FACULTÉ DE MÉDECINE ET DE PHARMACIE D'OUJDA · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès · Faculté de Médecine et de Pharmacie d'Oujda

Session 2012–2013

2012

Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10
C	B	C	D	C	D	D	A	C	E

Q1 ✔ Réponse C

$x^2+2x=x(x+2)\geq 0$: $D_f=]-\infty,-2]\cup[0,+\infty[$ (A fausse).

En $+\infty$: $\sqrt{x^2+2x}-(x+1)=\dfrac{-1}{\sqrt{x^2+2x}+x+1}\to 0$, donc $f(x)-(2x+1)\to 0$: C.

- B : en -2, $\dfrac{\sqrt{x(x+2)}}{x+2}$ tend vers $-\infty$ à gauche : pas dérivable.
- D : f est une somme de fonctions croissantes sur $[0,+\infty[$.
- E : $x+\sqrt{x^2+2x}=\dfrac{-2x}{\sqrt{x^2+2x}-x}\to -1$ en $-\infty$.

Q2 ✔ Réponse B

B : avec $h=\ln x\to 0^-$, $e^{1/h}\to 0$ beaucoup plus vite que $x-1\sim h$: $\dfrac{e^{1/x}e^{1/h}}{x-1}\sim e\,\dfrac{e^{1/h}}{h}\to 0$.

- A : $\left(\dfrac{x-1}{2x+3}\right)'=\dfrac{5}{(2x+3)^2}$ (le carré manque).
- C : $\dfrac{\sin x}{\cos x-1}=\dfrac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{-2\sin^2\frac{x}{2}}=-\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{x}{2}\right)$ (signe opposé).
- D : $x^2-2x=-1\iff x=1$.
- E : $\tan B=\dfrac{3+2}{1-6}=-1$.

Q3 ✔ Réponse C

C : $i^{2k}=(-1)^k$; la somme compte 1004 termes ($k=0$ à 1003) qui s'annulent deux à deux : elle vaut 0.

- A : $(1+i)^{2002}=(2i)^{1001}=2^{1001}i^{1001}=2^{1001}i$.
- B : le module de la fraction est $\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$, donc $|z|=2\sqrt{2}$.
- D : avec $z=x+iy$, la partie imaginaire donne $y=2$ et la partie réelle $x^2-3x+2=0$: $z=1+2i$ ou $z=2+2i$.
- E : la fraction vaut $\sqrt{2}\,e^{i\pi/12}$, donc $\arg z\equiv\dfrac{20\pi}{12}=\dfrac{5\pi}{3}$.

Q4 ✔ Réponse D

Racine double 1 : $f(x)=(ax+b)e^x$ et $f'(x)=(ax+a+b)e^x$.

$f(1)=(a+b)e=e$ donne $a+b=1$; $f'(2)=(3a+b)e^2=0$ donne $3a+b=0$. D'où $a=-\dfrac{1}{2}$, $b=\dfrac{3}{2}$: $f(x)=\dfrac{3-x}{2}e^x$.

Q5 ✔ Réponse C

Il y a $\binom{9}{3}=84$ tirages.

- $P(X)=\dfrac{2\times 3\times 4}{84}=\dfrac{2}{7}$ (A fausse).
- Cinq jetons portent le 1 et quatre le 2 :

$P(Y)=\dfrac{\binom{5}{3}+\binom{4}{3}}{84}=\dfrac{14}{84}=\dfrac{1}{6}$ (B fausse ; les valeurs de A et B sont inversées).

- $P(Z)=1-\dfrac{\binom{6}{3}}{84}=1-\dfrac{20}{84}=\dfrac{16}{21}$: C.
- $X\cap Y$: un rouge, un blanc et un noir portant tous le 1 :

$2\times 1\times 2=4$ tirages, $P=\dfrac{1}{21}$ (D et E fausses).

Q6 ✔ Réponse D

Intégration par parties (intégrales de Wallis) : $u_{n+2}=\dfrac{n+1}{n+2}u_n$: D.

- A : $u_2=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^2 x\,dx=\frac{\pi}{4}$.
- B : $0\leq\sin x\leq 1$, donc $(\sin x)^{n+1}\leq(\sin x)^n$: la suite est décroissante.
- C : $u_{n+2}\leq u_{n+1}\leq u_n$ donne $\dfrac{n+1}{n+2}\leq\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\leq 1$, donc le rapport tend vers 1.
- E : on sait que $(n+1)u_nu_{n+1}=\frac{\pi}{2}$, d'où $\sqrt{n}\,u_n\to\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Q7 ✔ Réponse D

$$\frac{2x^2-x-2}{2x^2+3x+1}=1-\frac{4x+3}{(2x+1)(x+1)}=1-\frac{2}{2x+1}-\frac{1}{x+1}.$$

Donc

$$I=[x-\ln(2x+1)-\ln(x+1)]_0^2=2-\ln 5-\ln 3=2-\ln 15.$$

Q8 ✔ Réponse A

Sur $[1,e]$, $f\geq 0$: $f(1)=0$, et $f'(x)=1-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2\ln x}{x}=\dfrac{x^2-1-2x\ln x}{x^2}$ où $g(x)=x^2-1-2x\ln x$ vérifie $g(1)=0$ et $g'(x)=2(x-1-\ln x)\geq 0$. Donc f croît à partir de $f(1)=0$.

Avec $\displaystyle\int_1^e(\ln x)^2\,dx=e-2$:

$$\begin{aligned}\int_1^e f(x)\,dx&=\frac{e^2-1}{2}+1-(e-2)-2(e-1)\\&=\frac{e^2-6e+9}{2}\\&=\frac{(e-3)^2}{2}.\end{aligned}$$

Q9 ✔ Réponse C

C : par récurrence $u_n>0$, donc $e^{-u_n}<1$ et $u_{n+1}<u_n$. La suite est décroissante et minorée par 0 : elle converge.

- A : avec $t=e^{2x}$, $t^2-4t+3=0$ donne $t=1$ ou $t=3$: deux solutions, 0 et $\frac{\ln 3}{2}$.
- B : $x^2-2\leq 4-x\iff(x+3)(x-2)\leq 0$, soit $S=[-3,2]$.
- D : $\dfrac{\sin x}{1-e^{-x}}\sim\dfrac{x}{x}=1$.
- E : $[-e^{\cos x}]_0^\pi=e-\dfrac{1}{e}$.

Q10 ✔ Réponse E

$d(\Omega,(P))=\dfrac{|0+1-3|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$ (A fausse) : (S) a pour équation $x^2+(y-1)^2+(z+1)^2=2$, soit $x^2+y^2+z^2-2y+2z=0$ (B a le mauvais signe devant $2z$).

$\overrightarrow{AB}(-1,1,-1)$ et $\overrightarrow{AC}(0,-1,0)$ ne sont pas colinéaires (C fausse) ; $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=(-1,0,1)$, d'où (ABC) : $x-z-3=0$.

$d(\Omega,(ABC))=\dfrac{|0+1-3|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$: le plan est tangent (D fausse).

Le point de contact est $\Omega+(1,0,-1)=(1,1,-2)=C$: E.