FACULTÉS DE MÉDECINE, DE PHARMACIE ET DE MÉDECINE DENTAIRE · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année · FMPD Maroc

Année universitaire 2024–2025 · 03 août 2024

2024 — Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14
B	B	E	C	B	D	B	C	E	E	A	B	C	E

Q1 ✔ Réponse B

Pour $x > 0$, la dérivée de $\dfrac{(\ln x)^2}{x}$ est

$$\frac{2\ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot x - (\ln x)^2}{x^2} = \frac{2\ln x - (\ln x)^2}{x^2}.$$

Donc $f'(x) = 1 - \dfrac{2\ln x - (\ln x)^2}{x^2}$.

Q2 ✔ Réponse B

$f(x) = 2\ln(e^x + 2) - \ln(1 + e^x)$. Pour $x \to +\infty$:

$$f(x) = 2x + 2\ln(1 + 2e^{-x}) - x - \ln(1 + e^{-x}) = x + o(1),$$

donc $y = x$ est asymptote oblique en $+\infty$.
(En $-\infty$, $f(x) \to 2\ln 2$: l'asymptote horizontale $y = 2\ln 2$ n'est pas proposée ; D a le mauvais signe.)

Q3 ✔ Réponse E

$g'(x) = \dfrac{2x(x+1) - (x^2+1)}{(x+1)^2} = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{(x+1)^2}$.
$g'(x) = 1 \iff x^2 + 2x - 1 = x^2 + 2x + 1 \iff -1 = 1$: impossible. Aucune tangente n'est parallèle à $y = x$.

Q4 ✔ Réponse C

$1 - i = \sqrt{2}\, e^{-i\pi/4}$ et $1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\pi/3}$. Donc

$$|z| = \frac{(\sqrt{2})^{10}}{2^4} = \frac{32}{16} = 2$$

$$\arg z \equiv -\frac{10\pi}{4} - \frac{4\pi}{3} = -\frac{23\pi}{6} \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi].$$

Q5 ✔ Réponse B

$\omega^3 = e^{2\pi i} = 1$ et $(\omega^2)^3 = 1$: les trois nombres 1, ω, ω^2 sont distincts et ont le même cube 1.
Les autres ne conviennent pas : A donne les cubes $1, -i, i$; C donne $1, -1, 1$; D donne $8, -1, 1$; E donne $1, -1, -1$.

Q6 ✔ Réponse D

$(S) : (x-2)^2 + y^2 + z^2 = 9$, centre $\Omega(2;0;0)$, rayon 3.
$\overrightarrow{AB}(-1;0;-1)$ et $\overrightarrow{AC}(0;2;-1)$ donnent le vecteur normal $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (2;-1;-2)$, d'où $(ABC) : 2x - y - 2z + 5 = 0$.
$d(\Omega, (ABC)) = \dfrac{|4+5|}{3} = 3$: le plan est tangent. H est le projeté de Ω : $H = \Omega - \dfrac{9}{9}(2;-1;-2) = (0;1;2)$.

Q7 ✔ Réponse B

Un sous-ensemble de 30 SMS parmi 2000 est une combinaison (sans ordre, sans répétition) : il y en a C_{2000}^{30}.

Q8 ✔ Réponse C

Les sous-ensembles qui contiennent votre SMS sont au nombre de C_{1999}^{29}, donc

$$p = \frac{C_{1999}^{29}}{C_{2000}^{30}} = \frac{30}{2000} = 0{,}015.$$

Q9 ✔ Réponse E

$ne^{-n} = \dfrac{n}{e^n} \to 0$, donc $u_n \to \ln 1 = 0$: E est vraie.
Remarque : la suite est aussi bornée ($0 \le ne^{-n} \le e^{-1}$, donc $0 \le u_n \le \ln(1 + e^{-1})$), si bien que A est vraie elle aussi.

Remarque : A (« la suite est bornée ») et E (« la limite vaut 0 ») sont toutes les deux vraies, alors que le QCM n'accepte qu'une réponse. E est la réponse la plus précise. À trancher par le professeur (garder E ou retirer la question).

Q10 ✔ Réponse E

De $y_n = \dfrac{4}{2 + w_n}$ on tire $w_n = \dfrac{4}{y_n} - 2$. Alors

$$w_{n+1} = \frac{\frac{4}{y_n} + 1}{\frac{8}{y_n}} = \frac{4 + y_n}{8}, \qquad y_{n+1} = \frac{4}{2 + \frac{4+y_n}{8}} = \frac{32}{20 + y_n}.$$

Q11 ✔ Réponse A

Pour $x > 0$, en passant au logarithme :
$x \ln x = \dfrac{x+1}{2} \ln x \iff \ln x \cdot \dfrac{x-1}{2} = 0 \iff x = 1$.
Vérification : $1^1 = 1 = 1^2$. ($x = 2$ donne $4 \neq 2\sqrt{2}$; 0 n'est pas dans le domaine.)

Q12 ✔ Réponse B

Le numérateur $\cos x$ est la dérivée du dénominateur $2 + \sin x$: une primitive est $\ln|2 + \sin x|$ (et même $\ln(2 + \sin x)$, puisque $2 + \sin x > 0$).

Q13 ✔ Réponse C

$f(x) = e^{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$ est définie si $x \neq 0$ et $1 + \dfrac{1}{x} = \dfrac{x+1}{x} > 0$, c'est-à-dire $x < -1$ ou $x > 0$.

Q14 ✔ Réponse E

- En 1^- : $f(x) \to 1 \cdot \sin\pi - \ln 1 - 1 = -1$: E est vraie.
- En 0^+ : $x \sin(\pi x) \to 0$ et $-\ln x \to +\infty$, donc $f \to +\infty$: A, C et D sont fausses.

Remarque : f est continue, tend vers $+\infty$ en 0^+ et $f(1) = -1 < 0$; par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in]0, 1]$ tel que $f(c) = 0$, donc B est vraie elle aussi.

Remarque : B (existence de c tel que f(c) = 0, par le théorème des valeurs intermédiaires) et E (limite -1 en 1^-) sont toutes les deux vraies, alors que le QCM n'accepte qu'une réponse. À trancher par le professeur (choisir la réponse attendue ou retirer la question).