Exercice 1 (2.5 points)

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$u_0 = 2$ **et** $u_{n+1} = \dfrac{3+u_n}{5-u_n}$ **pour tout entier naturel** n

0.75 **1) Vérifier que** $u_{n+1} - 3 = \dfrac{4(u_n - 3)}{2+(3-u_n)}$ **pour tout entier naturel** n **puis montrer par récurrence que** $u_n < 3$ **pour tout entier naturel** n

2)Soit (v_n) **la suite numérique définie par :** $v_n = \dfrac{u_n - 1}{3 - u_n}$ **pour tout entier naturel** n

0.75 **a) Montrer que** (v_n) **est une suite géométrique de raison** $\dfrac{1}{2}$ **puis en déduire que** $v_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ **pour tout entier naturel** n

0.5 **b) Montrer que** $u_n = \dfrac{1+3v_n}{1+v_n}$ **pour tout entier naturel** n **puis écrire** u_n **en fonction de** n

0.5 **c) Déterminer la limite de la suite** (u_n)

Exercice 2 (3 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ **, on considère les points** $A(2,1,3), B(3,1,1), C(2,2,1)$ **et la sphère** (S) **d'équation :**

$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 34 = 0$

0.5 **1)a) Montrer que** $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$

0.5 **b)En déduire que** $2x + 2y + z - 9 = 0$ **est une équation cartésienne du plan** (ABC)

0.5 **2)a) Montrer que la sphère** (S) **a pour centre le point** $\Omega(1,-1,0)$ **et pour rayon** 6

0.5 **b) Montrer que** $d(\Omega,(ABC)) = 3$ **et en déduire que le plan** (ABC) **coupe la sphère** (S) **suivant un cercle** (Γ)

0.5 **3)a)Déterminer une représentation paramétrique de la droite** (Δ) **passant par le point** Ω **et orthogonale au plan** (ABC)

0.5 **b) Montrer que le point** B **est le centre du cercle** (Γ)

Exercice 3 (3 points)

0.75 **1) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbf{C}$ l'équation : $z^2 - 4z + 29 = 0$**

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$, on considère les points Ω , A et B d'affixes respectives ω , a et b telles que $\omega = 2 + 5i$, $a = 5 + 2i$ et $b = 5 + 8i$

0.75 **a)Soit u le nombre complexe tel que $u = b - \omega$**

Vérifier que $u = 3 + 3i$ puis montrer que $\arg u \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

0.25 **b) Déterminer un argument du nombre complexe $\bar{u}$ ($\bar{u}$ étant le conjugué de u)**

0.75 **c) Vérifier que $a - \omega = \bar{u}$ puis en déduire que $\Omega A = \Omega B$ et que $\arg\left(\frac{b-\omega}{a-\omega}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$**

0.5 **d) On considère la rotation R de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$**

Déterminer l'image du point A par la rotation R

Exercice 4 (3 points)

Une urne contient 10 boules : quatre boules rouges et six boules vertes.

(Les boules sont indiscernables au toucher)

On tire au hasard , simultanément , deux boules de l'urne.

1 **1) Soit A l'évènement : « Les deux boules tirées sont rouges » .**

Montrer que $p(A) = \frac{2}{15}$

2) Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de boules rouges restantes dans l'urne après le tirage des deux boules.

0.5 **a) Montrer que l'ensemble des valeurs prises par X est $\{2, 3, 4\}$**

1.5 **b) Montrer que $p(X = 3) = \frac{8}{15}$ puis déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X**

Problème (8.5 points)

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=2x-2+e^{2x}-4e^{x}$

Soit (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité: $1cm$)

0.25 **I-1)a)Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$**

0.5 **b)Montrer que la droite (D) d'équation $y=2x-2$ est asymptote à la courbe (C_f) au voisinage de $-\infty$**

0.5 **2)a)Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$**

0.5 **b)Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}=+\infty$ puis interpréter géométriquement ce résultat.**

0.5 **3)a)Montrer que $f'(x)=2\left(e^{x}-1\right)^{2}$ pour tout nombre réel x**

0.25 **b) Donner le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$ (Remarquer que $f'(0)=0$)**

0.75 **c) Montrer qu'il existe un réel unique α de l'intervalle $]1\,,\ln 4[$ tel que $f(\alpha)=0$**

0.5 **4)a)Montrer que la courbe (C_f) est située au dessus de la droite (D) sur l'intervalle $]\ln 4,+\infty[$ et en dessous de la droite (D) sur l'intervalle $]-\infty,\ln 4[$**

0.5 **b) Montrer que la courbe (C_f) admet un point d'inflexion unique de coordonnées $(0\,,-5)$**

0.75 **c)Construire la droite (D) et la courbe (C_f) dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$**

(on prendra $\ln 4\approx 1{,}4$ et $\alpha\approx 1{,}3$)

0.5 **5)a) Montrer que $\displaystyle\int_{0}^{\ln 4}\left(e^{2x}-4e^{x}\right)dx=-\frac{9}{2}$**

0.5 **b) Calculer , en cm^{2} , l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_f) , la droite (D) , l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x=\ln 4$**

0.5 **II-1)a) Résoudre l'équation différentielle (E) : $y''-3y'+2y=0$**

0.5 **b) Déterminer la solution g de l'équation (E) vérifiant $g(0)=-3$ et $g'(0)=-2$**

2)Soit h la fonction numérique définie sur l'intervalle $]\ln 4,+\infty[$ par : $h(x)=\ln\left(e^{2x}-4e^{x}\right)$

0.75 **a) Montrer que la fonction h admet une fonction réciproque h^{-1} et que h^{-1} est définie sur $\mathbb{R}$**

0.75 **b) Vérifier que $h(\ln 5)=\ln 5$ puis déterminer $\left(h^{-1}\right)'(\ln 5)$**

Exercice 1 (3 points)

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$u_0 = 2$ **et** $u_{n+1} = \frac{1}{16}u_n + \frac{15}{16}$ **pour tout entier naturel** n

0.5 **1)a) Montrer par récurrence que** $u_n > 1$ **pour tout entier naturel** n

0.5 **b) Vérifier que** $u_{n+1} - u_n = -\frac{15}{16}(u_n - 1)$ **pour tout entier naturel** n **puis montrer que la suite** (u_n) **est décroissante.**

0.25 **c) En déduire que la suite** (u_n) **est convergente.**

2)Soit (v_n) **la suite numérique telle que :** $v_n = u_n - 1$ **pour tout entier naturel** n

1 **a) Montrer que** (v_n) **est une suite géométrique de raison** $\frac{1}{16}$ **puis écrire** v_n **en fonction de** n

0.75 **b) Montrer que** $u_n = 1 + \left(\frac{1}{16}\right)^n$ **pour tout entier naturel** n**, puis déterminer la limite de la suite** (u_n)

Exercice 2 (3 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$**, on considère les points**

$A(1, 3, 4)$ **et** $B(0, 1, 2)$

0.5 **1) a) Montrer que** $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$

0.5 **b) Montrer que** $2x - 2y + z = 0$ **est une équation cartésienne du plan** (OAB)

0.5 **2)Soit** (S) **la sphère d'équation :** $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 6y - 6z + 2 = 0$

Montrer que (S) **a pour centre le point** $\Omega(3, -3, 3)$ **et pour rayon** 5

0.75 **3) a) Montrer que le plan** (OAB) **est tangent à la sphère** (S)

0.75 **b) Déterminer les coordonnées du point de contact** H **du plan** (OAB) **et de la sphère** (S)

Exercice 3 (3 points)

0.75 **1) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbf{C}$ l'équation : $z^2-8z+41=0$**

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A , B , C et Ω d'affixes respectives a , b , c et ω telles que $a=4+5i$, $b=3+4i$, $c=6+7i$ et $\omega=4+7i$

0.75 **a) Calculer $\dfrac{c-b}{a-b}$ puis en déduire que les points A , B et C sont alignés**

0.75 **b)Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M' , image de M par la rotation R de centre Ω et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$**

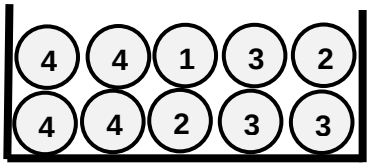
Montrer que $z'=-iz-3+11i$

0.75 **c) Déterminer l'image du point C par la rotation R puis donner une forme trigonométrique du nombre complexe $\dfrac{a-\omega}{c-\omega}$**

Exercice 4 (3 points)

Une urne contient 10 boules portant les nombres 1 ; 2 ; 2 ; 3 ; 3 ; 3 ; 4 ; 4 ; 4 ; 4
(Les boules sont indiscernables au toucher)

On considère l'expérience suivante : on tire au hasard , successivement et sans remise , deux boules de l'urne .



1 **1) Soit A l'évènement :'' Obtenir deux boules portant deux nombres pairs''.**

Montrer que $p(A)=\dfrac{1}{3}$

2 **2) On répète l'expérience précédente trois fois de suite, en remettant dans l'urne les deux boules tirées après chaque expérience.**

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de fois où l'évènement A est réalisé.

Montrer que $p(X=1)=\dfrac{4}{9}$ puis déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X

Problème (8 points)

I-Soit g **la fonction numérique définie sur** $]0,+\infty[$ **par :** $g(x)=\frac{2}{x}-1+2\ln x$

On considère ci-contre le tableau de variations de la fonction g **sur** $]0,+\infty[$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖ $+\infty$	↘	$g(1)$	↗	$+\infty$

0.25 **1) Calculer** $g(1)$

0.75 **2) En déduire à partir du tableau que** $g(x)>0$ **pour tout** x **appartenant à** $]0,+\infty[$

II-On considère la fonction numérique f **définie sur** $]0,+\infty[$ **par :** $f(x)=3-3x+2(x+1)\ln x$

Soit (C) **la courbe représentative de** f **dans un repère orthonormé** $(O,\vec{i},\vec{j})$ **(unité :** $2\ cm$ **)**

0.75 **1) Montrer que** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=-\infty$ **et interpréter géométriquement ce résultat.**

0.5 **2)a- Montrer que** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ **(pour le calcul de la limite on pourra utiliser l'écriture suivante** $f(x)=x\left[\frac{3}{x}-3+2\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln x\right]$ **)**

0.5 **b- Montrer que la courbe** (C) **admet , au voisinage de** $+\infty$**, une branche parabolique dont la direction est celle de l'axe des ordonnées .**

0.75 **3) a-Montrer que** $f'(x)=g(x)$ **pour tout** x **appartenant à** $]0,+\infty[$

0.75 **b- En déduire que** f **est strictement croissante sur** $]0,+\infty[$ **et dresser le tableau de variations de** f **sur** $]0,+\infty[$

0.5 **4)a- Montrer que** $I(1,0)$ **est un point d'inflexion de la courbe** (C)

0.25 **b-Montrer que** $y=x-1$ **est une équation cartésienne de la tangente** (T) **à la courbe** (C) **au point** I

0.75 **c-Construire , dans le même repère** $(O,\vec{i},\vec{j})$**, la droite** (T) **et la courbe** (C)

0.5 **5) a-Montrer que :** $\int_1^2\left(1+\frac{x}{2}\right)dx=\frac{7}{4}$

0.75 **b - A l'aide d'une intégration par parties, montrer que** $\int_1^2(x+1)\ln x\,dx=4\ln 2-\frac{7}{4}$

0.5 **c- Calculer, en** cm^2**, l'aire du domaine plan limité par la courbe** (C)**, l'axe des abscisses et les droites d'équations** $x=1$ **et** $x=2$

0.5 **6) Résoudre graphiquement l'inéquation :** $x\in]0,+\infty[$; $(x+1)\ln x\geq\frac{3}{2}(x-1)$

Exercice 1 (3 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère le plan (P) passant par le point $A(0,1,1)$ et dont $\vec{u}(1,0,-1)$ est un vecteur normal et la sphère (S) de centre le point $\Omega(0,1,-1)$ et de rayon $\sqrt{2}$

0.5 **1) a) Montrer que $x-z+1=0$ est une équation cartésienne du plan (P)**

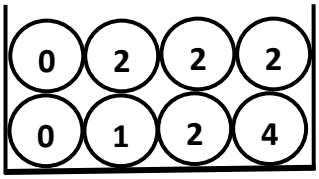
0.75 **b) Montrer que le plan (P) est tangent à la sphère (S) et vérifier que $B(-1,1,0)$ est le point de contact.**

0.25 **2) a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par le point A et orthogonale au plan (P)**

0.75 **b) Montrer que la droite (Δ) est tangente à la sphère (S) au point $C(1,1,0)$**

0.75 **3) Montrer que $\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OB}=2\vec{k}$ et en déduire l'aire du triangle OCB**

Exercice 2 (3 points)



Une urne contient huit boules indiscernables au toucher portant chacune un nombre comme indiqué sur la figure ci-contre.
On tire au hasard, simultanément, trois boules de l'urne.

1.5 **1) Soit A l'événement : « Parmi les trois boules tirées, aucune boule ne porte le nombre 0 » et B l'événement : « Le produit des nombres portés par les trois boules tirées est égal à 8 »**

Montrer que $p(A)=\frac{5}{14}$ et que $p(B)=\frac{1}{7}$

2) Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le produit des nombres portés par les trois boules tirées.

0. 5 **a) Montrer que $p(X=16)=\frac{3}{28}$**

1 **b) Le tableau ci-contre concerne la loi de probabilité de la variable aléatoire X**

x_i	0	4	8	16
$p(X=x_i)$				$\frac{3}{28}$

Recopier sur votre copie et compléter le tableau en justifiant chaque réponse.

Exercice 3 (3 points)

On considère les nombres complexes a et b tels que $a=\sqrt{3}+i$ et $b=\sqrt{3}-1+\left(\sqrt{3}+1\right)i$

0.25 **1) a) Vérifier que $b=\left(1+i\right)a$**

0.5 **b) En déduire que $|b|=2\sqrt{2}$ et que $\arg b\equiv\frac{5\pi}{12}\ [2\pi]$**

0.5 **c) Déduire de ce qui précède que $\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$**

2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$

On considère les points A et B d'affixes respectives a et b et le point C d'affixe c telle que $c=-1+i\sqrt{3}$

0.75 **a) Vérifier que $c=ia$ et en déduire que $OA=OC$ et que $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}\right)\equiv\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$**

0.5 **b) Montrer que le point B est l'image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{OC}$**

0.5 **c) En déduire que le quadrilatère $OABC$ est un carré.**

Problème (11 points)

I- Soit g la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par : $g(x)=x^2+x-2+2\ln x$

0.25 **1) Vérifier que $g(1)=0$**

1 **2) A partir du tableau de variations de la fonction g ci-dessous :**

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	
$g(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

Montrer que $g(x)\le 0$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]0\ ,1]$

et que $g(x)\ge 0$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[1\ ,+\infty[$

II-On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par: $f(x)=x+\left(1-\frac{2}{x}\right)\ln x$

Soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ (unité: $1cm$)

0.5 **1) Montrer que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=+\infty$ et interpréter géométriquement le résultat.**

0.25 **2) a) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$**

0.75 **b) Montrer que la courbe (C) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction asymptotique celle de la droite (D) d'équation $y=x$**

1 **3) a) Montrer que** $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$ **pour tout** x **appartenant à l'intervalle** $]0,+\infty[$

0.75 **b) Montrer que** f **est décroissante sur l'intervalle** $]0\,,1]$ **et croissante sur l'intervalle** $[1\,,+\infty[$

0.25 **c) Dresser le tableau de variations de la fonction** f **sur l'intervalle** $]0,+\infty[$

0.5 **4) a) Résoudre dans l'intervalle** $]0,+\infty[$ **l'équation** $\left(1-\dfrac{2}{x}\right)\ln x=0$

0.5 **b) En déduire que la courbe** (C) **coupe la droite** (D) **en deux points dont on déterminera les coordonnées.**

0.75 **c) Montrer que** $f(x)\le x$ **pour tout** x **appartenant à l'intervalle** $[1\ ,\ 2]$ **et en déduire la position relative de la courbe** (C) **et la droite** (D) **sur l'intervalle** $[1\ ,\ 2]$

1 **5) Construire, dans le même repère** $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$**, la droite** (D) **et la courbe** (C) **(On admettra que la courbe** (C) **possède un seul point d'inflexion dont l'abscisse est comprise entre** $2,4$ **et** $2,5$**)**

0.5 **6) a) Montrer que** $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln x}{x}dx=\frac{1}{2}(\ln 2)^2$

0.25 **b) Montrer que la fonction** $H:x\mapsto 2\ln x-x$ **est une fonction primitive de la fonction** $h:x\mapsto\dfrac{2}{x}-1$ **sur l'intervalle** $]0,+\infty[$

0.5 **c) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que** $\displaystyle\int_1^2\left(\frac{2}{x}-1\right)\ln x\,dx=(1-\ln 2)^2$

0.5 **d) Calculer, en** cm^2**, l'aire du domaine plan limité par la courbe** (C)**, la droite** (D) **et les droites d'équations** $x=1$ **et** $x=2$

III-On considère la suite numérique (u_n) **définie par :**

$u_0=\sqrt{3}$ **et** $u_{n+1}=f(u_n)$ **pour tout entier naturel** n

0.5 **1) Montrer par récurrence que** $1\le u_n\le 2$ **pour tout entier naturel** n

0.5 **2) Montrer que la suite** (u_n) **est décroissante (on pourra utiliser le résultat de la question II-4)c))**

0.75 **3) En déduire que la suite** (u_n) **est convergente et déterminer sa limite.**

Exercice 1 (3 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

On considère la sphère (S) **d'équation** $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-1=0$ **et le plan** (P) **d'équation** $y-z=0$

0.5 **1) a) Montrer que la sphère** (S) **a pour centre le point** $\Omega(1\ ,\ 1\ ,\ 1)$ **et pour rayon** 2

0.5 **b) Calculer** $d(\Omega,(P))$ **et en déduire que le plan** (P) **coupe la sphère** (S) **suivant un cercle** (C)

0.5 **c) Déterminer le centre et le rayon du cercle** (C)

2) Soit (Δ) **la droite passant par le point** $A(1\ ,-2\ ,\ 2)$ **et orthogonale au plan** (P)

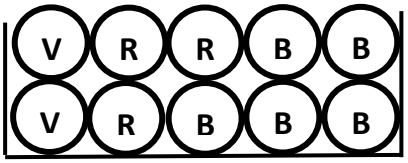
0.25 **a) Montrer que** $\vec{u}(0\ ,1\ ,-1)$ **est un vecteur directeur de la droite** (Δ)

0.75 **b) Montrer que** $\left\|\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}\right\|=\sqrt{2}\left\|\vec{u}\right\|$ **et en déduire que la droite** (Δ) **coupe la sphère** (S) **en deux points.**

0.5 **c) Déterminer les coordonnées de chaque point d'intersection de la droite** (Δ) **et de la sphère** (S)

Exercice 2 (3 points)

Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher : Cinq boules blanches , trois boules rouges et deux boules vertes (Voir figure ci-contre)
On tire au hasard, simultanément, quatre boules de l'urne.



1.5 **1) Soit** A **l'événement :'' Parmi les quatre boules tirées, une seule boule est verte ''.**
et B **l'événement :'' Parmi les quatre boules tirées, il y a exactement trois boules de même couleur ''.**

Montrer que $p(A)=\frac{8}{15}$ **et que** $p(B)=\frac{19}{70}$

2) Soit X **la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de boules vertes tirées.**

0.5 **a) Montrer que** $p(X=2)=\frac{2}{15}$

1 **b) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire** X **et montrer que l'espérance mathématique** $E(X)$ **est égale à** $\frac{4}{5}$

Exercice 3 (3 points)

0.75 **1) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbf{C}$ l'équation : $z^2 + 4z + 8 = 0$**

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A , B et C d'affixes respectives a , b et c telles que $a = -2 + 2i$, $b = 4 - 4i$ et $c = 4 + 8i$

0.5 **a) Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M' , image de M par la rotation R de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$**

Montrer que $z' = -iz - 4$

0.75 **b) Vérifier que le point B est l'image du point C par la rotation R et en déduire la nature du triangle ABC**

3) Soit ω l'affixe du point Ω , milieu du segment $[BC]$

0.5 **a) Montrer que $|c - \omega| = 6$**

0.5 **b) Montrer que l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z - \omega| = 6$ est le cercle circonscrit au triangle ABC**

Exercice 4 (2.5 points)

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$u_0 = 17$ **et** $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 12$ **pour tout entier naturel n**

0.5 **1) a) Montrer par récurrence que $u_n > 16$ pour tout entier naturel n**

0.5 **b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante et en déduire que la suite (u_n) est convergente.**

2) Soit (v_n) la suite numérique telle que $v_n = u_n - 16$ pour tout entier naturel n

0.5 **a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique.**

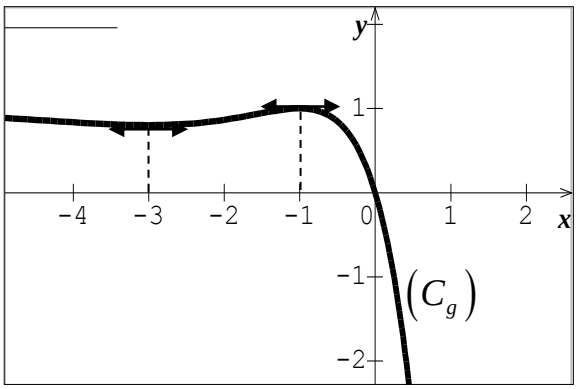
0.5 **b) En déduire que $u_n = 16 + \left(\frac{1}{4}\right)^n$ pour tout entier naturel n, puis déterminer la limite de la suite (u_n)**

0.5 **c) Déterminer la plus petite valeur de l'entier naturel n pour laquelle $u_n < 16,0001$**

Problème (8.5 points)

I- Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x)=1-(x+1)^2e^x$$



0.25 **1) Vérifier que $g(0)=0$**

1 **2) A partir de la courbe représentative (C_g) de la la fonction g (voir figure ci-contre)**

Montrer que :

$g(x)\geq 0$ pour tout x appartenant à $]-\infty,0]$

et que $g(x)\leq 0$ pour tout x appartenant à $[0,+\infty[$

II- On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x+1-(x^2+1)e^x$

Soit (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité : $2\ cm$)

0.75 **1) a) Vérifier que $f(x)=x+1-4\left(\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}\right)^2-e^x$ pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$ puis en déduire que $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$**

0.5 **b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x+1)]$ et en déduire que la droite (D) d'équation $y=x+1$ est asymptote à la courbe (C_f) au voisinage de $-\infty$**

0.25 **c) Montrer que la courbe (C_f) est en dessous de la droite (D)**

0.5 **2) a) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ (on pourra écrire $f(x)$ sous la forme $x\left[1+\frac{1}{x}-\left(x+\frac{1}{x}\right)e^x\right]$)**

0.25 **b) Montrer que la courbe (C_f) admet , au voisinage de $+\infty$, une branche parabolique dont on déterminera la direction.**

0.75 **3) a) Montrer que $f'(x)=g(x)$ pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$**

0.75 **b) Montrer que la fonction f est croissante sur $]-\infty,0]$ et décroissante sur $[0,+\infty[$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$**

0.75 **c) Montrer que la courbe (C_f) admet deux points d'inflexion d'abscisses -3 et -1**

1 **4) Construire, dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, la droite (D) et la courbe (C_f)**

(On prendra $f(-3)\approx -2,5$ et $f(-1)\approx -0,75$)

0.5 **5) a) Vérifier que $H:x\mapsto(x-1)e^x$ est une fonction primitive de la fonction $h:x\mapsto xe^x$ sur $\mathbb{R}$ puis montrer que $\int_{-1}^{0}xe^x\,dx=\frac{2}{e}-1$**

0.75 **b) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que : $\int_{-1}^{0}(x^2+1)e^x\,dx=3\left(1-\frac{2}{e}\right)$**

0.5 **c) Calculer, en cm^2, l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_f), la droite (D), l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x=-1$**

Exercice 1 : (3 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$**, on considère les points** $A(0,\ -2\ ,-2)$ **,** $B(1,-2\ ,\ -4)$ **et** $C(-3\ ,-1\ ,\ 2)$

1 **1) Montrer que** $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$ **et en déduire que** $2x+2y+z+6=0$ **est une équation cartésienne du plan** (ABC)

2) On considère la sphère (S) **dont une équation est** $x^2+y^2+z^2-2x-2z-23=0$

0.5 **Vérifier que la sphère** (S) **a pour centre** $\Omega(1,0,1)$ **et pour rayon** $R=5$

0.25 **3) a) Vérifier que** $\begin{cases}x=1+2t\\ y=2t\\ z=1+t\end{cases}\ ;(t\in\mathbb{R})$ **est une représentation paramétrique de la droite** (Δ) **passant par le point** Ω **et orthogonale au plan** (ABC)

0.5 **b) Déterminer les coordonnées de** H **point d'intersection de la droite** (Δ) **et du plan** (ABC)

0.75 **4) Vérifier que** $d(\Omega,(ABC))=3$ **, puis montrer que le plan** (ABC) **coupe la sphère** (S) **selon un cercle de rayon** 4 **, dont on déterminera le centre .**

Exercice 2 : (3 points)

0.75 **1) Résoudre dans l'ensemble** $\mathbb{C}$ **des nombres complexes l'équation :** $2z^2+2z+5=0$

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ **, on considère la rotation** R **de centre** O **et d'angle** $\frac{2\pi}{3}$

0.25 **a) Ecrire sous forme trigonométrique le nombre complexe** $d=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

0.5 **b) On considère le point** A **d'affixe** $a=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$ **et le point** B **image du point** A **par la rotation** R **. Soit** b **l'affixe du point** B**, montrer que** $b=d.a$

3) Soit t **la translation de vecteur** $\overrightarrow{OA}$ **et** C **l'image de** B **par la translation** t **et** c **l'affixe de** C

0.75 **a) Vérifier que** $c=b+a$ **et en déduire que** $c=a\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ *(on pourra utiliser la question 2)b))*

0.75 **b) Déterminer** $\arg\left(\frac{c}{a}\right)$ **puis en déduire que le triangle** OAC **est équilatéral .**

Exercice 3 : (3 points)

Une urne contient 9 boules indiscernables au toucher : cinq boules rouges portant les nombres 1 ; 1 ; 2 ; 2 ; 2 et quatre boules blanches portant les nombres 1 ; 2 ; 2 ; 2

On considère l'expérience suivante : on tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne .

Soient les événements :

A : **"les trois boules tirées sont de même couleur "**

B : **"les trois boules tirées portent le même nombre "**

C : **"les trois boules tirées sont de même couleur et portent le même nombre "**

1.5 **1) Montrer que** $p(A)=\frac{1}{6}$, $p(B)=\frac{1}{4}$ **et** $p(C)=\frac{1}{42}$

2) On répète l'expérience précédente trois fois avec remise dans l'urne des trois boules tirées après chaque tirage, et on considère la variable aléatoire X **qui est égale au nombre de fois de réalisation de l'événement** A

0.5 **a) Déterminer les paramètres de la variable aléatoire binomiale** X

1 **b) Montrer que** $p(X=1)=\frac{25}{72}$ **et calculer** $p(X=2)$

Problème : (11 points)

I) Soit g **la fonction numérique définie sur** IR **par :**

$$g(x)=e^x-x^2+3x-1$$

Le tableau ci-contre est le tableau de variations de la fonction g

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

0.25 **1) Vérifier que** $g(0)=0$

0.5 **2) Déterminer le signe de** $g(x)$ **sur chacun des intervalles** $]-\infty,0]$ **et** $[0,+\infty[$

II) Soit f **la fonction numérique définie sur** IR **par :** $f(x)=(x^2-x)\,e^{-x}+x$

et (C) **sa courbe représentative dans un repère orthonormé** $(O,\vec{i},\vec{j})$ **(unité :** $1\ cm$ **)**

0.5 **1) a) Vérifier que** $f(x)=\frac{x^2}{e^x}-\frac{x}{e^x}+x$ **pour tout** x **de** IR **puis montrer que** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

0.75 **b) Calculer** $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)$ **puis en déduire que** (C) **admet une asymptote** (D) **au voisinage de** $+\infty$ **d'équation** $y=x$

0.5 **c) Vérifier que:** $f(x)=\frac{x^2-x+xe^x}{e^x}$ **pour tout** x **de** IR **puis calculer** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

0.5 **d) Montrer que** $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty$ **et interpréter le résultat géométriquement .**

0.25 **2) a) Montrer** $f(x)-x$ **et** x^2-x **ont le même signe pour tout** x **de** IR

0.5 **b) En déduire que** (C) **est au dessus de** (D) **sur chacun des intervalles** $]-\infty,0]$ **et** $[1,+\infty[$ **, et en dessous de** (D) **sur l'intervalle** $[0,1]$

0.75	**3)a) Montrer que** $f'(x) = g(x)\,e^{-x}$ **pour tout** x **de** IR
0.5	**b) En déduire que la fonction** f **est décroissante sur** $]-\infty, 0]$ **et croissante sur** $[0, +\infty[$
0.25	**c) Dresser le tableau de variations de la fonction** f
0.25	**4)a) Vérifier que** $f''(x) = (x^2 - 5x + 4)e^{-x}$ **pour tout** x **de** IR
0.5	**b) En déduire que la courbe** (C) **admet deux points d'inflexion d'abscisses respectives 1 et 4**
1	**5) Construire** (D) **et** (C) **dans le même repère** $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ **(on prend :** $f(4) \approx 4.2$ **)**
0.5	**6)a) Montrer que la fonction** $H : x \mapsto (x^2 + 2x + 2)e^{-x}$ **est une primitive de la fonction** $h : x \mapsto -x^2 e^{-x}$ **sur** IR **puis en déduire que** $\int_0^1 x^2 e^{-x} dx = \frac{2e-5}{e}$
0.75	**b) A l'aide d'une intégration par parties montrer que** $\int_0^1 x e^{-x} dx = \frac{e-2}{e}$
0.75	**c) Calculer en** cm^2 **l'aire du domaine plan limité par** (C) **et** (D) **et les droites d'équations** $x = 0$ **et** $x = 1$
	III) Soit (u_n) **la suite numérique définie par :** $u_0 = \frac{1}{2}$ **et** $u_{n+1} = f(u_n)$ **pour tout** n **de** IN
0.75	**1) Montrer que** $0 \leq u_n \leq 1$ **pour tout** n **de** IN *(on pourra utiliser le résultat de la question II)3)b))*
0.5	**2) Montrer que la suite** (u_n) **est décroissante .**
0.75	**3) En déduire que** (u_n) **est convergente et déterminer sa limite.**

Exercice 1 : (3 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère la sphère (S) de centre $\Omega(2,1,2)$ et de rayon 3 et le plan (P) passant par le point $A(-1,0,3)$ et dont $\vec{u}(4,0,-3)$ est un vecteur normal .

0.5 **1) Montrer qu'une équation de (S) est $x^2+y^2+z^2-4x-2y-4z=0$**

0.5 **2) Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (P) est $4x-3z+13=0$**

0.5 **3) a) Vérifier que $\begin{cases} x=2+4t \\ y=1 \\ z=2-3t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par le point Ω et orthogonale au plan (P)**

0.5 **b) Déterminer les coordonnées de H point d'intersection de la droite (Δ) et du plan (P)**

0.25 **4) a) Calculer $d(\Omega,(P))$**

0.75 **b) Montrer que le plan (P) est tangent à la sphère (S) en un point que l' on déterminera .**

Exercice 2 : (3 points)

0.75 **1) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation $z^2-2\sqrt{2}z+4=0$**

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère le point A d'affixe $a=\sqrt{2}(1-i)$ et la rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$

0.25 **a) Ecrire a sous forme trigonométrique.**

0.5 **b) Vérifier que l'affixe du point B image du point A par la rotation R est $b=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$**

0.5 **3) a) On considère le point C d'affixe $c=1+i$, montrer que $b^2-c^2=2\sqrt{3}$**

0.5 **b) Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{OC}$ et D l'image du point B par la translation t Montrer que $OD=|b+c|$**

0.5 **c) En déduire que $OD\times BC=2\sqrt{3}$**

Exercice 3 : (3 points)

Une urne contient 12 boules indiscernables au toucher : 3 boules de couleur rouge portant chacune le nombre 1 , et 3 boules de couleur rouge portant chacune le nombre 2 , et 6 boules de couleur verte portant chacune le nombre 2

On tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne. On considère les événements suivants :

A : "Obtenir deux boules portant le même nombre " ;

B : "Obtenir deux boules de couleurs différentes "

C : "Obtenir deux boules portant deux nombres dont la somme est égale à 3"

1.5	**1) Montrer que** $p(A)=\frac{13}{22}$ **et** $p(B)=\frac{6}{11}$ **et calculer** $p(C)$
0.5	**2) a) Montrer que** $p(A\cap B)=\frac{3}{11}$
0.5	**b) Les événements** A **et** B **sont – ils indépendants ? Justifier la réponse.**
0.5	**3) Sachant que l'événement** B **est réalisé, calculer la probabilité d'obtenir deux boules portant le même nombre .**

Exercice 4 : (2 points)

0.5	**1)a) Montrer que la fonction** $H: x\mapsto xe^x$ **est une primitive de la fonction** $h: x\mapsto (x+1)e^x$ **sur** IR
0.5	**b) En déduire que** $\int_0^1 (x+1)e^x dx = e$
1	**2) En utilisant une intégration par parties , calculer** $\int_0^1 (x^2+2x-1)e^x dx$

Problème : (9 points)

I) Soit g **la fonction numérique définie sur** $]0,+\infty[$ **par :** $g(x)=x^3-1-2\ln^2 x+2\ln x$

Le tableau ci-contre est le tableau de variations de la fonction g **sur l'intervalle** $]0,+\infty[$

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

0.25	**1) Calculer** $g(1)$
0.5	**2) A partir de ce tableau , déterminer le signe de** $g(x)$ **sur chacun des intervalles** $]0,1]$ **et** $[1,+\infty[$

II) On considère la fonction numérique f **définie sur l'intervalle** $]0,+\infty[$ **par :** $f(x)=x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2x^2}+\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2$

Soit (C) **la courbe représentative de la fonction** f **dans un repère orthonormé** $(O,\vec{i},\vec{j})$

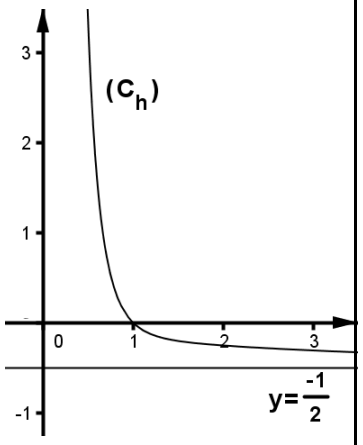
0.5	**1) a)Vérifier que** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$
0.5	**b) Montrer que la droite** (D) **d'équation** $y=x-\frac{1}{2}$ **est asymptote à la courbe** (C) **au voisinage de** $+\infty$
0.25	**c) Déterminer la position relative de la droite** (D) **et de la courbe** (C)
0.75	**2) Montrer que** $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)=+\infty$ **et interpréter géométriquement le résultat.**
1	**3) a) Montrer que** $f'(x)=\frac{g(x)}{x^3}$ **pour tout** x **appartenant à l'intervalle** $]0,+\infty[$
0.5	**b) Montrer que la fonction** f **est décroissante sur** $]0,1]$ **et croissante sur** $[1,+\infty[$
0.5	**c) Dresser le tableau de variations de la fonction** f **sur l'intervalle** $]0,+\infty[$
1	**4) Construire dans le repère** $(O,\vec{i},\vec{j})$ **la droite** (D) **et la courbe** (C) **(unité :** $1\ cm$ **)**

III) On considère la fonction numérique h définie sur $]0,+\infty[$ par : $h(x)=f(x)-x$

0.25 **1) a)** Vérifier que $h(1)=0$

b) Dans la figure ci-contre (C_h) est la représentation graphique de la fonction h

0.75 Déterminer le signe de $h(x)$ sur chacun des intervalles $]0\ ,\ 1]$ et $[1,+\infty[$ puis en déduire que $f(x)\leq x$ pour tout x de $[1,+\infty[$



2) On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$u_0=e$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0.75 **a)** Montrer par récurrence que $1\leq u_n\leq e$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0.75 **b)** Montrer que la suite (u_n) est décroissante .

(On pourra utiliser le résultat de la question III)1)b))

0.75 **c)** En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite .

Exercice 1 : (3 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points $A(1,-1,-1)$, $B(0,-2,1)$ et $C(1,-2,0)$

0.75 1) a) Montrer que $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$

0.5 b) En déduire que $x+y+z+1=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)

2) Soit (S) la sphère d'équation $x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z+1=0$

0.75 Montrer que le centre de la sphère (S) est $\Omega(2,-1,1)$ et que son rayon est $R=\sqrt{5}$

0.5 3) a) Calculer $d(\Omega,(ABC))$ la distance du point Ω au plan (ABC)

0.5 b) En déduire que le plan (ABC) coupe la sphère (S) selon un cercle (Γ) (la détermination du centre et du rayon de (Γ) n'est pas demandée)

Exercice 2 : (3 points)

0.75 1) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation : $z^2-2z+4=0$

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A , B C et D d'affixes respectives $a=1-i\sqrt{3}$, $b=2+2i$, $c=\sqrt{3}+i$ et $d=-2+2\sqrt{3}$

0.5 a) Vérifier que $a-d=-\sqrt{3}(c-d)$

0.25 b) En déduire que les points A , C et D sont alignés .

3) On considère z l'affixe d'un point M et z' l'affixe de M' image de M par la rotation R de centre O et d'angle $\frac{-\pi}{3}$

0.5 Vérifier que $z'=\frac{1}{2}az$

4) Soient H l'image du point B par la rotation R , h son affixe et P le point d'affixe p tel que $p=a-c$

0.5 a) Vérifier que $h=ip$

0.5 b) Montrer que le triangle OHP est rectangle et isocèle en O

Exercice 3 : (3 points)

Une urne contient dix boules : trois boules vertes , six boules rouges et une boule noire indiscernables au toucher . On tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne .

On considère les événements suivants : A : « Obtenir trois boules vertes . »
B : « Obtenir trois boules de même couleur . »
C : « Obtenir au moins deux boules de même couleur . »

2 1) Montrer que $p(A)=\frac{1}{120}$ et $p(B)=\frac{7}{40}$

1 2) Calculer $p(C)$.

Problème : (11 points)

Première partie :

Soit f la fonction numérique définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=x+\frac{1}{2}-\ln x+\frac{1}{2}(\ln x)^2$

et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité : $1\ cm$)

0.5 1) Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$ puis interpréter le résultat géométriquement

0.25 2) a) Vérifier que pour tout x de $]0,+\infty[$, $f(x)=x+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\ln x-1\right)\ln x$

0.5 b) En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

0.5 c) Montrer que pour tout x de $]0,+\infty[$, $\frac{(\ln x)^2}{x}=4\left(\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$

puis en déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=0$

0.75 d) Montrer que (C) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction asymptotique la droite (Δ) d'équation $y=x$

0.5 3)a) Montrer que pour tout x de $]0,1]$: $(x-1)+\ln x\le 0$

et que pour tout x de $[1,+\infty[$: $(x-1)+\ln x\ge 0$

1 b) Montrer que pour tout x de $]0,+\infty[$, $f'(x)=\frac{x-1+\ln x}{x}$

0.5 c) Dresser le tableau de variations de la fonction f

0.5 4) a) Montrer que $f''(x)=\frac{2-\ln x}{x^2}$ pour tout x de $]0,+\infty[$

0.5 b) En déduire que (C) admet un point d'inflexion dont on déterminera les coordonnées .

0.5 5)a) Montrer que pour tout x de $]0,+\infty[$, $f(x)-x=\frac{1}{2}(\ln x-1)^2$ et déduire la position relative de (C) et (Δ)

1 b) Construire (Δ) et (C) dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

0.5 6)a) Montrer que la fonction $H:x\mapsto x\ln x-x$ est une primitive de la fonction $h:x\mapsto\ln x$ sur $]0,+\infty[$

0.75 b) A l'aide d'une intégration par parties , montrer que $\int_1^e(\ln x)^2dx=e-2$

0.5 c) Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par (C) et (Δ) et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$

Deuxième partie :

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0.5 1) a)Montrer par récurrence que $1 \leq u_n \leq e$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0.5 b) Montrer que la suite (u_n) est croissante .

0.5 c) En déduire que la suite (u_n) est convergente .

0.75 2) Calculer la limite de la suite (u_n) .

Exercice 1 : (3 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points $A(1,2,2)$, $B(3,-1,6)$ et $C(1,1,3)$

0.75 1) a) Vérifier que $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{i}-2\vec{j}-2\vec{k}$

0.5 b) En déduire que $x-2y-2z+7=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)

2) Soient les points $E(5,1,4)$ et $F(-1,1,12)$ et (S) l'ensemble des points M vérifiant

0.75 $\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{MF}=0$. Montrer que (S) est la sphère de centre $\Omega(2,1,8)$ et de rayon $R=5$

0.5 3) a) Calculer $d(\Omega,(ABC))$ distance du point Ω au plan (ABC)

0.5 b) En déduire que le plan (ABC) coupe la sphère (S) selon un cercle (Γ) de rayon $r=4$

Exercice 2 : (3 points)

0.75 1) a) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation : $z^2-3z+3=0$

0.5 b) On pose $a=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, écrire a sous forme trigonométrique .

0.5 2) On considère le nombre complexe $b=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, vérifier que $b^2=i$

0.5 3) On pose $h=\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}$, montrer que $h^4+1=a$

4) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère le point B d'affixe b et R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$

0.5 a) Soit c l'affixe du point C image du point B par la rotation R . Montrer que $c=ib$

0.25 b) En déduire la nature du triangle OBC

Exercice 3 : (3 points)

Une urne contient une boule rouge , deux boules blanches et trois boules noires indiscernables au toucher . On tire au hasard successivement et avec remise trois boules de l'urne .

Soient les événements suivants :

A : "les trois boules tirées sont de même couleur "

B : "Il n' y a aucune boule blanche parmi les boules tirées "

C : "Il y a exactement deux boules blanches parmi les boules tirées "

2 1) Montrer que $p(A)=\frac{1}{6}$ et $p(B)=\frac{8}{27}$

1 2) Calculer $p(C)$.

Problème : (11 points)

Première partie :

Soit f la fonction numérique définie sur IR^* par : $f(x)=2+8\left(\frac{x-2}{x}\right)^2 e^{x-4}$

et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ (unité : $1\ cm$)

0.5 1) a) Vérifier que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$ et interpréter le résultat géométriquement

0.5 b) Vérifier que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$ et interpréter le résultat géométriquement

0.5 2) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

0.5 b) Montrer que la courbe (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$

0.75 3) a) Montrer que $f'(x)=\frac{8(x-2)(x^2-2x+4)e^{x-4}}{x^3}$ pour tout x de IR^*

0.25 b) Vérifier que pour tout x de IR , $x^2-2x+4>0$

0.75 c) Montrer que la fonction f est strictement décroissante sur $]0,2]$ et strictement croissante sur chacun des intervalles $]-\infty,0[$ et $[2,+\infty[$

0.5 d) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur IR^*

1 4) Construire la courbe (C) dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

0.5 5) a) Vérifier que la fonction $H:x\mapsto\frac{1}{x}e^{x-4}$ est une fonction primitive de la fonction $h:x\mapsto\frac{x-1}{x^2}e^{x-4}$ sur $[2,4]$

0.25 b) Vérifier que $f(x)=2+8e^{x-4}-32\frac{(x-1)}{x^2}e^{x-4}$ pour tout x de IR^*

0.5 c) Calculer l'intégrale $\int_2^4 e^{x-4}dx$

0.75 d) Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=2$ et $x=4$

Deuxième partie :

1) On considère la fonction numérique g définie sur $[2,4]$ par $g(x)=8(x-2)e^{x-4}-x^2$

0.25 a) Calculer $g(4)$

0.5 b) Vérifier que pour tout x de l'intervalle $[2,4]$, $g(x)=-(x-4)^2e^{x-4}+x^2(e^{x-4}-1)$

0.5	c) vérifier que pour tout x de l'intervalle $[2,4]$: $e^{x-4}-1\leq 0$ puis en déduire que pour tout x de l'intervalle $[2,4]$: $g(x)\leq 0$
0.5	2) a) Vérifier que pour tout x de l'intervalle $[2,4]$, $f(x)-x=\left(\frac{x-2}{x^2}\right)g(x)$
0.25	b) En déduire que pour tout x de l'intervalle $[2,4]$, $f(x)\leq x$
	3) Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0=3$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout n de IN
0.5	a) Montrer par récurrence que $2\leq u_n\leq 4$ pour tout n de IN
0.5	b) Déterminer la monotonie de la suite (u_n) et en déduire qu'elle est convergente
0.75	c) Calculer la limite de la suite (u_n).

Exercice 1 : (4 points)

Soit (u_n) **la suite numérique définie par :** $u_0=\frac{3}{2}$ **et** $u_{n+1}=\frac{2u_n}{2u_n+5}$ **pour tout** n **de** IN

0.25 **1) Calculer** u_1

0.5 **2) Montrer par récurrence que pour tout** n **de** IN **,** $u_n>0$

1 **3)a) Montrer que pour tout** n **de** IN **,** $0<u_{n+1}\leq\frac{2}{5}u_n$

puis en déduire que pour tout n **de** IN **,** $0<u_n\leq\frac{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n$

0.5 **b) Calculer** $\lim u_n$

4) On considère la suite numérique (v_n) **définie par** $v_n=\frac{4u_n}{2u_n+3}$ **pour tout** n **de** IN **.**

0.75 **a) Montrer que** (v_n) **est une suite géométrique de raison** $\frac{2}{5}$

1 **b) Déterminer** v_n **en fonction de** n **et en déduire** u_n **en fonction de** n **pour tout** n **de** IN **.**

Exercice 2 : (5 points)

1) Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ **des nombres complexes, on considère l'équation :**

$$(E)\ :\ z^2-2\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)z+16=0$$

0.5 **a) Vérifier que le discriminant de l'équation** (E) **est** $\Delta=-4\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2$

1 **b) En déduire les solutions de l'équation** (E) **.**

2) Soient les nombres complexes $a=\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)+i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$, $b=1+i\sqrt{3}$ **et** $c=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$

0.75 **a) Vérifier que** $b\overline{c}=a$ **, puis en déduire que** $ac=4b$

0.5 **b) Ecrire les nombres complexes** b **et** c **sous forme trigonométrique.**

0.5 **c) En déduire que** $a=4\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$

3) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ **, on considère les points** B,C **et** D **d'affixes respectives** b **,** c **et** d **telle que** $d=a^4$ **. Soit** z **l'affixe d'un point** M **du plan et** z' **l'affixe de** M' **image de** M **par la rotation** R **de centre** O **et d'angle** $\frac{\pi}{12}$

0.5 **a) Vérifier que** $z'=\frac{1}{4}az$

0.25 **b) Déterminer l'image du point** C **par la rotation** R

0.25 **c) Déterminer la nature du triangle** OBC **.**

0.75 **d) Montrer que** $a^4=128b$ **et en déduire que les points** O **,** B **et** D **sont alignés**

Exercice 3 : (4 points)

On considère la fonction numérique g **définie sur** $]0,+\infty[$ **par** $g(x)=2\sqrt{x}-2-\ln x$

0.5 **1)a) Montrer que pour tout** x **de** $]0,+\infty[$, $g'(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{x}$

0.5 **b) Montrer que** g **est croissante sur** $[1,+\infty[$

0.5 **c) en déduire que pour tout** x **de** $[1,+\infty[$, $0\le \ln x\le 2\sqrt{x}$ **(remarquer que** $2\sqrt{x}-2\le 2\sqrt{x}$ **)**

1 **d) Montrer que pour tout** x **de** $[1,+\infty[$, $0\le \dfrac{(\ln x)^3}{x^2}\le \dfrac{8}{\sqrt{x}}$ **et en déduire** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)^3}{x^2}$

0.75 **2) a) Montrer que la fonction** $G: x\mapsto x\left(-1+\dfrac{4}{3}\sqrt{x}-\ln x\right)$ **est une primitive de** g **sur** $]0,+\infty[$

0.75 **b) Calculer l'intégrale** $\int_1^4 g(x)dx$

Problème : (7 points)

On considère la fonction numérique f **définie sur** $\mathbb{R}$ **par** $f(x)=-x+\dfrac{5}{2}-\dfrac{1}{2}e^{x-2}\left(e^{x-2}-4\right)$

et (C) **sa courbe représentative dans un repère orthonormé** $\left(O,\vec{i};\vec{j}\right)$ **(unité : 2cm)**

0.5 **1) Montrer que** $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ **et** $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$

0.5 **2) a) Démontrer que la droite** (Δ) **d'équation** $y=-x+\dfrac{5}{2}$ **est une asymptote à la courbe** (C) **au voisinage de** $-\infty$

0.75 **b) Résoudre l'équation** $e^{x-2}-4=0$ **puis montrer que la courbe** (C) **est au dessus de** (Δ) **sur l'intervalle** $]-\infty,2+\ln 4]$ **et en dessous de** (Δ) **sur l'intervalle** $[2+\ln 4,+\infty[$

0.5 **3) Montrer que** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-\infty$ **puis interpréter géométriquement le résultat**

0.5 **4) a) Montrer que pour tout** x **de** $\mathbb{R}$ $f'(x)=-\left(e^{x-2}-1\right)^2$

0.25 **b) Dresser le tableau de variations de la fonction** f

0.75 **5) Calculer** $f''(x)$ **pour tout** x **de** $\mathbb{R}$ **puis montrer que** $A(2,2)$ **est un point d'inflexion de** (C)

0.5 **6) Montrer que l'équation** $f(x)=0$ **admet une solution unique** α **telle que** $2+\ln 3<\alpha<2+\ln 4$

1 **7) Construire** (Δ) **et** (C) **dans le repère** $\left(O,\vec{i};\vec{j}\right)$ **ci-dessous (on prend** $\ln 2\approx 0,7$ **et** $\ln 3\approx 1,1$**)**

0.5	**8) a) Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\square$**
0.75	**b) Construire dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe représentative de la fonction f^{-1}** **(remarquer que la droite (Δ) est perpendiculaire à la première bissectrice du repère)**
0.5	**c) Calculer $\left(f^{-1}\right)'(2-\ln 3)$ (Remarquer que $f^{-1}(2-\ln 3)=2+\ln 3$)**

./.

Exercice 1 : (2 points)

Soit (u_n) **la suite numérique définie par :** $u_0 = 1$ **et** $u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 8}{2u_n - 5}$ **pour tout** n **de** IN

0.5 **1) Montrer que pour tout** n **de** IN **,** $u_n < 2$

2) On pose pour tout n **de** IN **,** $v_n = \dfrac{u_n - 3}{u_n - 2}$

0.5 **a) Montrer que** (v_n) **est une suite arithmétique de raison** 2

0.75 **b) Ecrire** v_n **en fonction de** n **et en déduire** u_n **en fonction de** n **pour tout** n **de** IN **.**

0.25 **c) Calculer la limite de la suite** (u_n)

Exercice 2 : (5 points)

0.75 **1) Résoudre dans l'ensemble** $\mathbb{C}$ **des nombres complexes l'équation :** $z^2 - \sqrt{2}z + 1 = 0$

2) On pose $a = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

0.75 **a) Ecrire** a **sous forme trigonométrique et en déduire que** a^{2020} **est un nombre réel**

0.5 **b) Soit le nombre complexe** $b = \cos\dfrac{\pi}{8} + i\sin\dfrac{\pi}{8}$ **. Prouver que** $b^2 = a$

3) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ **, on considère les points** A **,** B **et** C **d'affixes respectives** a **,** b **et** c **tel que** $c = 1$**. La rotation** R **de centre** O **et d'angle** $\dfrac{\pi}{8}$ **transforme le point** M **d'affixe** z **au point** M' **d'affixe** z'**.**

0.25 **a) Vérifier que** $z' = bz$

0.5 **b) Déterminer l'image de** C **par la rotation** R **et montrer que** A **est l'image de** B **par** R **.**

0.75 **4) a) Montrer que** $|a - b| = |b - c|$ **et en déduire la nature du triangle** ABC

0.5 **b) Déterminer une mesure de l'angle** $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$

5) Soit T **la translation de vecteur** $\vec{u}$ **et** D **l'image de** A **par** T

0.25 **a) Vérifier que l'affixe de** D **est** $b^2 + 1$

0.75 **b) Montrer que** $\dfrac{b^2 + 1}{b} = b + \bar{b}$ **et en déduire que les points** O **,** B **et** D **sont alignés**

Exercice 3 : (4 points)

On considère la fonction numérique u définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x)=e^x-2x+2-3e^{-x}$

0.5 **1)a) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$, $u'(x)=\dfrac{(e^x-1)^2+2}{e^x}$**

0.25 **b) poser le tableau de variation de la fonction u (sans calcul de limite) ;**

0.5 **c) En déduire le signe de la fonction u sur $\mathbb{R}$ (remarquer que $u(0)=0$)**

2) Soit la fonction v définie sur $\mathbb{R}$ par $v(x)=e^{2x}-2xe^x+2e^x-3$

0.5 **a)Vérifier que pour tout x de $\mathbb{R}$, $v(x)=e^x u(x)$**

0.5 **b) En déduire le signe de la fonction v sur $\mathbb{R}$**

0.5 **3) a) Montrer que la fonction W définie par $W(x)=\frac{1}{2}e^{2x}+(4-2x)e^x-3x$ est une primitive de la fonction v sur $\mathbb{R}$**

0.5 **b) Calculer l'intégrale $\int_0^2 v(x)dx$**

0.75 **c) Montrer que $\dfrac{9}{2}$ est le minimum absolu de la fonction W sur $\mathbb{R}$.**

Problème : (9 points)

I - Soit g la fonction numérique définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x)=e^{1-x}+\dfrac{1}{x}-2$

0.5 **1) Monter que $g'(x)<0,$ pour tout $x\in]0,+\infty[$**

0.5 **2) Déduire le tableau de signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$; (remarquer que $g(1)=0$)**

II – On considère la fonction numérique f définie sur $]0,+\infty[$ par :

$f(x)=(1-x)e^{1-x}-x^2+5x-3-2\ln x$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité : 2 cm)

0.5 **1) Montrer que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=+\infty$ puis interpréter le résultat géométriquement**

0.5 **2) a) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$**

0.75 **b) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-\infty$ puis interpréter le résultat géométriquement**

1 **3) a) Montrer que pour tout x de $]0,+\infty[$, $f'(x)=(x-2)g(x)$**

0.75 **b) Montrer que la fonction f est décroissante sur $]0,1]$ et sur $[2,+\infty[$ et croissante sur $[1,2]$**

0.25 **c) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $]0,+\infty[$, (on admet $f(2)\approx 1,25$)**

0.5 **4) Sachant que $f(3) \approx 0,5$ et $f(4) \approx -1,9$ montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique dans l'intervalle $]3,4[$.**

1 **5) Construire (C) dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$**

III - On pose $h(x)=f(x)-x$ pour tout x de l'intervalle $[1,2]$

0.5 **1) a) A partir du tableau de variations de la fonction h ci-contre montrer que $f(x)\le x$ pour tout x de l'intervalle $[1,2]$**

x	1	2
$h(x)$	0 ↘	$h(2)$

0.25 **b) Montrer que 1 est l'unique solution de l'équation $f(x)=x$ sur l'intervalle $[1,2]$**

2) Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0=2$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0.75 **a) Montrer par récurrence que $1\le u_n\le 2$ pour tout n de $\mathbb{N}$**

0.5 **b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.**

0.75 **c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$**