FACULTÉ DE MÉDECINE ET DE PHARMACIE · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès à la Faculté de Médecine et de Pharmacie

Année universitaire 2022–2023

2022

Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14
C	A	D	C	B	A	D	B	D	B	A	D	B	B

Q15	Q16	Q17	Q18	Q19	Q20
C	A	D	B	A	E

Q1 ✔ Réponse C

Pour $z \neq -1$: $2z-1 = z(z+1) \iff z^2 - z + 1 = 0$.

Discriminant $-3 = (i\sqrt{3})^2$, d'où $z = \dfrac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ (différents de -1).

Q2 ✔ Réponse A

L'équation est linéaire et homogène :
$g'' + 2g' + 4g = 2(f'' + 2f' + 4f) = 0$. Donc g est solution de la même équation.

Q3 ✔ Réponse D

$e^{-i\theta} - e^{i\theta} = -2i\sin\theta$, donc $|z| = 2|\sin\theta| = 2\sin\theta$ puisque $\sin\theta > 0$ sur $]0;\pi[$.

Q4 ✔ Réponse C

Avec la quantité conjuguée :
$$n - \sqrt{n^2-n} = \frac{n}{n+\sqrt{n^2-n}} = \frac{1}{1+\sqrt{1-\frac{1}{n}}} \to \frac{1}{2}.$$

Q5 ✔ Réponse B

C'est le plan médiateur de $[AB]$: vecteur normal $\overrightarrow{AB}(1;-2;-2)$, passant par le milieu $I\left(\frac{3}{2};1;2\right)$.
$\left(x-\frac{3}{2}\right) - 2(y-1) - 2(z-2) = 0 \iff 2x - 4y - 4z + 9 = 0 \iff 2x - 4y - 4z = -9$.

Q6 ✔ Réponse A

$\arg z \equiv \dfrac{7\pi}{6} - \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{2\pi}{3}$, donc $z = \sqrt{2}\,e^{2i\pi/3}$ et
$z^3 = 2\sqrt{2}\,e^{2i\pi} = 2\sqrt{2}$, réel : sa partie imaginaire est 0.

Q7 ✔ Réponse D

$$\int_0^1 \frac{e^{\alpha x}}{1+e^{\alpha x}}\,dx = \frac{1}{\alpha}\left[\ln(1+e^{\alpha x})\right]_0^1 = \frac{1}{\alpha}\ln\frac{1+e^{\alpha}}{2}.$$
L'égalité donne $\ln\dfrac{1+e^{\alpha}}{2} = 1$, soit $1+e^{\alpha} = 2e$ et $\alpha = \ln(2e-1)$ (bien non nul).

Q8 ✔ Réponse B

Avec $\omega = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$: $(1+i\sqrt{3})\omega + i = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} - i + i = \omega$, donc Ω est le point fixe et $z' - \omega = (1+i\sqrt{3})(z-\omega)$.
Pour $M \neq \Omega$: $\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \arg(1+i\sqrt{3}) = \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

Q9 ✔ Réponse D

Dans le repère $A(0;0)$, $B(1;0)$, $C(1;1)$, $D(0;1)$: $E(1-x;0)$ et $F(1;1-x)$.
L'aire vaut $\dfrac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{ED}\right)\right|$ avec $\overrightarrow{EF}(x;1-x)$ et $\overrightarrow{ED}(x-1;1)$: $\mathcal{A}(x) = \dfrac{x^2-x+1}{2}$, minimale pour $x = \dfrac{1}{2}$.

Q10 ✔ Réponse B

Avec $r = |z|$: $z = (r-3) + i\sqrt{3}$, donc
$r^2 = (r-3)^2 + 3 \iff 0 = -6r + 12 \iff r = 2$.

Q11 ✔ Réponse A

$|iz-1| = |i(z+i)| = |z+i| = MA$ et
$|\bar{z}+i| = |\overline{z-i}| = |z-i| = MB$.
La condition s'écrit $MA = MB$ (avec $M \neq B$, déjà exclu puisque B n'est pas équidistant) : c'est la médiatrice de $[AB]$, c'est-à-dire l'axe des réels.

Q12 ✔ Réponse D

$29n\ln\left(1+\dfrac{x}{7n}\right) \to 29n \times \dfrac{x}{7n} = \dfrac{29x}{7}$, donc la limite vaut $e^{29x/7}$.
$e^{29x/7} = 2022 \iff x = \dfrac{7}{29}\ln 2022$.

Q13 ✔ Réponse B

$A \in (P) \iff 3a^2 - 2(6a-3) + 3 = 0 \iff 3a^2 - 12a + 9 = 0 \iff (a-1)(a-3) = 0$.
Deux faces sur six conviennent ($a = 1$ ou $a = 3$) : $p = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$.

Q14 ✔ Réponse B

$F(x) = \dfrac{2}{3}e^{3x} - 6x + c$ et $F(0) = \dfrac{2}{3} + c = 3$, donc $c = \dfrac{7}{3}$.

Q15 ✔ Réponse C

Avec $u = x^3 + 6x + 4$, $u' = 3(x^2+2)$: une primitive est $\dfrac{2}{3}\sqrt{x^3+6x+4}$. L'intégrale vaut $\dfrac{2}{3}\left(\sqrt{49} - \sqrt{4}\right) = \dfrac{2}{3} \times 5 = \dfrac{10}{3}$.

Q16 ✔ Réponse A

$v_8 = (v_1 + \cdots + v_8) - (v_1 + \cdots + v_7) =$
$(2 \times 64 + 8) - (2 \times 49 + 7) = 136 - 105 = 31$.

Q17 ✔ Réponse D

Pour $x = 1$: $f(1) = 1 + 3 = 4$. En dérivant :
$2f'(2x-1) = 2x + 3$, d'où pour $x = 1$: $f'(1) = \dfrac{5}{2}$.
$f(1) + f'(1) = 4 + \dfrac{5}{2} = \dfrac{13}{2}$.

Q18 ✔ Réponse B

Intégration par parties avec $u = (\ln x)^{n+1}$ et $v' = x$ ($v = \frac{x^2}{2}$) :

$$I_{n+1} = \left[\frac{x^2}{2}(\ln x)^{n+1}\right]_1^e - \frac{n+1}{2}\int_1^e x(\ln x)^n\,dx = \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2}I_n.$$

Donc $2I_{n+1} + (n+1)I_n = e^2$.

Q19 ✔ Réponse **A**

$f(1) = n+1$ et $f'(1) = \sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Tangente :

$$y = \frac{n(n+1)}{2}(x-1) + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2}x - \frac{(n+1)(n-2)}{2}.$$

Q20 ✔ Réponse **E**

f est croissante sur $[0,1]$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ et $f(1-x) = 1 - f(x)$.
Pour $0 < x < \frac{1}{2}$, on a $\dfrac{f(x)}{1-f(x)} = \sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$ avec $0 < \dfrac{x}{1-x} < 1$, donc $\dfrac{x}{1-x} < \sqrt{\dfrac{x}{1-x}} < 1$. Comme $t \mapsto \dfrac{t}{1-t}$ est croissante, cela donne $x < f(x) < \frac{1}{2}$.
Si $u_0 < \frac{1}{2}$, la suite est croissante et majorée par $\frac{1}{2}$; si $u_0 > \frac{1}{2}$, elle est décroissante et minorée par $\frac{1}{2}$ (par symétrie). Dans tous les cas elle converge vers le point fixe $\frac{1}{2}$ de $]0,1[$, qui n'est pas proposé : la réponse est E.