FACULTÉ DE MÉDECINE ET DE PHARMACIE DE MARRAKECH · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès · Faculté de Médecine et de Pharmacie de Marrakech

Session 2015–2016

2015

Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10
E	B	C	E	E	A	D	D	D	B

Q1 ✔ Réponse **E**

- $m > 0$, $x \to +\infty$: $h(x) = x^m\left(1 - \dfrac{(\ln x)^2}{x^m}\right)$ et $\dfrac{(\ln x)^2}{x^m} \to 0$, donc $h \to +\infty$: E (A fausse).
- $m < 0$, $x \to 0^+$: avec $t = -\ln x \to +\infty$, $h = e^{|m|t} - t^2 \to +\infty$: B et C fausses.
- $m \leq 0$, $x \to +\infty$: x^m reste borné et $-(\ln x)^2 \to -\infty$: D fausse.

Q2 ✔ Réponse **B**

$|U_n| = \dfrac{1}{n^2} \to 0$: la suite converge vers 0. Ses termes changent de signe ($U_1 = -1$, $U_2 = \frac{1}{4}$, $U_3 = -\frac{1}{9}$) : elle n'est ni monotone ni négative.

Q3 ✔ Réponse **C**

$(1+i)^2 = 2i$, donc $(1+i)^{20} = (2i)^{10} = 2^{10}i^{10} = -1024$: réel (C), de partie imaginaire 0 (B fausse).
- A : $(1-i)^5 = (1-i)(-2i)^2 = -4(1-i) = -4+4i$, de partie réelle -4.
- D et E : $z^4 = 1$ a quatre solutions dans $\mathbb{C}$ (± 1, $\pm i$), dont deux réelles.

Q4 ✔ Réponse **E**

Pour $x < 0$, $e^x > 0$; pour $x \geq 0$, $\cos x = 0$ en $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}\ldots$ Sur $]-\infty;\pi]$ la seule solution est $\frac{\pi}{2}$ (E, D fausse) ; sur $]-\infty;2\pi]$ il y en a deux (A fausse).
f est continue en 0 ($e^0 = \cos 0 = 1$), mais ses dérivées à gauche (1) et à droite ($-\sin 0 = 0$) diffèrent : B et C fausses.

Q5 ✔ Réponse **E**

Par parties avec $u = \ln x$ et $v = 2\sqrt{x}$:

$$\begin{aligned}\int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx &= \left[2\sqrt{x}\ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{2}{\sqrt{x}}\,dx \\ &= 2\sqrt{e} - \left(4\sqrt{e} - 4\right) \\ &= 4 - 2\sqrt{e}.\end{aligned}$$

- A : $\displaystyle\int_2^e \frac{dx}{x\ln x} = \left[\ln(\ln x)\right]_2^e = -\ln(\ln 2) \approx 0{,}37$.
- B et C : $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan x\,dx = \left[-\ln\cos x\right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{2}\ln 2$.

Q6 ✔ Réponse **A**

$1 + x^2$ prend toutes les valeurs de $[1, +\infty[$, donc f prend toutes les valeurs de $]0;1]$: A.
- C : $g(x) = F(x+1) - F(x)$ avec $F' = f$, donc $g'(x) = f(x+1) - f(x)$ (signe inversé).
- D : $f > 0$, donc $g > 0$.
- E : $g\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\arctan\frac{1}{2} \approx 0{,}93 > \frac{1}{2}$.

Q7 ✔ Réponse **D**

On raisonne sur les parités :
- n et p impairs : impair + impair + impair = impair ;
- l'un pair, l'autre impair : un seul des trois termes est impair, la somme est impaire ;
- n et p pairs : la somme est paire.

Donc la somme n'est paire que si n et p sont pairs.

Q8 ✔ Réponse **D**

Une primitive de $\dfrac{2}{\cos^2 x}$ est $2\tan x$, et $\tan\dfrac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$.
- D : $2\left(\tan\frac{\pi}{4} - \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = 4$: **vraie** (et C fausse).
- A : $2(\sqrt{2}-1) > 0$, alors que $1 - \sqrt{2} < 0$.
- B et E : l'intégrale vaut $4(\sqrt{2}-1) > 0$.

Q9 ✔ Réponse **D**

$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{e}{n+1}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n \leq \dfrac{e}{2} \times \dfrac{1}{2} < 1$: (u_n) est strictement décroissante (C fausse), positive et majorée par $u_1 = e$: elle est bornée (D).
$u_n = \left(\dfrac{e}{n}\right)^n \to 0$ (E fausse), tandis que $v_n = n(1 - \ln n) \to -\infty$ (A fausse) ; $(v_n) = (\ln u_n)$ est strictement décroissante (B fausse).

Q10 ✔ Réponse **B**

$v_{n+1} = -\dfrac{2}{3}u_n - 2n + 4 + 3n + 3 - \dfrac{21}{2} = -\dfrac{2}{3}u_n + n - \dfrac{7}{2} = \dfrac{1}{3}v_n$: (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{3}$, mais de premier terme $v_0 = -2 - \frac{21}{2} = -\dfrac{25}{2}$ (D fausse).
Donc $u_n = \dfrac{3n - \frac{21}{2} - v_n}{2} = \dfrac{25}{4}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n + \dfrac{3}{2}n - \dfrac{21}{4}$ (E a le mauvais signe), et $u_n \to +\infty$ (C fausse).
$u_n - (n-3) = \dfrac{25}{4}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n + \dfrac{n}{2} - \dfrac{9}{4} > 0$ dès que $n \geq 5$: B (A fausse).