FACULTÉS DE MÉDECINE, DE PHARMACIE ET DE MÉDECINE DENTAIRE · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année · FMPD Maroc

Année universitaire 2023–2024 · 22 juillet 2023

2023 Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14
A	C	E	D	E	B	D	C	C	B	C	A	C	C

Q1 ✔ Réponse A

Avec $\cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$: $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et de même $\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$. Donc

$$z = \sqrt{5}\left(\cos\frac{\pi}{8} - i\sin\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{10+5\sqrt{2}}}{2} - \frac{i\sqrt{10-5\sqrt{2}}}{2}.$$

(B oublie le facteur $\sqrt{5}$.)

Q2 ✔ Réponse C

$\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i\sqrt{3}) = \frac{2}{\sqrt{2}}e^{-i\pi/3} = \sqrt{2}\,e^{-i\pi/3}$. Donc $z = (\sqrt{2})^{18}e^{-6i\pi} = 2^9 = 512$.

Q3 ✔ Réponse E

Avec $z = x+iy$: $\frac{z+1}{z-1} = \frac{(z+1)(\bar{z}-1)}{|z-1|^2}$, dont la partie réelle vaut $\frac{x^2+y^2-1}{|z-1|^2}$.

Le quotient est imaginaire pur si et seulement si $x^2+y^2=1$, avec $z \neq 1$: c'est le cercle de centre O et de rayon 1 privé du point $(1,0)$.

Q4 ✔ Réponse D

$1 - \frac{1}{k^2} = \frac{k-1}{k} \times \frac{k+1}{k}$. Le produit télescope :

$$\begin{aligned} U_n &= \left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\cdots\times\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{n+1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n}\times\frac{n+1}{2} \\ &= \frac{n+1}{2n} \to \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Q5 ✔ Réponse E

$U_n = 1 - \frac{1}{2^n} \to 1$ (somme géométrique). Et $V_n = e^{U_n \ln 2} = 2^{U_n} \to 2^1 = 2$.

Q6 ✔ Réponse B

Pour $x>0$: $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x+2\sqrt{x}}} = \sqrt{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}} \to \sqrt{\frac{0}{2}} = 0$.

Q7 ✔ Réponse D

$g(x) = \frac{2^x x^x}{x^{2x}} = \left(\frac{2}{x}\right)^x = e^{x\ln(\frac{2}{x})}$. Quand $x \to +\infty$, $\ln\frac{2}{x} \to -\infty$, donc l'exposant tend vers $-\infty$ et $g(x) \to 0$.

Q8 ✔ Réponse C

$y = f'(1)(x-1) + f(1) = -3(x-1) + 3 = -3x + 6$.

Q9 ✔ Réponse C

$g \circ f(x) = \sqrt{\ln(x-1)+1}$ est définie si $x>1$ et $\ln(x-1) \geq -1$, c'est-à-dire $x-1 \geq \frac{1}{e}$, soit $x \geq 1+\frac{1}{e}$.

Q10 ✔ Réponse B

$\frac{1}{\sin x \tan x} = \frac{\cos x}{\sin^2 x}$, dont une primitive est $-\frac{1}{\sin x}$. Donc

$$\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,dx = -\frac{1}{\sin\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{\sin\frac{\pi}{6}} = -\sqrt{2}+2.$$

Q11 ✔ Réponse C

$\sin 2x = 2\sin x\cos x$ est la dérivée de $1+\sin^2 x$. Donc l'intégrale vaut $\left[\ln(1+\sin^2 x)\right]_0^{\pi/2} = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$.

Q12 ✔ Réponse A

Pour tout t : $(1+t) - (2+2t) - (1-t) + 2 = 0$. Tous les points de (Δ) vérifient l'équation de P : $(\Delta) \subset P$.

(De même $(1+t)+(1-t)-2=0$: (Δ) est aussi contenue dans P', donc D est fausse. Le vecteur directeur $(1;2;-1)$ n'est colinéaire à aucun des vecteurs normaux $(1;-1;-1)$ et $(1;0;1)$: B et E sont fausses.)

Q13 ✔ Réponse C

$\frac{f(x)-f(0)}{x} = 1 + x\sin\frac{1}{x}$ et $\left|x\sin\frac{1}{x}\right| \leq |x| \to 0$. Donc f est dérivable en 0 et $f'(0)=1$.

(Pour $x \neq 0$, $f'(x) = 1 + 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$: D a le mauvais signe devant le cosinus.)

Q14 ✔ Réponse C

Pour un tirage : $p = \frac{5\times4\times3}{\binom{12}{3}} = \frac{60}{220} = \frac{3}{11}$.

Les n tirages sont indépendants (loi binomiale) :

$P = \binom{n}{n-1}p^{n-1}(1-p) = n \times \frac{3^{n-1}}{11^{n-1}} \times \frac{8}{11} = \frac{8n\times3^{n-1}}{11^n}$.