FACULTÉ DE MÉDECINE ET DE PHARMACIE · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès à la Faculté de Médecine et de Pharmacie

Année universitaire 2020–2021

2020

Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14
B	B	C	D	D	A	C	B	B	A	A	D	E	C

Q15	Q16	Q17	Q18	Q19	Q20
B	B	B	A	B	C

Q1 ✔ Réponse B

$z^8 = (\sqrt{2})^8 e^{8i\pi/3} = 16\,e^{2i\pi/3} = 16\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -8 + 8i\sqrt{3}$.

Q2 ✔ Réponse B

$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$, donc $\cos^3\theta = \frac{1}{4}(\cos 3\theta + 3\cos\theta)$.

Q3 ✔ Réponse C

$(1-x)^n(1+x)^n = (1-x^2)^n$ avec $0 < 1-x^2 < 1$: la limite est 0.

Q4 ✔ Réponse D

Il faut $x \neq 0$, $x \neq 1$ et $1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x} > 0$, c'est-à-dire $x < -1$ ou $x > 0$. D'où $D_f =]-\infty, -1[\cup]0, 1[\cup]1, +\infty[$.

Q5 ✔ Réponse D

$f'(x) = (2x-1)e^{1/x} + (x^2 - x) \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) e^{1/x} =$
$\left(2x - 1 - 1 + \frac{1}{x}\right) e^{1/x} = \left(2x - 2 + \frac{1}{x}\right) e^{1/x}$.

Q6 ✔ Réponse A

Pour $z = \sqrt{3}\,i$: $z - 1 = -1 + i\sqrt{3} = 2e^{2i\pi/3}$ et $z + 1 = 1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\pi/3}$. Les deux conditions sont vérifiées. (Le point est l'intersection de la demi-droite issue de 1 de direction $\frac{2\pi}{3}$ et de la demi-droite issue de -1 de direction $\frac{\pi}{3}$: il est unique.)

Q7 ✔ Réponse C

$ie^{i\theta/2} = e^{i\varphi}$ avec $\varphi = \frac{\theta+\pi}{2}$, et $1 + e^{i\varphi} = 2\cos\frac{\varphi}{2}\,e^{i\varphi/2}$.
Donc $|z| = 2\left|\cos\frac{\theta+\pi}{4}\right| = 2\cos\frac{\theta+\pi}{4}$, car $\frac{\theta+\pi}{4} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Q8 ✔ Réponse B

$2n\ln\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \sim 2n \times \left(-\frac{2}{n+1}\right) \to -4$. La limite vaut e^{-4}.

Q9 ✔ Réponse B

$u_k = 2 \times 3^{-(k-1)}$, donc le produit vaut
$2^n \times 3^{-(0+1+\cdots+(n-1))} = \frac{2^n}{3^{\frac{n(n-1)}{2}}}$.

Q10 ✔ Réponse A

$f(x) = g(x)(x-1)$ avec $g(x) = (x-5)(x-4)(x-3)(x-2)$, donc $f'(1) = g(1) = (-4)(-3)(-2)(-1) = 24$.

Q11 ✔ Réponse A

Avec $u = 1 + (\ln x)^2$: $u' = \frac{2\ln x}{x}$, donc $f = \frac{u'}{u}$ et $F(x) = \ln\left(1 + (\ln x)^2\right)$, qui vaut bien 0 en $x = 1$.

Q12 ✔ Réponse D

$\frac{2t+3}{t+2} = 2 - \frac{1}{t+2}$. L'intégrale vaut
$2 - [\ln(t+2)]_0^1 = 2 - \ln\frac{3}{2} = 2 + \ln\frac{2}{3}$.

Q13 ✔ Réponse E

Pour $z \neq 0$: $z + \frac{1}{z}$ est réel si et seulement si il est égal à son conjugué, $z + \frac{1}{z} = \bar{z} + \frac{1}{\bar{z}}$, ce qui s'écrit $(z - \bar{z})\left(1 - \frac{1}{|z|^2}\right) = 0$.
Donc z est réel (non nul) ou $|z| = 1$: c'est l'axe des réels privé de O, union le cercle unité.

Q14 ✔ Réponse C

Une limite ℓ vérifie
$\ell = (\ell-1)^2 + 1 \iff \ell^2 - 3\ell + 2 = 0 \iff \ell = 1$ ou $\ell = 2$.
Or $w_1 = \frac{5}{4} \in [1, 2]$, et pour $x \in [1, 2]$: $1 \leq (x-1)^2 + 1 \leq x$. La suite est donc décroissante à partir du rang 1, avec $w_n \leq \frac{5}{4} < 2$: sa limite est 1.

Q15 ✔ Réponse B

$x\ln\sqrt{1 + \frac{a}{x}} = \frac{x}{2}\ln\left(1 + \frac{a}{x}\right) \sim \frac{x}{2} \times \frac{a}{x} = \frac{a}{2}$. Donc $f(x) \to 1 + \frac{a}{2}$.

Q16 ✔ Réponse B

$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin\widehat{A} = 50\sin\widehat{A} \leq 50$, avec égalité pour un angle droit en A.

Q17 ✔ Réponse B

$f(1) = 1 + 0 + 1 = 2$, donc $f^{-1}(2) = 1$. $f'(x) = 3x^2 + \frac{3}{x}$ et $f'(1) = 6 \neq 0$, d'où $\left(f^{-1}\right)'(2) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{6}$.

Q18 ✔ Réponse A

Une primitive de $e^x \sin x$ est $\frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2}$ (deux intégrations par parties, ou dériver pour vérifier). L'intégrale vaut
$\frac{e^{\pi/2}(1-0)}{2} - \frac{1 \times (0-1)}{2} = \frac{1 + e^{\pi/2}}{2}$.

Q19 ✔ Réponse B

$f'(x) = -xe^{-x^2/2}$. La fonction $g(x) = xe^{-x^2/2}$ a pour dérivée $(1-x^2)e^{-x^2/2} \geq 0$ sur $[0,1]$: elle croît de $g(0) = 0$ à $g(1) = e^{-1/2}$.

Donc $0 \leq g(x) \leq \dfrac{1}{\sqrt{e}}$, soit $-\dfrac{1}{\sqrt{e}} \leq f'(x) \leq 0$.

Q20 ✔ Réponse C

Quand $x \to +\infty$:

$$\begin{aligned}\sqrt{x^3+2x^2+3} &= x^{3/2}\sqrt{1+\tfrac{2}{x}+\tfrac{3}{x^3}} \\ &= x^{3/2} + x^{1/2} + o(1) \\ ax\sqrt{x+b} &= ax^{3/2} + \frac{ab}{2}x^{1/2} + o(1).\end{aligned}$$

Donc $f(x) = (1-a)x^{3/2} + \left(1 - \dfrac{ab}{2}\right)x^{1/2} + o(1)$. La limite est finie si et seulement si $a = 1$ et $1 - \dfrac{b}{2} = 0$, soit $b = 2$ (la limite vaut alors 0).