FACULTÉ DE MÉDECINE ET DE PHARMACIE · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès à la Faculté de Médecine et de Pharmacie

Année universitaire 2021–2022

2021

Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14
B	B	D	E	B	E	E	B	D	C	A	C	C	E

Q15	Q16	Q17	Q18	Q19	Q20
A	B	B	C	D	A

Q1 ✔ Réponse B

$\ln(e+x) = 1 + \ln\left(1+\frac{x}{e}\right) \sim 1 + \frac{x}{e}$, donc $\sqrt{\ln(e+x)} - 1 \sim \frac{x}{2e}$; et $\sqrt{x+1} - 1 \sim \frac{x}{2}$.

Le quotient tend vers $\frac{x/(2e)}{x/2} = \frac{1}{e}$.

Q2 ✔ Réponse B

$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$ et

$\left(\ln\frac{x+1}{x}\right)' = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} = -\frac{1}{x(x+1)}$. Donc

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{(1-x)x(x+1)} = \frac{1}{(1-x)^2}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x(1-x^2)}.$$

Q3 ✔ Réponse D

$i(7-15i) = 15+7i$, donc $\frac{7-15i}{15+7i} = \frac{1}{i} = -i$. Comme $2021 = 4\times 505 + 1$: $(-i)^{2021} = (-i)^1 = -i$.

Q4 ✔ Réponse E

C'est une somme géométrique de raison $-x$: elle vaut $\frac{1-(-x)^{n+1}}{1+x}$, et $(-x)^{n+1} \to 0$ car $|x| < 1$. La limite est $\frac{1}{1+x}$.

Q5 ✔ Réponse B

$g(x) = x^5 + x - 1$ a pour dérivée $5x^4 + 1 > 0$: g est strictement croissante et continue, de $-\infty$ à $+\infty$. Elle s'annule exactement une fois (entre 0 et 1, puisque $g(0) = -1$ et $g(1) = 1$).

Q6 ✔ Réponse E

En passant au module : $|z|^2 = |15 - 20i| = 25$, donc $|z| = 5$ et $|(1+i)z| = \sqrt{2}\times 5 = 5\sqrt{2}$.

Q7 ✔ Réponse E

$\sqrt{\ln(1+x^2)} \sim \sqrt{x^2} = |x|$, donc $f(x) \sim \frac{|x|}{x}$: $f \to 1$ en 0^+ et $f \to -1$ en 0^-. Les limites à droite et à gauche diffèrent : pas de limite en 0.

Q8 ✔ Réponse B

$u_{n+1} - u_n = u_n^2 \geq 0$: la suite est croissante, donc $u_n \geq 1$. Si elle convergeait vers ℓ, on aurait $\ell = \ell^2 + \ell$, soit $\ell = 0$, impossible puisque $u_n \geq 1$. Croissante et non convergente, elle tend vers $+\infty$.

Q9 ✔ Réponse D

$\frac{x}{1+e^{-x^2}} = \frac{xe^{x^2}}{e^{x^2}+1}$, dont une primitive est $\frac{1}{2}\ln\left(e^{x^2}+1\right)$.

L'intégrale vaut $\frac{1}{2}(\ln(e+1) - \ln 2) = \ln\sqrt{\frac{1+e}{2}}$.

Q10 ✔ Réponse C

$f(x) = x^2 + x\ln x - x + c$ (car $(x\ln x - x)' = \ln x$).

$f(1) = 1 - 1 + c = 4$, donc $c = 4$ et

$f(e) = e^2 + e - e + 4 = e^2 + 4$.

Q11 ✔ Réponse A

$|z|^2 = 1 + (1+\sqrt{2})^2 = 4 + 2\sqrt{2}$ et

$\left(2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{8}\right)^2 = 8\times\frac{2+\sqrt{2}}{4} = 4 + 2\sqrt{2}$: $|z| = 2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{8}$.

z est dans le premier quadrant avec

$\tan(\arg z) = 1 + \sqrt{2} = \tan\frac{3\pi}{8}$, donc $\arg z \equiv \frac{3\pi}{8}\ [2\pi]$.

Q12 ✔ Réponse C

$\int_1^2 f'f'' = \left[\frac{(f')^2}{2}\right]_1^2 = \frac{f'(2)^2 - f'(1)^2}{2} = 8$, donc

$(f'(2) - f'(1))(f'(2) + f'(1)) = 16$ et $f'(2) + f'(1) = \frac{16}{2} = 8$.

Q13 ✔ Réponse C

(S_n) converge si et seulement si $|q| < 1$, et alors $\lim S_n = \frac{q}{1-q}$.

$\frac{q}{1-q} = 4 \iff q = \frac{4}{5}$.

Q14 ✔ Réponse E

Soit $J = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}\,dx$. Le changement $x = \frac{\pi}{2} - t$ échange les bornes $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{3}$ ainsi que sin et cos : $I = J$.

Or $I + J = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$, donc $I = \frac{\pi}{12}$.

Q15 ✔ Réponse A

Identité du parallélogramme :

$|z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2 = 2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right) = 4$. Donc

$|z_1 - z_2|^2 = 4 - 3 = 1$.

Q16 ✔ Réponse B

Avec $v_n = u_n^2$: $2v_n = v_{n+1} + v_{n-1}$, soit $v_{n+1} - v_n = v_n - v_{n-1}$.

La suite (v_n) est arithmétique de raison $v_1 - v_0 = 1$: $v_n = n$, donc $u_n = \sqrt{n} \to +\infty$.

Q17 ✔ Réponse B

Il faut d'abord la continuité en 0 : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x+1} = 1 = f(0) = b$.
Ensuite les dérivées à gauche (a) et à droite ($-\frac{1}{(0+1)^2} = -1$) doivent être égales : $a = -1$.

Q18 ✔ Réponse C

$\int_{-1}^{1} (3x^2 + 2ax + b)\,dx = 2 + 0 + 2b < 2$ donne $b < 0$. Le discriminant de $3x^2 + 2ax + b$ vaut $4a^2 - 12b > 0$: deux solutions réelles.

Q19 ✔ Réponse D

$\Delta = \sin^2 2\alpha - 4\sin^2\alpha = -4\sin^4\alpha = (2i\sin^2\alpha)^2$, d'où

$$z = \sin\alpha\cos\alpha \pm i\sin^2\alpha = \sin\alpha\, e^{\pm i\alpha}.$$

$OM_1 = OM_2 = \sin\alpha$ et l'angle $\widehat{M_1OM_2}$ vaut 2α. Le triangle est équilatéral si $2\alpha = \dfrac{\pi}{3}$, soit $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$.

Q20 ✔ Réponse A

f_n est strictement décroissante, $f_n(0) = 1 > 0$ et $f_n(1) = e^{-1} - n < 0$: il existe un unique $\alpha_n \in]0;1[$ tel que $f_n(\alpha_n) = 0$.
Alors $n\alpha_n = e^{-\alpha_n}$, donc $0 < \alpha_n \leq \dfrac{1}{n} \to 0$ et $n\alpha_n = e^{-\alpha_n} \to e^0 = 1$.