FACULTÉ DE MÉDECINE ET DE PHARMACIE D'OUJDA · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès · Faculté de Médecine et de Pharmacie d'Oujda

Session 2016–2017

2016

Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10
C	C	E	E	D	D	E	E	D	B

Q1 ✔ Réponse C

$z = e^{i\pi/n}$ et $z^n = -1$, donc

$$\begin{aligned} 1 + z + \cdots + z^{n-1} &= \frac{1 - z^n}{1 - z} \\ &= \frac{2}{1 - e^{i\pi/n}} \\ &= \frac{2}{-2i \sin\frac{\pi}{2n}\, e^{i\pi/(2n)}} \\ &= 1 + \frac{i}{\tan\frac{\pi}{2n}}. \end{aligned}$$

A et B sont fausses. V_n est la partie imaginaire de cette somme : $V_n = \dfrac{1}{\tan\frac{\pi}{2n}}$ (C). Enfin $\dfrac{V_n}{n} \sim \dfrac{2n/\pi}{n} \to \dfrac{2}{\pi} \neq 0$.

Q2 ✔ Réponse C

$\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$: la somme télescope,

$S_n = 1 - \dfrac{1}{n+1} \to 1$. La série converge et sa somme vaut 1.

Q3 ✔ Réponse E

$1 + u_{n+1} = e^{-2}(1 + u_n) : 1 + u_n = e^2 \cdot e^{-2n}$, donc $u_n = e^{2-2n} - 1$ (décroissante ; A et C fausses) et $V_n = 3e^{2-2n}$, géométrique de limite 0 (B et D fausses).

$\ln V_k = \ln 3 + 2 - 2k$, d'où

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \ln V_k = (n+1)(\ln 3 + 2) - n(n+1) = (n+1)(2 - n + \ln 3)$: E.

Q4 ✔ Réponse E

$D_f =]-1; +\infty[$ (A fausse). En -1^+ : $1 - 2\ln(1+x) \to +\infty$ et $x + 1 \to 0^+$, donc $f(x) \to -\infty$ (B fausse). En $+\infty$:

$\dfrac{1 - 2\ln(1+x)}{x+1} \to 0$, donc $f(x) \to +\infty$ (C et D fausses).

$\left(\dfrac{1 - 2\ln(1+x)}{x+1}\right)' = \dfrac{-2 - 1 + 2\ln(1+x)}{(x+1)^2}$, donc

$$f'(x) = 1 - \frac{2\ln(1+x) - 3}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x + 4 - 2\ln(x+1)}{(x+1)^2}.$$

Q5 ✔ Réponse D

$f(x) - x = \dfrac{2\ln(1+x) - 1}{x+1}$: elle s'annule pour $x = \sqrt{e} - 1$ (A fausse), est ≤ 0 sur $]-1; \sqrt{e} - 1]$ (B fausse) et ≥ 0 ensuite (C fausse).

En $x_0 = \sqrt{e^3} - 1 : \ln(1 + x_0) = \frac{3}{2}$, donc

$f'(x_0) = 1 - \dfrac{3-3}{(x_0+1)^2} = 1$ et $f(x_0) = x_0 - \dfrac{1-3}{\sqrt{e^3}} = x_0 + \dfrac{2}{\sqrt{e^3}}$.

La tangente est $y = x + \dfrac{2}{\sqrt{e^3}}$: D.

Q6 ✔ Réponse D

$\overrightarrow{AB}(4,-2,4)$ et $\overrightarrow{AC}(-1,-1,2) : \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (0,-12,-6)$, de norme $6\sqrt{5} \neq 0$ (non alignés). L'aire vaut $3\sqrt{5}$ (A et B fausses).

$BC = \|(-5,1,-2)\| = \sqrt{30}$, donc la hauteur issue de A vaut $\dfrac{2 \times 3\sqrt{5}}{\sqrt{30}} = \dfrac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$: D.

Q7 ✔ Réponse E

- A : le périmètre vaut $2\pi R$.
- B : $e^{i\pi/4} + e^{3i\pi/4} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = i\sqrt{2}$.
- C : $\binom{9}{5} = 126$.
- D : l'hectare est une unité d'aire.

Toutes sont fausses : E.

Q8 ✔ Réponse E

$\tan^3 x + \tan x = \tan x(1 + \tan^2 x)$, dont une primitive est $\dfrac{\tan^2 x}{2}$: $I = \tan^2(-a) = \tan^2 a = \dfrac{1}{\cos^2 a} - 1$. A en est l'opposé et B vaut $1 - \tan^2 a$: fausses.

$\cos^3 u = \cos u\,(1 - \sin^2 u)$, donc

$$J = \frac{1}{2}\left[\sin 2t - \frac{\sin^3 2t}{3}\right]_0^{-a} = -\frac{\sin 2a}{2}\left(1 - \frac{\sin^2 2a}{3}\right).$$

C vaut $\dfrac{\sin 2a}{2}\left(1 + \dfrac{\sin^2 2a}{3}\right)$ et D la moitié de C : aucune n'est égale à J (par exemple pour $a = \frac{\pi}{4}$, $J = -\frac{1}{3}$, C $= \frac{2}{3}$, D $= \frac{1}{3}$).

Donc E.

Q9 ✔ Réponse D

Deux intégrations par parties :

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= \left[x^{n+2} \sin x\right]_0^{\pi/2} - (n+2)\int_0^{\pi/2} x^{n+1} \sin x\, dx \\ &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+2} - (n+2)(n+1)I_n, \end{aligned}$$

car

$$\int_0^{\pi/2} x^{n+1} \sin x\, dx = \left[-x^{n+1}\cos x\right]_0^{\pi/2} + (n+1)I_n = (n+1)I_n.$$

D est vraie.

$I_0 = 1$, $I_1 = \frac{\pi}{2} - 1$ et $I_2 = \frac{\pi^2}{4} - 2$: A, B, E sont fausses.

Q10 ✔ Réponse B

B : en développant, $f(2+h) = h^3 - 3h$, fonction impaire de h. Donc $f(2-h) = -f(2+h)$: le point $I(2,0)$ est centre de symétrie de la courbe.

- A : $\cos^2\frac{\pi}{4} + \cos^2\frac{3\pi}{4} = 1$ et $\cos^2\frac{5\pi}{12} + \cos^2\frac{11\pi}{12} = \sin^2\frac{\pi}{12} + \cos^2\frac{\pi}{12} = 1$: la somme vaut 2.
- C : $\sqrt{1 - \sin 2x} = |\cos x - \sin x|$, différent de $\cos 2x$ en général.
- D : la période est 2π (à cause de $\cos x$).
- E : la formule $(g \circ f)' = f' \cdot g' \circ f$ est vraie.