ln(x^2+1) \to -\infty$ en $-\infty$.

Q13 ✔ Réponse BCD

En 0^+, $-\dfrac{\ln x}{x^2} \to +\infty$ (A faux). En $+\infty$, $g \to +\infty$.
$g'(x) = 1 - \dfrac{1-2\ln x}{x^3} = \dfrac{x^3 - 1 + 2\ln x}{x^3}$, et
$\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx = \left[-\frac{\ln x + 1}{x}\right]_1^e = 1 - \frac{2}{e}$.

Q14 ✔ Réponse C

$f_n\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin^{n+1}(\pi - 2x) = \sin^{n+1}(2x)$ et
$f_n\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = (-1)^{n+1}\sin^{n+1}(2x)$: C vrai. A n'est vrai que pour n pair, B est faux pour n pair ($\sin 2x < 0$ sur $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$), et
$f_n'(x) = 2(n+1)\sin^n(2x)\cos(2x)$.

Q15 ✔ Réponse B

Il faut $e^{-x} > 1$: $D =]-\infty, 0[$ (A faux). Sur D,
$g(x) = \ln(1-e^x) - \ln(1+e^x)$ et

$$g'(x) = \frac{-e^x}{1-e^x} - \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{-2e^x}{1-e^{2x}} < 0.$$

$\ln\dfrac{e-1}{e+1} \approx -0{,}77 \neq -1$.