الموضوع الأول: (10 نقط)

تشير التوجيهات التربوية في الفقرة الخاصة بالأعداد العقدية إلى ما يلي:

> ينبغي التركيز على الحل العقدي لبعض المسائل الهندسية و تعويد التلاميذ على اختيار الأداة المناسبة لحل هذه المسائل من بين التحليلية و المتجهية و العقدية و على ترجمة المفاهيم الهندسية خاصة منها المسافة و قياس زاوية و استقامية النقط و تداور النقط، و ذلك باستعمال الأعداد العقدية، و كذا على مختلف التطبيقات الجبرية لهذه الأعداد خصوصا: إخطاط الحدوديات المثلثية، صيغ التحويل المثلثية، حساب المجاميع، حل المعادلات الجبرية.

عن التوجيهات التربوية و البرامج الخاصة بتدريس مادة الرياضيات بسلك التعليم الثانوي التأهيلي، ص:89

لهذه الغاية قدم أستاذ مادة الرياضيات المبرهنة التالية من درس الأعداد العقدية لقسم الثانية بكالوريا شعبة العلوم التجريبية مسلك العلوم الفزيائية:

مبرهنة:

في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$. A و B و C و G أربع نقط مختلفة مثنى مثنى ألحاقها على التوالي a و b و c و g. لدينا:

ABC مثلث متساوي الأضلاع مباشر إذا و فقط إذا كان: $a+jb+j^2c=0$ ؛ $(j=e^{i\frac{2\pi}{3}})$ **(P1)**

G مركز ثقل المثلث ABC إذا و فقط إذا كان: $g=\frac{1}{3}(a+b+c)$ **(P2)**

I. 1) حدد موقع هذا الدرس من المقرر الدراسي.

2) هل يمكن إعطاء ترجمة متجهية للخاصية **(P1)** معللا جوابك؟

3) اعط برهانا للخاصية **(P1)**.

4) ما هي المكتسبات الضرورية للبرهنة على الخاصية **(P1)** ؟

5) قدم ترجمة عقدية للمفاهيم الهندسية التالية:

أ- المتفاوتة المثلثية.

ب- قياس زاوية موجهة لمتجهتين.

ج- استقامية ثلاث نقط.

د- تداور أربع نقط.

II. لتوظيف المبرهنة السابقة و إبراز أهميتها في حل بعض المسائل الهندسية استند الأستاذ على الوضعية التالية لبناء نشاط تعلمي:

الوضعية:

ليكن ABC مثلثا. ننشئ خارج هذا المثلث، المثلثات متساوية الأضلاع ACB' و $AC'B$ و $BA'C$.

لتكن النقط H و K و F مراكز ثقل المثلثات ACB' و $AC'B$ و $BA'C$ بالتوالي.

بين أن المثلث KHF متساوي الأضلاع.

Scanné avec CamScanner

1) ما المقصود بالنقل الديداكتيكي؟ العلاقة بين المعرفة

2) بالاعتماد على المبرهنة السابقة قم بتحويل الوضعية السابقة إلى نشاط تدريسي من أربعة أسئلة متسلسلة على الأقل، قابل للإنجاز لقسم من مستوى الثانية بكالوريا علوم تجريبية.

الموضوع الثاني: (4 نقط)

يظهر مفهوم التعامد في عدة محطات من برنامج الرياضيات بسلك الثانوي التأهيلي بحيث يتم في كل مرحلة تثبيت مكتسبات المتعلم من المرحلة السابقة و السمو بها.

1) اعط كرنولوجيا (chronologie) تطور مفهوم التعامد بين مستوى الجذع المشترك العلمي و التكنولوجي و مستوى الأولى علوم تجريبية.

2) حدد بعض المشاكل الديداكتيكية المرتبطة بتدريس مفهوم التعامد في الفضاء بالجذع المشترك العلمي و التكنولوجي.

الموضوع الثالث: (6 نقط)

اقترح أستاذ مادة الرياضيات على تلامذته من قسم الأولى علوم تجريبية التمرين التالي:

ليكن α و β حلي المعادلة: $x^2-6x+1=0$ في المجموعة $\mathbb{R}$.
ليكن n من $\mathbb{N}$ ؛ نضع: $u_n=\alpha^n+\beta^n$
1) بين أن: $\forall n\in\mathbb{N}\ ;\ u_{n+2}=6u_{n+1}-u_n$
2) بين أن: $\forall n\in\mathbb{N}\ ;\ u_n\in\mathbb{N}^*$
3) بين أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية تزايدية.

جاء جواب تلميذ عن السؤال 2) على النحو التالي:

بما أن α و β حلا المعادلة: $x^2-6x+1=0$ فإن: $\alpha+\beta=6$ و $\alpha\beta=1$
و منه: $\alpha>0$ و $\beta>0$ إذن: $\alpha^n+\beta^n>0$ و منه: $u_n\in\mathbb{N}^*$

و جاء جواب تلميذ آخر عن السؤال 3) كما يلي:

ليكن $n\in\mathbb{N}$. لدينا: $u_{n+1}-u_n=\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}-\alpha^n-\beta^n$
$=\alpha^n(\alpha-1)+\beta^n(\beta-1)$
و بما أن: $\alpha>1$ و $\beta>1$ فإن: $\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}-\alpha^n-\beta^n>0$
و بالتالي: $u_{n+1}\geq u_n$
إذن: $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية تزايدية.

1) قم بجرد الأخطاء الواردة في إنجاز كل تلميذ مع تحديد مصادرها المحتملة؟
2) اقترح نشاطا داعما لتجاوز هذه الأخطاء؟
3) اقترح حلا لهذا التمرين يمكن تقديمه للقسم المستهدف؟

انتهى

Scanné avec CamScanner

الموضوع الأول - الجزء الأول

1) موقع الدرس في المقرر الدراسي :

يندرج درس الأعداد العقدية ضمن برنامج الرياضيات المقررة في الأسدس الأول للسنة الثانية باكالوريا بالنسبة لشعبة العلوم التجريبية بمسلكيها (علوم فيزيائية وعلوم الحياة والأرض) ويأتي بعد درس الدوال اللوغاريثمية وقبل درس الدوال الأسية. وتم تقسيم هذا الدرس الى جزئيين تفصل بينهما درس الدوال الاسية.

2) الترجمة المتجهية للخاصية الأولى :

يمكن ترجمة الخاصية الأولى متجهيا وذلك بتعويض مفردة "مثلث متساوي الاضلاع" بمعطيين :

أ) يتم كتابة تقايس مسافتي ضلعين منه متجهيا وذلك باعتماد تساوي منظمي متجهتين.

ب) يتم التعبير عن أحد قياسات الزاوية الموجهة المباشرة المحصورة بين الضلعين المتقايسيين باعتماد الأداة المتجهية بوحدة الراديان.

ABC مثلثا متساوي الاضلاع يكافئ $\begin{cases} \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \left\|\overrightarrow{AC}\right\| \\ \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$

3) برهان مقترح للخاصية الأولى :

ليكن ABC مثلثا متساوي الاضلاع في المستوى العقدي، ولتكن a، b و c ألحاق النقط A ، B و C على التوالي.

ABC مثلثا متساوي الاضلاع يكافئ $\begin{cases} \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \left\|\overrightarrow{AC}\right\| \\ \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} |b-a| = |c-a| \\ \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} \left|\frac{c-a}{b-a}\right| = 1 \\ \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$

يكافئ $\frac{c-a}{b-a} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ يكافئ $(c-a) = (b-a)e^{i\frac{\pi}{3}}$ يكافئ $e^{i\frac{2\pi}{3}}(c-a) = (b-a)e^{i\frac{\pi}{3}}e^{i\frac{2\pi}{3}}$

يكافئ $j(c-a) = (b-a)e^{i\pi} = (a-b)$ $(e^{i\pi} = -1)$ يكافئ $j^2(c-a) = (a-b)j$

يكافئ $(-j^2 - j)a + bj + j^2c = 0$

يكافئ $a + bj + j^2c = 0$ (لأن : $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ فإن $j^3 = e^{i2\pi} = 1$ و بالتالي $j^3 - 1 = 0$ يعني $(j-1)(1+j+j^2) = 0$)

وبما أن $j = e^{i\frac{2\pi}{3}} \notin IR$ فإن $j \neq 1$ وبالتالي $1 + j + j^2 = 0$ وهذا يعني أن $-j^2 - j = 1$)

4) المكتسبات الضرورية للبرهنة على الخاصية الأولى :

- العمليات على الشكل الاسي لعدد عقدي غير منعدم
- ربط مسافة بمعيار عدد عقدي
- ربط قياس زاوية بعمدة عدد عقدي غير منعدم
- ترجمة ABC مثلث متساوي الاضلاع الى النقطة C صورة النقطة B بالدوران الذي مركزه النقطة A و زاويته $\frac{\pi}{3}$
- استحضار الصيغة العقدية لدوران
- استعمال العمليات على الشكل الاسي لعدد عقدي للبرهنة على أن $1+j+j^2=0$

5) الترجمة العقدية للمفاهيم هندسية :

نعتبر $A(a)$ و $B(b)$ و $C(c)$ و $D(d)$ نقط مختلفة مثنى مثنى من المستوى العقدي

- المتفاوتة المثلثية : لتكن $M(z)$ نقطة ما من المستوى العقدي، نعلم أن : $AB \le AM+MB$

لكل z من C لدينا : $|b-a| \le |z-a|+|b-z|$

وبوضع : $z_1=z-a$, $z_2=b-z$ نحصل على $|z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|$

- قياس زاوية موجهة لمتجهيتن : $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right) \equiv \arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right)[2\pi]$
- $A(a)$ و $B(b)$ و $C(c)$ نقط مستقيمية يعني $\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right) \equiv 0[\pi]$

يعني $\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv 0[\pi]$ يعني $\frac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R}$

- $A(a)$ و $B(b)$ و $C(c)$ و $D(d)$ نقط متداورة يعني $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) \equiv \left(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC}\right)[\pi]$

يعني $\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\times\frac{b-d}{c-d}\right) \equiv 0[\pi]$ يعني $\frac{c-a}{b-a}\times\frac{b-d}{c-d} \in \mathbb{R}^*$

الموضوع الأول - الجزء الثاني :

1) **تعريف النقل الديداكتيكي** : هو مجموعة من العمليات التي يدخلها الباحثون في ديداكتيك الرياضيات على المعرفة الرياضياتية الاكاديمية قصد تحويلها الى معرفة رياضياتية مدرسة.

2) تحويل الوضعية السابقة الى نشاط تدريسي من أربعة أسئلة :

نعتبر $A(a)$ و $B(b)$ و $C(c)$ ثلاث نقط مختلفة مثنى مثنى في المستوى العقدي.

لتكن $A'(a')$ و $B'(b')$ و $C'(c')$ثلاث نقط من المستوى العقدي بحيث : 'ABC و'ACB و'BCA مثلثات متساوية الأضلاع، لتكن $H(h)$ و $K(k)$ و $F(f)$ مراكز ثقل المثلثات 'ACB و 'ABC و'BCA على التوالي.

- أنشئ شكلا مناسبا
- باعتماد المبرهنة (P2) أحسب h و k و f
- بين أن $f+jh+j^2k=0$ حيث $j=e^{i\frac{2\pi}{3}}$
- باعتماد المبرهنة (P1) استنتج طبيعة المثلث FHK

الموضوع الثاني :

1) كرونولوجيا تطور تدريس مفهوم التعامد بين الجذع المشترك العلمي و مستوى السنة الأولى علوم تجريبية

المستوى	سيرورة تدريس مفهوم التعامد في		
	الهندسة التآلفية	**الهندسة المتجهية**	**الهندسة التحليلية**
TCS	• اثبات وإنشاء المسقط العمودي لنقطة في المستوى • اثبات التعامد باستعمال خاصيات التماثل المتعامد (المحوري) • اثبات التعامد باستعمال مبرهنة الكاشي وحالتها الخاصة مبرهنة فيتاغورس في المستوى • استعمال مبرهنة طاليس لإثبات التعامد في بعض الحالات • اثبات تعامد مستقيمين في الفضاء • اثبات تعامد مستقيم و مستوى في الفضاء • اثبات تعامد مستويين في الفضاء • اثبات مثلث قائم الزاوية باستعمال مبرهنة فيثاغورس في الفضاء	• تعامد متجهتين في المستوى باعتماد الجداء السلمي • تعامد مستقيمين في المستوى باعتماد الجداء السلمي	• المعلم المتعامد في المستوى • احداثيات نقطة في معلم متعامد • • تعامد مستقيمين معرفين بمعادلتين مختصرتين ، معادلتين ديكارتيتين، تمثيلين برامتريين، • معادلة مستقيم
1BACS	• استعمال الدوران لاثبات تعامد مستقيمين في المستوى (صورة مستقيمين متعامدين بدوران هي مستقيمين متعامدين) • استعمال المرجح لاثبات تعامد مستقيمين في المستوى	•	• متجهة منظمية • استعمال الصيغة التحليلية للجداء السلمي لاثبات تعامد متجهتين أو مستقيمين في المستوى • مماس دائرة + المسافة بين نقطتين

2) بعض المشاكل الديداكتيكية المرتبطة بتدريس التعامد في الفضاء بالجذع المشترك العلمي

مشاكل ديداكتيكية مرتبطة بالاستاذ	**مشاكل ديداكتيكية مرتبطة بالتلميذ**
• غياب الوسائل والمعينات الديداكتيكية • تتطلب الاشكال الهندسية في الفضاء وقتا مهما في الانشاء و في الشرح و في تحديد المطلوب بالنسبة للتلميذ • عدم تناسب المحتوى مع المدة الزمنية المخصصة للدرس الهندسة الفضائية	• قصور في قدرة التلميذ على تخيل الاشكال الهندسية في الفضاء • ارتباط التعامد في ذهن التلميذ بالتقاطع • صعوبة في قراءة الاشكال الهندسية بطريقة صحيحة • صعوبة في انشاء الاشكال الهندسية في الفضاء

الموضوع الثالث :

1) الأخطاء الواردة في كل انجاز و مصادرها المحتملة

	الخطأ	المصدر المحتمل
إنجاز التلميذ 1	$u_n \in \mathbb{N}^*$ ومنه $\alpha^n + \beta^n > 0$	اعتقاد التلميذ أن $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{N}^*$
إنجاز التلميذ 2	بما أن $\alpha > 1$ و $\beta > 1$	اعتقاد التلميذ أن $\alpha\beta = 1$ يستلزم أن $\alpha > 1$ و $\beta > 1$

2) نشاط داعم لتجاوز الأخطاء

الخطأ	نشاط معالجة الخطأ
$u_n \in \mathbb{N}^*$ ومنه $\alpha^n + \beta^n > 0$	• هل $0,5 > 0$ ؟ • تحقق أن $0,5 < 1$ • استنتج أن $0 < 0,5 < 1$ • استنتج أن $0,5 \notin \mathbb{N}$
بما أن $\alpha > 1$ و $\beta > 1$	نعتبر $a = 2$ و $b = \frac{1}{2}$ • أحسب ab • قارن b و 1 • هل لدينا ($a > 1$ و $b > 1$) ؟

3) حل مقترح للتمرين

- اثبات أن $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_{n+2} = 6u_{n+1} - u_n$

- من أجل $n = 0$، لدينا $u_2 = \alpha^2 + \beta^2$

بما ان $\alpha\beta = 1$ و $\alpha + \beta = 6$ فإن $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 6^2 - 2 \times 1 = 34$

ولدينا من جهة أخرى $6u_1 - u_0 = 6(\alpha^1 + \beta^1) - (\alpha^0 + \beta^0) = 6 \times 6 - 2 = 34$

ومنه $u_2 = 6u_1 - u_0$

- من أجل رتبة n من $\mathbb{N}^*$، نفترض ان $u_{n+2} = 6u_{n+1} - u_n$ ونبين أن $u_{n+3} = 6u_{n+2} - u_{n+1}$

لدينا

$$\begin{aligned} u_{n+3} + u_{n+1} &= \alpha^{n+3} + \beta^{n+3} + \alpha^{n+1} + \beta^{n+1} \\ &= \alpha^{n+2}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) + \beta^{n+2}\left(\beta + \frac{1}{\beta}\right) \\ &= \alpha^{n+2}(\alpha + \beta) + \beta^{n+2}(\beta + \alpha) \qquad car(\alpha\beta = 1) \\ &= (\alpha + \beta)(\alpha^{n+2} + \beta^{n+2}) \\ &= 6u_{n+2} \end{aligned}$$

ومنه $u_{n+3} = 6u_{n+2} - u_{n+1}$

- وبالتالي حسب مبدأ البرهان بالترجع $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_{n+2} = 6u_{n+1} - u_n$

- اثبات أن $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n \in \mathbb{N}^*$
  - من أجل $n = 0$ ، لدينا $u_0 = \alpha^0 + \beta^0 = 2 \in \mathbb{N}^*$
  - من أجل رتبة n من $\mathbb{N}^*$ ، نفترض ان $u_n \in \mathbb{N}^*$ و $u_{n+1} \in \mathbb{N}^*$ ، ولنبين أن $u_{n+2} \in \mathbb{N}^*$
    لدينا $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_{n+2} = 6u_{n+1} - u_n$ و $u_n \in \mathbb{N}^*$ و $u_{n+1} \in \mathbb{N}^*$ إذا $u_{n+2} \in \mathbb{Z}$
    وبما أن $\alpha > 0$ و $\beta > 0$ فان $u_{n+2} \in \mathbb{N}^*$
  - وبالتالي حسب مبدأ البرهان بالترجع $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n \in \mathbb{N}^*$

- اثبات أن المتتالية (u_n) تزايدية
  - من أجل $n = 0$ ، لدينا $u_0 = 2$ و $u_1 = 6$ اذا $u_0 < u_1$
  - من أجل رتبة n من $\mathbb{N}^*$ ، نفترض ان $u_n < u_{n+1}$ ونبين أن $u_{n+1} < u_{n+2}$

$$\begin{aligned} u_{n+2} - u_{n+1} &= 6u_{n+1} - u_n - u_{n+1} \\ &= 5u_{n+1} - u_n \\ &= 4u_{n+1} - u_n + (u_{n+1} - u_n) \end{aligned}$$

لدينا

بما ان $u_n < u_{n+1}$ و $u_{n+1} \in \mathbb{N}^*$ فإن $u_{n+2} - u_{n+1} > 0$

- وبالتالي حسب مبدأ البرهان بالترجع المتتالية (u_n) تزايدية