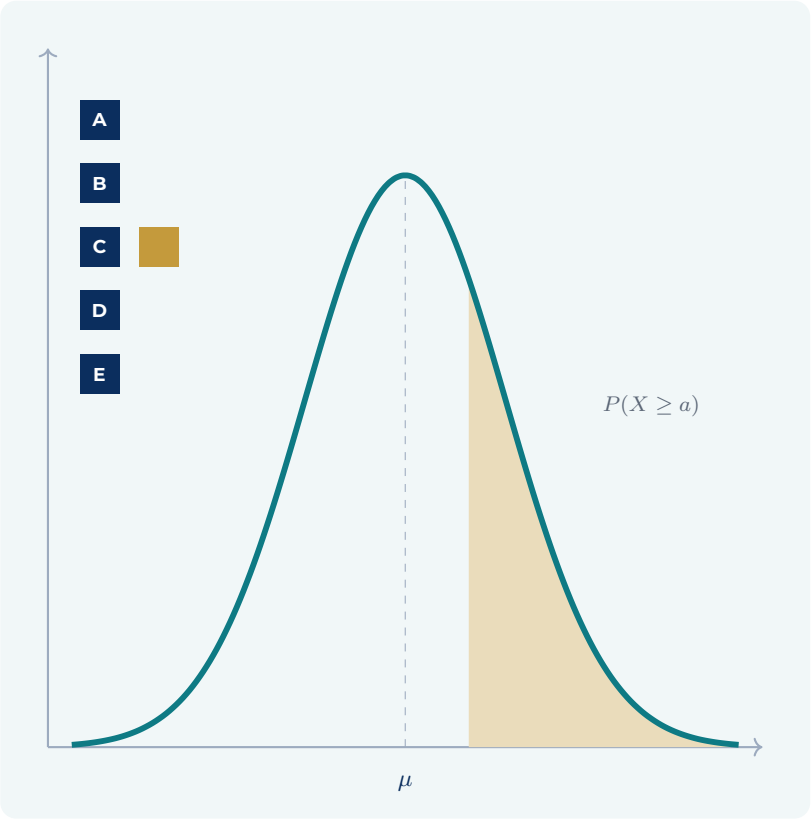
Prof. Taher Bouyguir

Professeur de mathématiques
Secondaire qualifiant

Prof Taher
Prof Taher Bouyguir
Taher Bouyguir
Contact WhatsApp
Telegram
mr.bouyguir@gmail.com
www.proftaher.com

RECUEIL DE CONCOURS

Recueil des concours : Médecine, ENSA et ENSCK



78 concours · énoncés et corrections · 2008–2026

Concours post-bac

Sommaire

I Concours de Médecine, Pharmacie et Médecine Dentaire 4

I Facultés de Médecine, de Pharmacie et de Médecine Dentaire (FMPD Maroc) . . . 4
1 FMPD Maroc 2026 – Énoncé . . . 4
2 FMPD Maroc 2026 – Correction . . . 5
3 FMPD Maroc 2025 – Énoncé . . . 6
4 FMPD Maroc 2025 – Correction . . . 7
5 FMPD Maroc 2024 – Énoncé . . . 8
6 FMPD Maroc 2024 – Correction . . . 9
7 FMPD Maroc 2023 – Énoncé . . . 10
8 FMPD Maroc 2023 – Correction . . . 11
9 FMPD Maroc 2022 – Énoncé . . . 12
10 FMPD Maroc 2022 – Correction . . . 13
11 FMPD Maroc 2021 – Énoncé . . . 15
12 FMPD Maroc 2021 – Correction . . . 16
13 FMPD Maroc 2020 – Énoncé . . . 18
14 FMPD Maroc 2020 – Correction . . . 19

II Faculté de Médecine et de Pharmacie de Fès . . . 21
1 FMP Fès 2019 – Énoncé . . . 21
2 FMP Fès 2019 – Correction . . . 22
3 FMP Fès 2018 – Énoncé . . . 24
4 FMP Fès 2018 – Correction . . . 25
5 FMP Fès 2016 – Énoncé . . . 26
6 FMP Fès 2016 – Correction . . . 27
7 FMP Fès 2013 – Énoncé . . . 28
8 FMP Fès 2013 – Correction . . . 29
9 FMP Fès 2012 – Énoncé . . . 30
10 FMP Fès 2012 – Correction . . . 31
11 FMP Fès 2011 – Énoncé . . . 32
12 FMP Fès 2011 – Correction . . . 33
13 FMP Fès 2010 – Énoncé . . . 34
14 FMP Fès 2010 – Correction . . . 35
15 FMP Fès 2009 – Énoncé . . . 36
16 FMP Fès 2009 – Correction . . . 37

III Faculté de Médecine et de Pharmacie d'Oujda . . . 38
1 FMP Oujda 2019 – Énoncé . . . 38
2 FMP Oujda 2019 – Correction . . . 39
3 FMP Oujda 2017 – Énoncé . . . 40
4 FMP Oujda 2017 – Correction . . . 41
5 FMP Oujda 2016 – Énoncé . . . 42
6 FMP Oujda 2016 – Correction . . . 43
7 FMP Oujda 2015 – Énoncé . . . 44
8 FMP Oujda 2015 – Correction . . . 45
9 FMP Oujda 2014 – Énoncé . . . 46
10 FMP Oujda 2014 – Correction . . . 47
11 FMP Oujda 2013 – Énoncé . . . 48
12 FMP Oujda 2013 – Correction . . . 49
13 FMP Oujda 2012 – Énoncé . . . 50
14 FMP Oujda 2012 – Correction . . . 51
15 FMP Oujda 2011 – Énoncé . . . 52
16 FMP Oujda 2011 – Correction . . . 53
17 FMP Oujda 2009 – Énoncé . . . 54
18 FMP Oujda 2009 – Correction . . . 55
19 FMP Oujda 2008 – Énoncé . . . 56
20 FMP Oujda 2008 – Correction . . . 57

IV Faculté de Médecine et de Pharmacie de Marrakech . . . 58
1 FMP Marrakech 2019 – Énoncé . . . 58
2 FMP Marrakech 2019 – Correction . . . 59
3 FMP Marrakech 2016 – Énoncé . . . 60
4 FMP Marrakech 2016 – Correction . . . 61
5 FMP Marrakech 2015 – Énoncé . . . 62
6 FMP Marrakech 2015 – Correction . . . 63
7 FMP Marrakech 2011 – Énoncé . . . 64
8 FMP Marrakech 2011 – Correction . . . 65
9 FMP Marrakech 2008 – Énoncé . . . 66
10 FMP Marrakech 2008 – Correction . . . 67

V Faculté de Médecine et de Pharmacie de Tanger . . . 68
1 FMP Tanger 2019 – Énoncé . . . 68
2 FMP Tanger 2019 – Correction . . . 69
3 FMP Tanger 2018 – Énoncé . . . 70
4 FMP Tanger 2018 – Correction . . . 71
5 FMP Tanger 2017 – Énoncé . . . 72
6 FMP Tanger 2017 – Correction . . . 73

VI Faculté de Médecine et de Pharmacie d'Agadir . . . 74
1 FMP Agadir 2018 – Énoncé . . . 74
2 FMP Agadir 2018 – Correction . . . 75

VII Faculté de Médecine et de Pharmacie de Rabat . . . 76
1 Médecine Rabat 2016 – Énoncé . . . 76
2 Médecine Rabat 2016 – Correction . . . 77
3 Médecine Rabat 2015 – Énoncé . . . 78
4 Médecine Rabat 2015 – Correction . . . 79

VIII Faculté de Médecine et de Pharmacie de Rabat (Pharmacie) . . . 80
1 Pharmacie Rabat 2016 – Énoncé . . . 80
2 Pharmacie Rabat 2016 – Correction . . . 81

IX Faculté de Médecine Dentaire de Casablanca . . . 82
1 FMD Casablanca 2018 – Énoncé . . . 82
2 FMD Casablanca 2018 – Correction . . . 83
3 FMD Casablanca 2017 – Énoncé . . . 84
4 FMD Casablanca 2017 – Correction . . . 85
5 FMD Casablanca 2015 – Énoncé . . . 86
6 FMD Casablanca 2015 – Correction . . . 87
7 FMD Casablanca 2011 – Énoncé . . . 88
8 FMD Casablanca 2011 – Correction . . . 89
9 FMD Casablanca 2010 – Énoncé . . . 90
10 FMD Casablanca 2010 – Correction . . . 91
11 FMD Casablanca 2009 – Énoncé . . . 92
12 FMD Casablanca 2009 – Correction . . . 93

II Concours des ENSA 94

X Concours national des ENSA Maroc . . . 94
1 ENSA Maroc 2026 – Énoncé . . . 94
2 ENSA Maroc 2026 – Correction . . . 95
3 ENSA Maroc 2025 – Énoncé . . . 97
4 ENSA Maroc 2025 – Correction . . . 98
5 ENSA Maroc 2024 – Énoncé . . . 100
6 ENSA Maroc 2024 – Correction . . . 101
7 ENSA Maroc 2023 – Énoncé . . . 103
8 ENSA Maroc 2023 – Correction . . . 104
9 ENSA Maroc 2022 – Énoncé . . . 106
10 ENSA Maroc 2022 – Correction . . . 107
11 ENSA Maroc 2021 – Énoncé . . . 109
12 ENSA Maroc 2021 – Correction . . . 110
13 ENSA Maroc 2019 – Énoncé . . . 112
14 ENSA Maroc 2019 – Correction . . . 113
15 ENSA Maroc 2018 – Énoncé . . . 115
16 ENSA Maroc 2018 – Correction . . . 116
17 ENSA Maroc 2017 – Énoncé . . . 118
18 ENSA Maroc 2017 – Correction . . . 119
19 ENSA Maroc 2016 – Énoncé . . . 121
20 ENSA Maroc 2016 – Correction . . . 122
21 ENSA Maroc 2015 – Énoncé . . . 123
22 ENSA Maroc 2015 – Correction . . . 124
23 ENSA Maroc 2014 – Énoncé . . . 125
24 ENSA Maroc 2014 – Correction . . . 126
25 ENSA Maroc 2013 – Énoncé . . . 128
26 ENSA Maroc 2013 – Correction . . . 129

XI ENSA Tanger . . . 131
1 ENSA Tanger 2012 – Énoncé . . . 131
2 ENSA Tanger 2012 – Correction . . . 132
3 ENSA Tanger 2011 – Énoncé . . . 134
4 ENSA Tanger 2011 – Correction . . . 135
5 ENSA Tanger 2010 – Énoncé . . . 137
6 ENSA Tanger 2010 – Correction . . . 138
7 ENSA Tanger 2009 – Énoncé . . . 140
8 ENSA Tanger 2009 – Correction . . . 141

XII ENSA Khouribga . . . 143
1 ENSA Khouribga 2011 – Énoncé . . . 143
2 ENSA Khouribga 2011 – Correction . . . 144
3 ENSA Khouribga 2010 – Énoncé . . . 145
4 ENSA Khouribga 2010 – Correction . . . 146
5 ENSA Khouribga 2009 – Énoncé . . . 147
6 ENSA Khouribga 2009 – Correction . . . 148
7 ENSA Khouribga 2008 – Énoncé . . . 149
8 ENSA Khouribga 2008 – Correction . . . 150

XIII ENSA Oujda 151
1 ENSA Oujda 2012 – Énoncé 151
2 ENSA Oujda 2012 – Correction 152
3 ENSA Oujda 2009 – Énoncé 154
4 ENSA Oujda 2009 – Correction 155
XIV ENSA Safi 156
1 ENSA Safi 2012 – Énoncé 156
2 ENSA Safi 2012 – Correction 157
3 ENSA Safi 2010 – Énoncé 158
4 ENSA Safi 2010 – Correction 159
XV ENSA Marrakech 160
1 ENSA Marrakech 2011 – Énoncé 160
2 ENSA Marrakech 2011 – Correction 161
3 ENSA Marrakech 2010 – Énoncé 163
4 ENSA Marrakech 2010 – Correction 164
5 ENSA Marrakech 2009 – Énoncé 165
6 ENSA Marrakech 2009 – Correction 166

III Concours de l'ENSCK 167
XVI École Nationale Supérieure de Chimie de Kénitra 167
1 ENSCK 2025 – Énoncé 167
2 ENSCK 2025 – Correction 168
3 ENSCK 2024 – Énoncé 170
4 ENSCK 2024 – Correction 171
5 ENSCK 2023 – Énoncé 172
6 ENSCK 2023 – Correction 173
7 ENSCK 2022 – Énoncé 174
8 ENSCK 2022 – Correction 175
9 ENSCK 2021 – Énoncé 176
10 ENSCK 2021 – Correction 177
11 ENSCK 2020 – Énoncé 178
12 ENSCK 2020 – Correction 179
13 ENSCK 2019 – Énoncé 180
14 ENSCK 2019 – Correction 181

FACULTÉS DE MÉDECINE, DE PHARMACIE ET DE MÉDECINE DENTAIRE · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année · FMPD Maroc

Année universitaire 2026–2027

2026 — Énoncé

Q43 Calculer la limite suivante : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \dfrac{(1+x)^{2026}-1}{x}$.

A 0 B 1 C 2026 D $+\infty$
E Aucune des réponses précédentes

Q44 La dérivée de la fonction f qui est définie par : $f(x)=\sin^2 x\cos 2x$ est :

A $\sin(2x)(1+\sin x)(1+2\cos x)$
B $\sin(2x)(1-2\sin x)(1+2\sin x)$
C $\cos(2x)(1-2\sin x)(1+2\sin x)$
D $\sin(2x)\left(1-4\cos^2 x\right)$
E Aucune des réponses précédentes

Q45 Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{x-1}{(x-1)^2+1}$. Le point $A(1,0)$ est :

A un point d'intersection de la courbe de f avec l'axe des ordonnées
B un maximum de la fonction f
C un minimum de la fonction f
D un centre de symétrie de la courbe de f
E Aucune des réponses précédentes

Q46 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on considère le point $C(-1,2,1)$ et la droite (D) définie par la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x=1+2t \\ y=-1-t \\ z=2t \end{cases} \qquad t\in\mathbb{R}.$$

Soit H le projeté orthogonal du point C sur la droite (D). La distance CH est égale à :

A $\dfrac{\sqrt{101}}{3}$ B $\dfrac{\sqrt{101}}{\sqrt{3}}$
C $\dfrac{\sqrt{103}}{3}$ D $\dfrac{\sqrt{102}}{\sqrt{3}}$
E Aucune des réponses précédentes

Q47 Soit $x>0$ tel que $\ln(x)-\ln\left(\sqrt{2}+1\right)=\ln\left(2\left(\sqrt{2}-1\right)\right)$. Alors :

A $x=1$ B $x=\sqrt{2}$
C $x=2$ D $x=4$
E Aucune des réponses précédentes

Q48 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $(x-3)^3+1=0$.

A $\{-2\}$ B $\{2\}$
C $\{4\}$ D $\{2;4\}$
E Aucune des réponses précédentes

Q49 L'ensemble des solutions de l'inéquation $\ln(1-x)\geq 0$ est :

A $[0,1[$ B $]-\infty,1[$
C $]-\infty,0]$ D $]1,+\infty[$
E Aucune des réponses précédentes

Q50 Déterminer une primitive de la fonction : $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

A $F(x)=\ln\left(e^x-e^{-x}\right)$
B $F(x)=e^x+e^{-x}$
C $F(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$
D $F(x)=\ln\left(e^x+e^{-x}\right)$
E Aucune des réponses précédentes

Q51 Soit l'équation (E) : $8^{x(1-x)}=\dfrac{1}{64}$. L'ensemble des solutions de (E) est :

A $\{1;2\}$ B $\{1;-2\}$
C $\{-1;2\}$ D $\{-2;2\}$
E Aucune des réponses précédentes

Q52 Soient $x,y\in\mathbb{R}$ tels que $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{2020}=x+iy$. Alors $(x;y)$ est égal à :

A $(0;1)$ B $(1;0)$
C $(0;-1)$ D $(-1;0)$
E Aucune des réponses précédentes

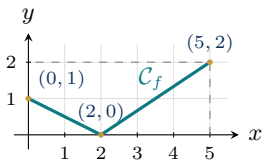
Q53 Soit la suite (u_n) définie par $u_0=e^3$ et $u_{n+1}=e^{\sqrt{u_n}}$; on pose $v_n=\ln(u_n)-2$. La raison de la suite (v_n) et son premier terme v_0 sont :

A $q=\dfrac{1}{2}$ et $v_0=1$
B $q=2$ et $v_0=\dfrac{1}{2}$
C $q=-2$ et $v_0=-\dfrac{1}{2}$
D $q=-\dfrac{1}{2}$ et $v_0=-1$
E Aucune des réponses précédentes

Q54 Un coureur doit franchir n obstacles $O_1,O_2,\ldots,O_n$. La probabilité qu'il franchisse avec succès l'obstacle O_k est : $P(O_k)=\dfrac{1}{2^k}$ pour tout $k\in\{1,2,\ldots,n\}$. On suppose que les franchissements des obstacles sont indépendants. La probabilité que le coureur franchisse tous les obstacles avec succès est :

A $\dfrac{1}{2^n}$ B $\dfrac{1}{2^{n!}}$
C $\dfrac{1}{2^{n^2}}$ D $\dfrac{1}{2^{n(n+1)/2}}$
E Aucune des réponses précédentes

Q55 Soit f la fonction définie sur $[0;5]$ dont la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est donnée ci-dessous :



On considère les intégrales : $I=\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx$, $J=\displaystyle\int_2^5 f(x)\,dx$, $K=\displaystyle\int_0^5 f(x)\,dx$. Quelle est la bonne réponse ?

A $I=1$, $J=3$, $K=4$
B $I=2$, $J=3$, $K=5$
C $I=1$, $J=2$, $K=3$
D $I=\dfrac{1}{2}$, $J=3$, $K=\dfrac{7}{2}$
E Aucune des réponses précédentes

Q56 Cinq élèves d'une classe veulent s'asseoir sur cinq chaises numérotées de 1 à 5. Combien de dispositions différentes des élèves sur les chaises sont possibles ?

A 125 B 60 C 100 D 120
E Aucune des réponses précédentes

FACULTÉS DE MÉDECINE, DE PHARMACIE ET DE MÉDECINE DENTAIRE · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année · FMPD Maroc

Année universitaire 2026–2027

2026 — Correction

Q43	Q44	Q45	Q46	Q47	Q48	Q49	Q50	Q51	Q52	Q53	Q54	Q55	Q56
C	B	D	A	C	B	C	D	C	B	A	D	A	D

Q43 ✔ Réponse C

C'est le taux d'accroissement en 0 de $g(x) = (1+x)^{2026}$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = g'(0) = 2026,$$

car $g'(x) = 2026\,(1+x)^{2025}$.

Q44 ✔ Réponse B

$$\begin{aligned} f' &= \sin 2x \cos 2x - 2\sin^2 x \sin 2x \\ &= \sin 2x \left(\cos 2x - 2\sin^2 x\right) \\ &= \sin 2x \left(1 - 4\sin^2 x\right) \\ &= \sin 2x\,(1-2\sin x)(1+2\sin x). \end{aligned}$$

Q45 ✔ Réponse D

Posons $t = x-1$: $f(x) = g(t) = \dfrac{t}{t^2+1}$ et g est impaire ($g(-t) = -g(t)$). Donc $f(2-x) = -f(x)$, i.e. $f(2\cdot 1 - x) + f(x) = 2\cdot 0$: $A(1,0)$ est un centre de symétrie de la courbe. (De plus $f(0) = -\frac{1}{2}$, et $f(1) = 0$ n'est ni un maximum ni un minimum.)

Q46 ✔ Réponse A

(D) passe par $M_0(1,-1,0)$, de vecteur directeur $\vec{u}(2,-1,2)$, $\|\vec{u}\| = 3$. $\overrightarrow{CM_0}(2,-3,-1)$ et $\overrightarrow{CM_0} \wedge \vec{u} = (-7,-6,4)$, de norme $\sqrt{49+36+16} = \sqrt{101}$.

$$CH = \frac{\|\overrightarrow{CM_0} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} = \frac{\sqrt{101}}{3}.$$

Q47 ✔ Réponse C

$\ln x = \ln\left(\sqrt{2}+1\right) + \ln\left(2(\sqrt{2}-1)\right) = \ln\left(2(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)\right) = \ln(2(2-1)) = \ln 2$. Donc $x = 2$.

Q48 ✔ Réponse B

$(x-3)^3 = -1 \iff x-3 = -1$ (la fonction cube est bijective sur $\mathbb{R}$) $\iff x = 2$. $S = \{2\}$.

Q49 ✔ Réponse C

Condition : $1-x > 0$, i.e. $x < 1$. Puis $\ln(1-x) \geq 0 = \ln 1 \iff 1-x \geq 1 \iff x \leq 0$. $S =]-\infty, 0]$.

Q50 ✔ Réponse D

Avec $u(x) = e^x + e^{-x} > 0$, on a $u'(x) = e^x - e^{-x}$, donc $f = \dfrac{u'}{u}$ et une primitive est $F(x) = \ln\left(e^x + e^{-x}\right)$.

Q51 ✔ Réponse C

$\frac{1}{64} = 8^{-2}$, donc $x(1-x) = -2 \iff x^2 - x - 2 = 0 \iff (x-2)(x+1) = 0$. $S = \{-1\,;2\}$.

Q52 ✔ Réponse B

$\dfrac{1+i}{1-i} = \dfrac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \dfrac{2i}{2} = i$.
Comme $2020 = 4\times 505$, $i^{2020} = \left(i^4\right)^{505} = 1$. Donc $(x\,;y) = (1\,;0)$.

Q53 ✔ Réponse A

$\ln u_{n+1} = \ln\left(e\sqrt{u_n}\right) = 1 + \frac{1}{2}\ln u_n$, donc

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \tfrac{1}{2}\ln u_n - 1 \\ &= \tfrac{1}{2}\left(\ln u_n - 2\right) = \tfrac{1}{2}\,v_n. \end{aligned}$$

(v_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et $v_0 = \ln e^3 - 2 = 1$.

Q54 ✔ Réponse D

Par indépendance :

$$\begin{aligned} P &= \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{1+2+\cdots+n}} \\ &= \frac{1}{2^{n(n+1)/2}}. \end{aligned}$$

Q55 ✔ Réponse A

$f \geq 0$: les intégrales sont des aires de triangles. $I = \frac{2\times 1}{2} = 1$, $J = \frac{3\times 2}{2} = 3$, $K = I + J = 4$ (relation de Chasles).

Q56 ✔ Réponse D

Il s'agit des permutations de 5 élèves : $5! = 5\times 4\times 3\times 2\times 1 = 120$.

FACULTÉS DE MÉDECINE, DE PHARMACIE ET DE MÉDECINE DENTAIRE · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année · FMPD Maroc

Année universitaire 2025–2026 · 19 juillet 2025

2025 Énoncé

Q43 Soit $I = \int_0^{\pi} |\cos x|\,\mathrm{d}x$. Quelle est la valeur de I ?

A 0
B 1
C 2
D π
E Aucune des réponses n'est juste

Q44 Quelle est la valeur de l'intégrale définie suivante : $J = \int_0^1 \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$?

A $\frac{1}{2}$
B $\frac{\pi}{4}$
C $\frac{1}{4}$
D 0
E Aucune des réponses n'est juste

Q45 Soit la suite (U_n) définie par : $U_1 = 1$ et pour tout $n \geq 1$, $U_{n+1} = \sqrt{2+U_n}$. Quelle est la limite de la suite (U_n) ?

A $\sqrt{2}$
B $1+\sqrt{2}$
C la suite est divergente
D 2
E Aucune des réponses n'est juste

Q46 Soient a et b deux nombres complexes tels que : $a \neq b$ et $|a| = 1$. Quelle est la valeur de : $\left|\frac{a-b}{1-\overline{a}\,b}\right|$?

A 0
B 1
C 2
D $\sqrt{2}$
E Aucune des réponses n'est juste

Q47 Soit $C = 1 + \cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{2\pi}{5} + \cdots + \cos\frac{9\pi}{5}$ et $S = \sin\frac{\pi}{5} + \sin\frac{2\pi}{5} + \cdots + \sin\frac{9\pi}{5}$. Quelle est la valeur de $z = C + iS$?

A 1
B 2
C -1
D 0
E Aucune des réponses n'est juste

Q48 On définit la fonction :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$$

Pour quelle valeur de a la fonction f est-elle continue en $x = 0$?

A 0
B $\frac{1}{2}$
C 1
D -1
E Aucune des réponses n'est juste

Q49 Soit la fonction $f(x) = \sin x + \cos x$. Quelle est la valeur maximale de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$?

A 1
B $\sqrt{2}+1$
C 2
D $\sqrt{2}$
E Aucune des réponses n'est juste

Q50 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\frac{e^{2x-1}}{\sqrt{e^{2x+4}}} = e^{-x}$. Quelle est la bonne réponse ?

A $x = 1$
B $x = 0$
C $x = \frac{3}{2}$
D $x = -1$
E Aucune des réponses n'est juste

Q51 Une urne U contient 9 boules : dont 5 boules rouges numérotées de 1 à 5 et 4 boules noires numérotées de 1 à 4. On suppose que les boules sont indiscernables au toucher. On tire simultanément deux boules de l'urne. On considère les deux événements A : « les deux boules tirées sont de même couleur » et B : « les deux boules tirées portent un numéro pair ». Calculer $P_{\overline{A}}(B)$.

A $\frac{1}{18}$
B $\frac{17}{18}$
C $\frac{2}{9}$
D $\frac{1}{5}$
E Aucune des réponses n'est juste

Q52 On lance deux dés équilibrés à 6 faces. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un 6 ?

A $\frac{1}{6}$
B $\frac{11}{36}$
C $\frac{5}{36}$
D $\frac{25}{36}$
E Aucune des réponses n'est juste

Q53 Soient les points : $A(1,1,-2)$, $B(0,5,5)$, $C(6,-3,-5)$, $D(1,2,0)$. Le vecteur $\overrightarrow{AD}$ appartient-il au plan vectoriel engendré par $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$? Autrement dit, existe-t-il des réels x et y tels que : $\overrightarrow{AD} = x\,\overrightarrow{AB} + y\,\overrightarrow{AC}$?

A Oui, pour $x = -\frac{1}{4}$, $y = -\frac{1}{8}$
B Oui, pour $x = \frac{5}{16}$, $y = \frac{1}{16}$
C Oui, pour $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$
D Non, car $\overrightarrow{AD}$ n'est pas combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$
E Aucune des réponses n'est juste

Q54 Soient les vecteurs : $\vec{u}(1,2,-1)$, $\vec{v}(3,6,-3)$, $\vec{w}(0,1,1)$. Quelle est la valeur du produit : $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$?

A 0
B 3
C -1
D 2
E Aucune des réponses n'est juste

Q55 La fonction f : $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x+e^x}$ admet au point $O(0,0)$ une tangente d'équation :

A $y = x$
B $y = x+1$
C $y = -2x$
D $y = x-1$
E Aucune des réponses n'est juste

Q56 On considère le nombre complexe : $z = (1+i)^{20}$. Quelle est la partie imaginaire de z ?

A 2^{10}
B -2^{10}
C 0
D $\sqrt{2}$
E Aucune des réponses n'est juste

FACULTÉS DE MÉDECINE, DE PHARMACIE ET DE MÉDECINE DENTAIRE · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année · FMPD Maroc

Année universitaire 2025–2026 · 19 juillet 2025

2025 Correction

Q43	Q44	Q45	Q46	Q47	Q48	Q49	Q50	Q51	Q52	Q53	Q54	Q55	Q56
C	A	D	B	D	B	D	C	D	B	B	A	A	C

Q43 ✔ Réponse C

Sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, $\cos x \geq 0$ et sur $[\frac{\pi}{2}, \pi]$, $\cos x \leq 0$:

$$I = \int_0^{\pi/2} \cos x \, dx - \int_{\pi/2}^{\pi} \cos x \, dx$$
$$= \big[\sin x\big]_0^{\pi/2} - \big[\sin x\big]_{\pi/2}^{\pi}$$
$$= 1 + 1 = 2.$$

Q44 ✔ Réponse A

On remarque que $\left(\frac{x}{1+x^2}\right)' = \frac{(1+x^2)-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$. Donc

$$J = \left[\frac{x}{1+x^2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Q45 ✔ Réponse D

Par récurrence, $1 \leq U_n \leq 2$ et (U_n) est croissante : elle converge vers $\ell \geq 1$ vérifiant $\ell = \sqrt{2+\ell}$, soit $\ell^2 - \ell - 2 = 0$, i.e. $(\ell-2)(\ell+1) = 0$. Comme $\ell \geq 1$: $\ell = 2$.

Q46 ✔ Réponse B

Comme $|a| = 1$, on a $a\overline{a} = 1$, donc $1 - \overline{a}\,b = \overline{a}\,a - \overline{a}\,b = \overline{a}\,(a-b)$. Ainsi

$$\left|\frac{a-b}{1-\overline{a}\,b}\right| = \frac{|a-b|}{|\overline{a}|\,|a-b|} = \frac{1}{|a|} = 1.$$

Q47 ✔ Réponse D

Avec $\omega = e^{i\pi/5}$ $(\omega \neq 1)$:

$$z = \sum_{k=0}^{9} e^{ik\pi/5} = \sum_{k=0}^{9} \omega^k$$
$$= \frac{1-\omega^{10}}{1-\omega} = \frac{1-e^{2i\pi}}{1-\omega} = 0.$$

Q48 ✔ Réponse B

Pour $x \neq 0$:
$\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{(1+x)-1}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)} = \frac{1}{\sqrt{1+x}+1} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{2}$. f est continue en 0 si et seulement si $a = \frac{1}{2}$.

Q49 ✔ Réponse D

$f(x) = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\,\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, donc $f(x) \leq \sqrt{2}$, avec égalité pour $x = \frac{\pi}{4}$. Le maximum vaut $\sqrt{2}$.

Q50 ✔ Réponse C

$\sqrt{e^{2x+4}} = e^{x+2}$, donc l'équation s'écrit $e^{2x-1-(x+2)} = e^{-x} \iff x - 3 = -x \iff x = \frac{3}{2}$.

Q51 ✔ Réponse D

Nombre de tirages : $\binom{9}{2} = 36$.
L'événement $\overline{A}$ (couleurs différentes) : $5 \times 4 = 20$ tirages. Boules paires : rouges $\{2,4\}$, noires $\{2,4\}$. $\overline{A} \cap B$: une rouge paire et une noire paire : $2 \times 2 = 4$ tirages.

$$P_{\overline{A}}(B) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(\overline{A})} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}.$$

Q52 ✔ Réponse B

Événement contraire : « aucun 6 », de probabilité $\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{36}$. Donc $P = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$.

Q53 ✔ Réponse B

$\overrightarrow{AB}(-1,4,7)$, $\overrightarrow{AC}(5,-4,-3)$, $\overrightarrow{AD}(0,1,2)$.

$$\begin{cases} -x + 5y = 0 \\ 4x - 4y = 1 \\ 7x - 3y = 2 \end{cases}$$

Les deux premières donnent $x = 5y$ et $16y = 1$, soit $y = \frac{1}{16}$, $x = \frac{5}{16}$.
Vérification : $7 \cdot \frac{5}{16} - 3 \cdot \frac{1}{16} = \frac{32}{16} = 2$. ✓

Q54 ✔ Réponse A

$\vec{v} = 3\,\vec{u}$: les vecteurs sont colinéaires, donc $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ et $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = 0$.

Q55 ✔ Réponse A

$f(0) = \frac{0}{1} = 0$. Avec $u = \ln(x+1)$ et $v = x + e^x$: $f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, et $u(0) = 0$, $u'(0) = 1$, $v(0) = 1$, d'où $f'(0) = \frac{1\cdot 1 - 0}{1} = 1$. Tangente : $y = f'(0)(x-0) + f(0) = x$.

Q56 ✔ Réponse C

$(1+i)^2 = 2i$, donc $z = (2i)^{10} = 2^{10}\,i^{10} = -2^{10} = -1024$.
z est réel : sa partie imaginaire est 0.

FACULTÉS DE MÉDECINE, DE PHARMACIE ET DE MÉDECINE DENTAIRE · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année · FMPD Maroc

Année universitaire 2024–2025 · 03 août 2024

2024 Énoncé

Q1 On considère la fonction f définie par : $f(x) = x - \dfrac{(\ln x)^2}{x}$.

A $f'(x) = 1 + \dfrac{2\ln x - (\ln x)^2}{x^2}$

B $f'(x) = 1 - \dfrac{2\ln x - (\ln x)^2}{x^2}$

C $f'(x) = -1 + \dfrac{2\ln x - (\ln x)^2}{x^2}$

D $f'(x) = -1 - \dfrac{2\ln x - (\ln x)^2}{x^2}$

E $f'(x) = 1 + \dfrac{2\ln x + (\ln x)^2}{x^2}$

Q2 La fonction f : $f(x) = 2\ln\left(\dfrac{e^x+2}{\sqrt{1+e^x}}\right)$ admet une asymptote horizontale ou oblique lorsque x tend vers $-\infty$ ou $+\infty$. Quelle est l'équation de cette asymptote ?

A $y = 2x$ B $y = x$
C $y = 0$ D $y = -2\ln 2$
E $y = -2x$

Q3 On considère la fonction g définie par : $g(x) = \dfrac{x^2+1}{x+1}$. Déterminer le point x_0 où la tangente à $\mathcal{C}_g$ est parallèle à la droite d'équation $y = x$.

A $x_0 = 0$ B $x_0 = -1$
C $x_0 = 1$ D $x_0 = 2$
E $x_0 \in \varnothing$ (ensemble vide)

Q4 Soit $z = \dfrac{(1-i)^{10}}{\left(1+i\sqrt{3}\right)^4}$. Quelle est la bonne réponse ?

A $|z| = 4$

B $|z| = \dfrac{1}{2}$

C $\arg z \equiv \dfrac{\pi}{6}\ [2\pi]$

D $\arg z \equiv \dfrac{3\pi}{2}\ [2\pi]$

E $\arg z \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$

Q5 Soient z_1, z_2 et z_3 trois nombres complexes distincts ayant le même cube, c'est-à-dire $z_1^3 = z_2^3 = z_3^3$. Quelles sont les valeurs possibles de z_1, z_2 et z_3 ?

A $z_1 = 1,\ z_2 = i,\ z_3 = -i$

B $z_1 = 1,\ z_2 = \omega,\ z_3 = \omega^2$ où $\omega = e^{\frac{2i\pi}{3}}$

C $z_1 = 1,\ z_2 = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ z_3 = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

D $z_1 = 2,\ z_2 = -1,\ z_3 = 1$

E $z_1 = 1,\ z_2 = -\omega,\ z_3 = -\omega^2$ où $\omega = e^{\frac{2i\pi}{3}}$

Q6 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère les points $A(0;3;1)$, $B(-1;3;0)$ et $C(0;5;0)$. La sphère (S) a pour équation : $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 5 = 0$. Quelles sont les coordonnées du point de tangence H du plan (ABC) et de la sphère (S) ?

A $(2;2;\sqrt{5})$ B $(2;3;1)$
C $(2;2;1)$ D $(0;1;2)$
E $(0;-1;2)$

Q7 On suppose que 2000 personnes ont envoyé un SMS dans le cadre d'un mini-jeu télé qui consistait à répondre à une question à 2 choix. La société qui gère ce « jeu-SMS » sélectionne 30 SMS au hasard parmi les 2000. On note Ω l'ensemble de tous les sous-ensembles de 30 SMS (distincts). Combien d'éléments contient-il ?

A A_{2000}^{30} B C_{2000}^{30}
C 1970 D $\dfrac{2000!}{30!}$
E 2000

Q8 On considère maintenant que vous faites partie des personnes qui ont envoyé un SMS. Quelle est la probabilité que vous soyez sélectionné(e) parmi les 2000 participants ?

A 0,12 B 0,03 C 0,015 D 0,02
E 0,3

Q9 Soit $u_n = \ln\left(1 + ne^{-n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$. Quelle est la bonne réponse ?

A La suite (u_n) est bornée

B $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

C $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

D La suite (u_n) est divergente

E $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

Q10 Soit la suite (w_n) définie par $w_0 = 1$ et $w_{n+1} = \dfrac{w_n + 3}{2w_n + 4}$, et on pose $y_n = \dfrac{4}{2 + w_n}$; y_{n+1} vérifie la relation suivante :

A $y_{n+1} = \dfrac{23}{6 + y_n}$

B $y_{n+1} = \dfrac{32}{6 + y_n}$

C $y_{n+1} = \dfrac{-6}{32 + y_n}$

D $y_{n+1} = \dfrac{6}{32 + y_n}$

E $y_{n+1} = \dfrac{32}{20 + y_n}$

Q11 Soit (E) l'équation : $x^x = (\sqrt{x})^{x+1}$. Quelle est la bonne réponse ?

A $x = 1$ est une solution
B $x = 2$ est une solution
C $x = 0$ est une solution
D $x = e$ est une solution
E l'équation (E) n'admet pas de solution

Q12 Calculer l'intégrale suivante : $\displaystyle\int \frac{\cos x}{2 + \sin x}\,\mathrm{d}x$.

A $\dfrac{1}{2}\ln|2 + \sin x| + C$

B $\ln|2 + \sin x| + C$

C $-\ln|2 + \sin x| + C$

D $\ln|2 + \cos x| + C$

E $\dfrac{1}{2}\ln|2 + \cos x| + C$

Q13 Soit $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$. Quelle est la bonne réponse ?

A $D_f =]0, +\infty[$

B $D_f = \mathbb{R}^*$

C $D_f =]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$

D $D_f =]-1, 1[$

E $D_f = [-1, 1]$

Q14 Soit $f(x) = x\sin(\pi x) - \ln(x) - 1$ définie sur $]0, 1]$. Quelle est la bonne réponse ?

A f est majorée

B Il existe $c \in]0, 1]$ tel que $f(c) = 0$

C $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$

D f est croissante

E $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -1$

FACULTÉS DE MÉDECINE, DE PHARMACIE ET DE MÉDECINE DENTAIRE · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année · FMPD Maroc

Année universitaire 2024–2025 · 03 août 2024

2024 — Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14
B	B	E	C	B	D	B	C	E	E	A	B	C	E

Q1 ✔ Réponse B

Pour $x > 0$, la dérivée de $\dfrac{(\ln x)^2}{x}$ est

$$\frac{2\ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot x - (\ln x)^2}{x^2} = \frac{2\ln x - (\ln x)^2}{x^2}.$$

Donc $f'(x) = 1 - \dfrac{2\ln x - (\ln x)^2}{x^2}$.

Q2 ✔ Réponse B

$f(x) = 2\ln(e^x + 2) - \ln(1 + e^x)$. Pour $x \to +\infty$:

$$f(x) = 2x + 2\ln(1 + 2e^{-x}) - x - \ln(1 + e^{-x}) = x + o(1),$$

donc $y = x$ est asymptote oblique en $+\infty$.
(En $-\infty$, $f(x) \to 2\ln 2$: l'asymptote horizontale $y = 2\ln 2$ n'est pas proposée ; D a le mauvais signe.)

Q3 ✔ Réponse E

$g'(x) = \dfrac{2x(x+1) - (x^2+1)}{(x+1)^2} = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{(x+1)^2}$.
$g'(x) = 1 \iff x^2 + 2x - 1 = x^2 + 2x + 1 \iff -1 = 1$: impossible. Aucune tangente n'est parallèle à $y = x$.

Q4 ✔ Réponse C

$1 - i = \sqrt{2}\, e^{-i\pi/4}$ et $1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\pi/3}$. Donc

$$|z| = \frac{(\sqrt{2})^{10}}{2^4} = \frac{32}{16} = 2$$

$$\arg z \equiv -\frac{10\pi}{4} - \frac{4\pi}{3} = -\frac{23\pi}{6} \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi].$$

Q5 ✔ Réponse B

$\omega^3 = e^{2\pi i} = 1$ et $(\omega^2)^3 = 1$: les trois nombres 1, ω, ω^2 sont distincts et ont le même cube 1.
Les autres ne conviennent pas : A donne les cubes $1, -i, i$; C donne $1, -1, 1$; D donne $8, -1, 1$; E donne $1, -1, -1$.

Q6 ✔ Réponse D

$(S) : (x-2)^2 + y^2 + z^2 = 9$, centre $\Omega(2;0;0)$, rayon 3.
$\overrightarrow{AB}(-1;0;-1)$ et $\overrightarrow{AC}(0;2;-1)$ donnent le vecteur normal $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (2;-1;-2)$, d'où $(ABC) : 2x - y - 2z + 5 = 0$.
$d(\Omega, (ABC)) = \dfrac{|4+5|}{3} = 3$: le plan est tangent. H est le projeté de Ω : $H = \Omega - \dfrac{9}{9}(2;-1;-2) = (0;1;2)$.

Q7 ✔ Réponse B

Un sous-ensemble de 30 SMS parmi 2000 est une combinaison (sans ordre, sans répétition) : il y en a C_{2000}^{30}.

Q8 ✔ Réponse C

Les sous-ensembles qui contiennent votre SMS sont au nombre de C_{1999}^{29}, donc

$$p = \frac{C_{1999}^{29}}{C_{2000}^{30}} = \frac{30}{2000} = 0{,}015.$$

Q9 ✔ Réponse E

$ne^{-n} = \dfrac{n}{e^n} \to 0$, donc $u_n \to \ln 1 = 0$: E est vraie.
Remarque : la suite est aussi bornée ($0 \le ne^{-n} \le e^{-1}$, donc $0 \le u_n \le \ln(1 + e^{-1})$), si bien que A est vraie elle aussi.

Remarque : A (« la suite est bornée ») et E (« la limite vaut 0 ») sont toutes les deux vraies, alors que le QCM n'accepte qu'une réponse. E est la réponse la plus précise. À trancher par le professeur (garder E ou retirer la question).

Q10 ✔ Réponse E

De $y_n = \dfrac{4}{2 + w_n}$ on tire $w_n = \dfrac{4}{y_n} - 2$. Alors

$$w_{n+1} = \frac{\frac{4}{y_n} + 1}{\frac{8}{y_n}} = \frac{4 + y_n}{8}, \qquad y_{n+1} = \frac{4}{2 + \frac{4+y_n}{8}} = \frac{32}{20 + y_n}.$$

Q11 ✔ Réponse A

Pour $x > 0$, en passant au logarithme :
$x \ln x = \dfrac{x+1}{2} \ln x \iff \ln x \cdot \dfrac{x-1}{2} = 0 \iff x = 1$.
Vérification : $1^1 = 1 = 1^2$. ($x = 2$ donne $4 \neq 2\sqrt{2}$; 0 n'est pas dans le domaine.)

Q12 ✔ Réponse B

Le numérateur $\cos x$ est la dérivée du dénominateur $2 + \sin x$: une primitive est $\ln|2 + \sin x|$ (et même $\ln(2 + \sin x)$, puisque $2 + \sin x > 0$).

Q13 ✔ Réponse C

$f(x) = e^{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$ est définie si $x \neq 0$ et $1 + \dfrac{1}{x} = \dfrac{x+1}{x} > 0$, c'est-à-dire $x < -1$ ou $x > 0$.

Q14 ✔ Réponse E

- En 1^- : $f(x) \to 1 \cdot \sin\pi - \ln 1 - 1 = -1$: E est vraie.
- En 0^+ : $x \sin(\pi x) \to 0$ et $-\ln x \to +\infty$, donc $f \to +\infty$: A, C et D sont fausses.

Remarque : f est continue, tend vers $+\infty$ en 0^+ et $f(1) = -1 < 0$; par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in]0, 1]$ tel que $f(c) = 0$, donc B est vraie elle aussi.

Remarque : B (existence de c tel que f(c) = 0, par le théorème des valeurs intermédiaires) et E (limite -1 en 1^-) sont toutes les deux vraies, alors que le QCM n'accepte qu'une réponse. À trancher par le professeur (choisir la réponse attendue ou retirer la question).

FACULTÉS DE MÉDECINE, DE PHARMACIE ET DE MÉDECINE DENTAIRE · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année · FMPD Maroc

Année universitaire 2023–2024 · 22 juillet 2023

2023 Énoncé

Q1 Dans l'ensemble $\mathbb{C}$, si $z = \sqrt{5}\,e^{-\frac{i\pi}{8}}$, alors :

A $z = \dfrac{\sqrt{10+5\sqrt{2}}}{2} - i\dfrac{\sqrt{10-5\sqrt{2}}}{2}$

B $z = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

C $z = \dfrac{\sqrt{10+5\sqrt{2}}}{2} + i\dfrac{\sqrt{10-5\sqrt{2}}}{2}$

D $z = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

E $z = \dfrac{\sqrt{10+5\sqrt{2}}}{2} - i\dfrac{\sqrt{10+5\sqrt{2}}}{2}$

Q2 Le nombre complexe $z = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(1 - i\sqrt{3}\right)\right)^{18}$ est égal à :

A $z = -512$ B $z = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i$

C $z = 512$ D $z = 251$

E $z = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Q3 Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, l'ensemble des points M d'affixes z tels que $\dfrac{z+1}{z-1} \in i\mathbb{R}$ est :

A La droite (Ox) privée du point $(1,0)$

B La droite (Oy) privée du point $(0,1)$

C Le cercle de centre O et de rayon 1

D La droite (Ox)

E Le cercle de centre O et de rayon 1 privé du point $(1,0)$

Q4 $(U_n)_{n\geq 2}$ est la suite définie par

$$U_n = \left(1 - \tfrac{1}{2^2}\right) \times \left(1 - \tfrac{1}{3^2}\right) \times \cdots \times \left(1 - \tfrac{1}{n^2}\right).$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ est égale à :

A 1 B 0 C $+\infty$ D $\dfrac{1}{2}$

E la limite n'existe pas

Q5 $(U_n)_{n\geq 1}$ et $(V_n)_{n\geq 1}$ sont deux suites définies par :

$$U_n = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2^2} + \tfrac{1}{2^3} + \cdots + \tfrac{1}{2^n} \; ; \qquad \ln(V_n) = U_n \ln 2.$$

A $\lim U_n = 1$ et $\lim V_n = \ln 2$

B $\lim U_n = \dfrac{1}{2}$ et $\lim V_n = \ln 2$

C $\lim U_n = 2$ et $\lim V_n = 1$

D $\lim U_n = \dfrac{1}{2}$ et $\lim V_n = 2$

E $\lim U_n = 1$ et $\lim V_n = 2$

Q6 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par : $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2\sqrt{x}}}$. La limite $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ est égale à :

A $+\infty$ B 0 C 1 D $\dfrac{1}{2}$

E f n'admet pas de limite en 0^+

Q7 Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$: $g(x) = \dfrac{(2x)^x}{x^{2x}}$, pour tout $x > 0$. La limite $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ est égale à :

A $+\infty$ B 1 C 2 D 0

E g n'admet pas de limite en $+\infty$

Q8 f est une fonction réelle, sachant que $f(1) = 3$ et $f'(1) = -3$. La courbe de la fonction f admet au point $(1,3)$ une tangente d'équation :

A $y = 3x - 2$ B $y = 3x - 6$

C $y = -3x + 6$ D $y = 3x$

E $y = -3x + 2$

Q9 Soient f et g deux fonctions réelles telles que : $f(x) = \ln(x-1)$ et $g(x) = \sqrt{x+1}$. Le domaine de définition de $g \circ f$ est :

A $[-1, +\infty[$ B $]1, +\infty[$

C $\left[1 + \dfrac{1}{e}, +\infty\right[$ D $]e, +\infty[$

E $]-e, +\infty[$

Q10 L'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin x \tan x}\,\mathrm{d}x$ est égale à :

A $\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ B $2 - \sqrt{2}$

C $\sqrt{2} - 2$ D $\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{1}{2}$

E $1 - \sqrt{2}$

Q11 L'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1 + \sin^2 x}\,\mathrm{d}x$ est égale à :

A 0 B $\ln 2 + 1$ C $\ln 2$ D 1

E $-\ln 2$

Q12 Soient (P) et (P') deux plans d'équations respectives $P : x - y - z + 2 = 0$ et $P' : x + z - 2 = 0$, et (Δ) la droite telle que :

$$(\Delta) : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

A $(\Delta) \subset P$ B $(\Delta) \perp P$

C $(\Delta) \cap P = \varnothing$ D $(\Delta) \cap P' = \varnothing$

E $(\Delta) \perp P'$

Q13 Soit

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 \sin\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

A f n'est pas dérivable en 0

B $f'(0) = 0$

C $f'(0) = 1$

D Pour $x \neq 0$,
$f'(x) = 1 + 2x\sin\dfrac{1}{x} + \cos\dfrac{1}{x}$

E f est dérivable en 0 et $f'(0) = 2$

Q14 Soit une urne qui contient 5 boules bleues, 4 boules blanches et 3 boules noires, toutes indiscernables au toucher. On tire simultanément 3 boules au hasard de l'urne. On répète cette expérience n fois de suite $(n \geq 5)$ en remettant dans l'urne les boules tirées après chaque tirage. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 boules de couleurs 2 à 2 distinctes $(n-1)$ fois exactement ?

A $\dfrac{8 \times 3^n}{11^n}$ B $\dfrac{8n \times 3^n}{11^n}$

C $\dfrac{8n \times 3^{n-1}}{11^n}$ D $\dfrac{8^n \times 3^{n-1}}{11^n}$

E $\dfrac{8 \times 3^n}{11^{n-1}}$

FACULTÉS DE MÉDECINE, DE PHARMACIE ET DE MÉDECINE DENTAIRE · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année · FMPD Maroc

Année universitaire 2023–2024 · 22 juillet 2023

2023 — Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14
A	C	E	D	E	B	D	C	C	B	C	A	C	C

Q1 ✔ Réponse A

Avec $\cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$: $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et de même $\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$. Donc

$$z = \sqrt{5}\left(\cos\frac{\pi}{8} - i\sin\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{10+5\sqrt{2}}}{2} - \frac{i\sqrt{10-5\sqrt{2}}}{2}.$$

(B oublie le facteur $\sqrt{5}$.)

Q2 ✔ Réponse C

$\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i\sqrt{3}) = \frac{2}{\sqrt{2}}e^{-i\pi/3} = \sqrt{2}\,e^{-i\pi/3}$. Donc $z = (\sqrt{2})^{18}e^{-6i\pi} = 2^9 = 512$.

Q3 ✔ Réponse E

Avec $z = x+iy$: $\frac{z+1}{z-1} = \frac{(z+1)(\bar{z}-1)}{|z-1|^2}$, dont la partie réelle vaut $\frac{x^2+y^2-1}{|z-1|^2}$.

Le quotient est imaginaire pur si et seulement si $x^2+y^2=1$, avec $z \neq 1$: c'est le cercle de centre O et de rayon 1 privé du point $(1,0)$.

Q4 ✔ Réponse D

$1 - \frac{1}{k^2} = \frac{k-1}{k} \times \frac{k+1}{k}$. Le produit télescope :

$$\begin{aligned} U_n &= \left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\cdots\times\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{n+1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n}\times\frac{n+1}{2} \\ &= \frac{n+1}{2n} \to \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Q5 ✔ Réponse E

$U_n = 1 - \frac{1}{2^n} \to 1$ (somme géométrique). Et $V_n = e^{U_n \ln 2} = 2^{U_n} \to 2^1 = 2$.

Q6 ✔ Réponse B

Pour $x>0$: $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x+2\sqrt{x}}} = \sqrt{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}} \to \sqrt{\frac{0}{2}} = 0$.

Q7 ✔ Réponse D

$g(x) = \frac{2^x x^x}{x^{2x}} = \left(\frac{2}{x}\right)^x = e^{x\ln(\frac{2}{x})}$. Quand $x \to +\infty$, $\ln\frac{2}{x} \to -\infty$, donc l'exposant tend vers $-\infty$ et $g(x) \to 0$.

Q8 ✔ Réponse C

$y = f'(1)(x-1) + f(1) = -3(x-1) + 3 = -3x + 6$.

Q9 ✔ Réponse C

$g \circ f(x) = \sqrt{\ln(x-1)+1}$ est définie si $x>1$ et $\ln(x-1) \geq -1$, c'est-à-dire $x-1 \geq \frac{1}{e}$, soit $x \geq 1+\frac{1}{e}$.

Q10 ✔ Réponse B

$\frac{1}{\sin x \tan x} = \frac{\cos x}{\sin^2 x}$, dont une primitive est $-\frac{1}{\sin x}$. Donc

$$\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,dx = -\frac{1}{\sin\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{\sin\frac{\pi}{6}} = -\sqrt{2}+2.$$

Q11 ✔ Réponse C

$\sin 2x = 2\sin x\cos x$ est la dérivée de $1+\sin^2 x$. Donc l'intégrale vaut $\left[\ln(1+\sin^2 x)\right]_0^{\pi/2} = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$.

Q12 ✔ Réponse A

Pour tout t : $(1+t) - (2+2t) - (1-t) + 2 = 0$. Tous les points de (Δ) vérifient l'équation de P : $(\Delta) \subset P$.

(De même $(1+t)+(1-t)-2=0$: (Δ) est aussi contenue dans P', donc D est fausse. Le vecteur directeur $(1;2;-1)$ n'est colinéaire à aucun des vecteurs normaux $(1;-1;-1)$ et $(1;0;1)$: B et E sont fausses.)

Q13 ✔ Réponse C

$\frac{f(x)-f(0)}{x} = 1 + x\sin\frac{1}{x}$ et $\left|x\sin\frac{1}{x}\right| \leq |x| \to 0$. Donc f est dérivable en 0 et $f'(0)=1$.

(Pour $x \neq 0$, $f'(x) = 1 + 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$: D a le mauvais signe devant le cosinus.)

Q14 ✔ Réponse C

Pour un tirage : $p = \frac{5\times4\times3}{\binom{12}{3}} = \frac{60}{220} = \frac{3}{11}$.

Les n tirages sont indépendants (loi binomiale) :

$P = \binom{n}{n-1}p^{n-1}(1-p) = n \times \frac{3^{n-1}}{11^{n-1}} \times \frac{8}{11} = \frac{8n\times 3^{n-1}}{11^n}$.

FACULTÉ DE MÉDECINE ET DE PHARMACIE · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès à la Faculté de Médecine et de Pharmacie

Année universitaire 2022–2023

2022 — Énoncé

Q1 Dans $\mathbb{C}$, l'ensemble des solutions de l'équation $\dfrac{2z-1}{z+1}=z$ est :

A $\left\{-1;\dfrac{1}{2}\right\}$
B $\left\{1+i\sqrt{3};1-i\sqrt{3}\right\}$
C $\left\{\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2};\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}\right\}$
D $\left\{i\sqrt{3};-i\sqrt{3}\right\}$
E Autre réponse

Q2 Si f est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y''+2y'+4y=0$, alors la fonction $g=2f$ est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

A $y''+2y'+4y=0$
B $y''+y'+y=0$
C $y''+4y'+4y=0$
D $2y''+4y'+y=0$
E Autre réponse

Q3 Si $z=e^{-i\theta}-e^{i\theta}$ avec $\theta\in]0;\pi[$, alors $|z|$ est égal à :

A 2 B $2\cos\theta$ C $2\cos\dfrac{\theta}{2}$ D $2\sin\theta$
E $2\sin\dfrac{\theta}{2}$

Q4 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n-\sqrt{n^2-n}\right)$ est égale à :

A $-\infty$ B 0 C $\dfrac{1}{2}$ D 1
E Autre réponse

Q5 Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé, on considère les deux points $A(1;2;3)$ et $B(2;0;1)$. L'ensemble des points $M(x;y;z)$ équidistants des points A et B est :

A Le plan : $x+y+z=6$
B Le plan : $2x-4y-4z=-9$
C Le plan : $2x-4y-4z=9$
D La droite : $\begin{cases}x+y+z=6\\2x-4y-4z=-9\end{cases}$
E Autre réponse

Q6 Dans $\mathbb{C}$, si $\arg(iz)\equiv\frac{7\pi}{6}\ [2\pi]$ et $|z|=\sqrt{2}$, alors la partie imaginaire de z^3 est égale à :

A 0 B $2\sqrt{2}$ C $\sqrt{2}$ D $-\sqrt{2}$
E $-2\sqrt{2}$

Q7 Soit $\alpha\in\mathbb{R}^*$. Si $\displaystyle\int_0^1\frac{e^{\alpha x}}{1+e^{\alpha x}}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\alpha}$, alors α est égal à :

A $\ln(e-1)$ B $2e-1$
C $\ln(2e+1)$ D $\ln(2e-1)$
E $2e+1$

Q8 Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct. Soit z un nombre complexe et Ω, M et M' les points d'affixes respectives $-\frac{\sqrt{3}}{3}$, z et z' tels que : $z'=\left(1+i\sqrt{3}\right)z+i$. Alors une mesure de $\left(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}\right)$ est :

A $\dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]$ B $\dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$
C $-\dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]$ D $-\dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$
E $\dfrac{\pi}{6}\ [2\pi]$

Q9 $ABCD$ est un carré de côté 1. On place les points E et F respectivement sur les côtés $[AB]$ et $[BC]$ tels que $BE=CF=x$. La valeur de x pour laquelle l'aire du triangle EFD est minimale est :

A 0 B $\dfrac{1}{4}$ C $\dfrac{1}{3}$ D $\dfrac{1}{2}$
E Autre réponse

Q10 Dans $\mathbb{C}$, si $|z|-z=3-i\sqrt{3}$, alors $|z|$ est égal à :

A 0 B 2 C $2\sqrt{3}$ D $3\sqrt{2}$
E $7\sqrt{2}$

Q11 Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct. Soient A et B les points d'affixes respectives $-i$ et i. L'ensemble des points M d'affixe z tels que $\left|\dfrac{iz-1}{\overline{z}+i}\right|=1$ est :

A La médiatrice du segment $[AB]$
B La droite (AB)
C La droite (AB) privée du point B
D Le cercle de diamètre $[AB]$
E Le cercle de diamètre $[AB]$ privé du point B

Q12 Soit $x\in\mathbb{R}^*$. Si $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{x}{7n}\right)^{29n}=2022$, alors x est égal à :

A $\dfrac{29}{7}\ln 2022$ B $2022\ln\dfrac{7}{29}$
C $2022\ln\dfrac{29}{7}$ D $\dfrac{7}{29}\ln 2022$
E Autre réponse

Q13 Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé, on considère le plan (P) d'équation $3x-2z+3=0$. On dispose d'un dé régulier dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On lance le dé et on obtient ainsi de manière équiprobable un nombre a $(1\le a\le 6)$. La probabilité que le point $A\left(a^2;2a;6a-3\right)$ appartienne au plan (P) est :

A $\dfrac{1}{6}$ B $\dfrac{1}{3}$ C $\dfrac{1}{2}$ D $\dfrac{2}{3}$
E Autre réponse

Q14 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2e^{3x}-6$. La primitive F de f sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 3 est définie par :

A $F(x)=\frac{2}{3}e^{3x}-6x-\frac{2}{3}$
B $F(x)=\frac{2}{3}e^{3x}-6x+\frac{7}{3}$
C $F(x)=\frac{2}{3}e^{3x}-6x-\frac{7}{3}$
D $F(x)=\frac{2}{3}e^{3x}-6x+\frac{2}{3}$

Q15 L'intégrale $\displaystyle\int_0^3\frac{x^2+2}{\sqrt{x^3+6x+4}}\,\mathrm{d}x$ est égale à :

A $\dfrac{1}{3}$ B $\dfrac{8}{3}$ C $\dfrac{10}{3}$ D $\dfrac{14}{3}$
E Autre réponse

Q16 Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite telle que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$; $v_1+v_2+\cdots+v_n=2n^2+n$, alors v_8 est égal à :

A 31 B 53 C 54 D 62 E 64

Q17 Soit f une fonction numérique dérivable sur $\mathbb{R}$. Si $(\forall x\in\mathbb{R})$; $f(2x-1)=x^2+3x$, alors $f(1)+f'(1)$ est égal à :

A $\dfrac{5}{2}$ B 4 C $\dfrac{9}{2}$ D $\dfrac{13}{2}$
E Autre réponse

Q18 Si pour tout entier naturel n, $I_n=\displaystyle\int_1^e x(\ln x)^n\,\mathrm{d}x$, alors $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ $2I_{n+1}+(n+1)I_n$ est égal à :

A e B e^2 C 1 D $\dfrac{e-1}{2}$
E $\dfrac{e+1}{2}$

Q19 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\sum_{k=0}^{n}x^k=1+x+x^2+\cdots+x^n$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé. L'équation réduite de la tangente à (C) au point d'abscisse 1 est :

A $y=\dfrac{n(n+1)}{2}x-\dfrac{(n-2)(n+1)}{2}$
B $y=\dfrac{n(n-1)}{2}x-\dfrac{(n-2)(n+1)}{2}$
C $y=\dfrac{n(n+1)}{2}x+\dfrac{(n-2)(n+1)}{2}$
D $y=\dfrac{n(n-1)}{2}x-\dfrac{n^2-1}{2}$
E $y=\dfrac{n(n+1)}{2}x+\dfrac{n^2-1}{2}$

Q20 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0\in]0,1[$ et $(\forall n\in\mathbb{N})$; $u_{n+1}=f(u_n)$, où f est la fonction définie sur $[0,1]$ par : $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}$. On a alors :

A $\lim u_n=0$ B $\lim u_n=\dfrac{1}{3}$
C $\lim u_n=1$ D $\lim u_n=+\infty$
E Autre réponse

FACULTÉ DE MÉDECINE ET DE PHARMACIE · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès à la Faculté de Médecine et de Pharmacie

Année universitaire 2022–2023

2022

Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14
C	A	D	C	B	A	D	B	D	B	A	D	B	B

Q15	Q16	Q17	Q18	Q19	Q20
C	A	D	B	A	E

Q1 ✔ Réponse C

Pour $z \neq -1$: $2z-1 = z(z+1) \iff z^2 - z + 1 = 0$.

Discriminant $-3 = (i\sqrt{3})^2$, d'où $z = \dfrac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ (différents de -1).

Q2 ✔ Réponse A

L'équation est linéaire et homogène :
$g'' + 2g' + 4g = 2(f'' + 2f' + 4f) = 0$. Donc g est solution de la même équation.

Q3 ✔ Réponse D

$e^{-i\theta} - e^{i\theta} = -2i\sin\theta$, donc $|z| = 2|\sin\theta| = 2\sin\theta$ puisque $\sin\theta > 0$ sur $]0;\pi[$.

Q4 ✔ Réponse C

Avec la quantité conjuguée :
$$n - \sqrt{n^2-n} = \frac{n}{n+\sqrt{n^2-n}} = \frac{1}{1+\sqrt{1-\frac{1}{n}}} \to \frac{1}{2}.$$

Q5 ✔ Réponse B

C'est le plan médiateur de $[AB]$: vecteur normal $\overrightarrow{AB}(1;-2;-2)$, passant par le milieu $I\left(\frac{3}{2};1;2\right)$.
$\left(x-\frac{3}{2}\right) - 2(y-1) - 2(z-2) = 0 \iff 2x - 4y - 4z + 9 = 0 \iff 2x - 4y - 4z = -9$.

Q6 ✔ Réponse A

$\arg z \equiv \dfrac{7\pi}{6} - \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{2\pi}{3}$, donc $z = \sqrt{2}\,e^{2i\pi/3}$ et
$z^3 = 2\sqrt{2}\,e^{2i\pi} = 2\sqrt{2}$, réel : sa partie imaginaire est 0.

Q7 ✔ Réponse D

$$\int_0^1 \frac{e^{\alpha x}}{1+e^{\alpha x}}\,dx = \frac{1}{\alpha}\left[\ln(1+e^{\alpha x})\right]_0^1 = \frac{1}{\alpha}\ln\frac{1+e^{\alpha}}{2}.$$
L'égalité donne $\ln\dfrac{1+e^{\alpha}}{2} = 1$, soit $1+e^{\alpha} = 2e$ et $\alpha = \ln(2e-1)$ (bien non nul).

Q8 ✔ Réponse B

Avec $\omega = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$: $(1+i\sqrt{3})\omega + i = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} - i + i = \omega$, donc Ω est le point fixe et $z' - \omega = (1+i\sqrt{3})(z-\omega)$.
Pour $M \neq \Omega$: $\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \arg(1+i\sqrt{3}) = \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

Q9 ✔ Réponse D

Dans le repère $A(0;0)$, $B(1;0)$, $C(1;1)$, $D(0;1)$: $E(1-x;0)$ et $F(1;1-x)$.
L'aire vaut $\dfrac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{ED}\right)\right|$ avec $\overrightarrow{EF}(x;1-x)$ et $\overrightarrow{ED}(x-1;1)$: $\mathcal{A}(x) = \dfrac{x^2-x+1}{2}$, minimale pour $x = \dfrac{1}{2}$.

Q10 ✔ Réponse B

Avec $r = |z|$: $z = (r-3) + i\sqrt{3}$, donc
$r^2 = (r-3)^2 + 3 \iff 0 = -6r + 12 \iff r = 2$.

Q11 ✔ Réponse A

$|iz-1| = |i(z+i)| = |z+i| = MA$ et
$|\bar{z}+i| = |\overline{z-i}| = |z-i| = MB$.
La condition s'écrit $MA = MB$ (avec $M \neq B$, déjà exclu puisque B n'est pas équidistant) : c'est la médiatrice de $[AB]$, c'est-à-dire l'axe des réels.

Q12 ✔ Réponse D

$29n\ln\left(1+\dfrac{x}{7n}\right) \to 29n \times \dfrac{x}{7n} = \dfrac{29x}{7}$, donc la limite vaut $e^{29x/7}$.
$e^{29x/7} = 2022 \iff x = \dfrac{7}{29}\ln 2022$.

Q13 ✔ Réponse B

$A \in (P) \iff 3a^2 - 2(6a-3) + 3 = 0 \iff 3a^2 - 12a + 9 = 0 \iff (a-1)(a-3) = 0$.
Deux faces sur six conviennent ($a = 1$ ou $a = 3$) : $p = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$.

Q14 ✔ Réponse B

$F(x) = \dfrac{2}{3}e^{3x} - 6x + c$ et $F(0) = \dfrac{2}{3} + c = 3$, donc $c = \dfrac{7}{3}$.

Q15 ✔ Réponse C

Avec $u = x^3 + 6x + 4$, $u' = 3(x^2+2)$: une primitive est $\dfrac{2}{3}\sqrt{x^3+6x+4}$. L'intégrale vaut $\dfrac{2}{3}\left(\sqrt{49} - \sqrt{4}\right) = \dfrac{2}{3} \times 5 = \dfrac{10}{3}$.

Q16 ✔ Réponse A

$v_8 = (v_1 + \cdots + v_8) - (v_1 + \cdots + v_7) =$
$(2 \times 64 + 8) - (2 \times 49 + 7) = 136 - 105 = 31$.

Q17 ✔ Réponse D

Pour $x = 1$: $f(1) = 1 + 3 = 4$. En dérivant :
$2f'(2x-1) = 2x + 3$, d'où pour $x = 1$: $f'(1) = \dfrac{5}{2}$.
$f(1) + f'(1) = 4 + \dfrac{5}{2} = \dfrac{13}{2}$.

Q18 ✔ Réponse B

Intégration par parties avec $u = (\ln x)^{n+1}$ et $v' = x$ ($v = \frac{x^2}{2}$) :
$$I_{n+1} = \left[\frac{x^2}{2}(\ln x)^{n+1}\right]_1^e - \frac{n+1}{2}\int_1^e x(\ln x)^n\,dx = \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2}I_n.$$
Donc $2I_{n+1} + (n+1)I_n = e^2$.

Q19 ✔ Réponse **A**

$f(1) = n+1$ et $f'(1) = \sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Tangente :

$$y = \frac{n(n+1)}{2}(x-1) + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2}x - \frac{(n+1)(n-2)}{2}.$$

Q20 ✔ Réponse **E**

f est croissante sur $[0,1]$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ et $f(1-x) = 1 - f(x)$.
Pour $0 < x < \frac{1}{2}$, on a $\dfrac{f(x)}{1-f(x)} = \sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$ avec $0 < \dfrac{x}{1-x} < 1$, donc $\dfrac{x}{1-x} < \sqrt{\dfrac{x}{1-x}} < 1$. Comme $t \mapsto \dfrac{t}{1-t}$ est croissante, cela donne $x < f(x) < \frac{1}{2}$.
Si $u_0 < \frac{1}{2}$, la suite est croissante et majorée par $\frac{1}{2}$; si $u_0 > \frac{1}{2}$, elle est décroissante et minorée par $\frac{1}{2}$ (par symétrie). Dans tous les cas elle converge vers le point fixe $\frac{1}{2}$ de $]0,1[$, qui n'est pas proposé : la réponse est E.

FACULTÉ DE MÉDECINE ET DE PHARMACIE · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès à la Faculté de Médecine et de Pharmacie

Année universitaire 2021–2022

2021

Énoncé

Q1 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{\ln(e+x)}-1}{\sqrt{x+1}-1}$ est égale à :

A $\dfrac{1}{2e}$ B $\dfrac{1}{e}$ C 1 D e E $2e$

Q2 Si $f(x)=\dfrac{1}{1-x}\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$, alors $f'(x)$ est égale à :

A $\dfrac{1}{(1-x)^2}\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)+\dfrac{1}{x(1-x^2)}$

B $\dfrac{1}{(1-x)^2}\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{x(1-x^2)}$

C $\dfrac{1}{1-x^2}\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{x(1-x^2)}$

D $\dfrac{1}{(1-x)^2}\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{x(1-x)^2}$

E $\dfrac{1}{(1-x)^2}\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{1-x^2}$

Q3 Le nombre complexe $\left(\dfrac{7-15i}{15+7i}\right)^{2021}$ est égal à :

A i B -1 C $7-15i$ D $-i$ E $7+15i$

Q4 Si $x\in]0,1[$, alors

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-x+x^2-\cdots+(-1)^n x^n\right)$$

est égale à :

A $\dfrac{1}{x-1}$ B $\dfrac{1}{1-x}$ C 1 D $\dfrac{-1}{1+x}$ E $\dfrac{1}{1+x}$

Q5 Dans $\mathbb{R}$, le nombre de solutions de l'équation $x^5+x-1=0$ est :

A 0 B 1 C 2 D 3 E 5

Q6 Dans $\mathbb{C}$, si $|z|\,\overline{z}=15-20i$, alors $|(1+i)z|$ est égal à :

A $\sqrt{2}$ B $2\sqrt{2}$ C $3\sqrt{2}$ D $4\sqrt{2}$ E $5\sqrt{2}$

Q7 Si f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\dfrac{\sqrt{\ln(1+x^2)}}{x}$, alors :

A $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$ B $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-1$

C $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\dfrac{1}{2}$ D $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$

E La fonction f n'admet pas de limite en 0

Q8 $(u_n)_{n\geq 0}$ est la suite définie par : $u_0=1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=u_n^2+u_n$. La limite de la suite (u_n), si elle existe, est égale à :

A 1 B $+\infty$ C 0 D -1

E Autre valeur

Q9 L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+e^{-x^2}}\,dx$ est égale à :

A $\sqrt{\ln\dfrac{1+e}{2}}$ B $\ln\sqrt{1+e}$

C $\ln(1+e)$ D $\ln\sqrt{\dfrac{1+e}{2}}$

E $\sqrt{\ln(1+e)}$

Q10 Si $f(1)=4$ et $(\forall x\in\mathbb{R}_+^*)$ $f'(x)=2x+\ln x$, alors $f(e)$ est égale à :

A e^2 B $e+4$ C e^2+4 D e

E 4

Q11 Dans $\mathbb{C}$, si $z=1+i\left(1+\sqrt{2}\right)$, alors :

A $|z|=2\sqrt{2}\cos\dfrac{\pi}{8}$ et $\arg z\equiv\dfrac{3\pi}{8}\ [2\pi]$

B $|z|=2\sqrt{2}\cos\dfrac{\pi}{8}$ et $\arg z\equiv\dfrac{\pi}{8}\ [2\pi]$

C $|z|=2\sqrt{2}\cos\dfrac{3\pi}{8}$ et $\arg z\equiv\dfrac{3\pi}{8}\ [2\pi]$

D $|z|=2\sqrt{2}\cos\dfrac{3\pi}{8}$ et $\arg z\equiv\dfrac{\pi}{8}\ [2\pi]$

E $|z|=2\cos\dfrac{\pi}{8}$ et $\arg z\equiv\dfrac{3\pi}{8}\ [2\pi]$

Q12 Si $\displaystyle\int_1^2 f'(x)f''(x)\,dx=8$ et $f'(2)-f'(1)=2$, alors $f'(2)+f'(1)$ est égal à :

A 4 B 6 C 8 D 10 E 12

Q13 Soit $q\in\mathbb{R}$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n} q^k$. Si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et $\lim S_n=4$, alors q est égal à :

A $\dfrac{2}{3}$ B $\dfrac{3}{4}$ C $\dfrac{4}{5}$ D $\dfrac{5}{6}$ E $\dfrac{6}{7}$

Q14 L'intégrale $I=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\,dx$ est égale à :

A $\dfrac{\pi}{3}$ B $\dfrac{\pi}{4}$ C $\dfrac{\pi}{6}$ D $\dfrac{\pi}{8}$ E $\dfrac{\pi}{12}$

Q15 Dans $\mathbb{C}$, si $|z_1|=|z_2|=1$ et $|z_1+z_2|=\sqrt{3}$, alors $|z_1-z_2|$ est égal à :

A 1 B 3 C $\sqrt{3}$ D 2 E $\sqrt{2}$

Q16 $(u_n)_{n\geq 0}$ est la suite définie par : $u_0=0$, $u_1=1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=\sqrt{\dfrac{u_{n+1}^2+u_{n-1}^2}{2}}$. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ est égale à :

A 0 B $+\infty$ C 1 D $\sqrt{2}$ E $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Q17 Soient $(a;b)\in\mathbb{R}^2$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\begin{cases} ax+b, & \text{si } x\leq 0\\ \frac{1}{x+1}, & \text{si } x>0\end{cases}$. La fonction f est dérivable en 0 si et seulement si :

A $a=1$ et $b=1$

B $a=-1$ et $b=1$

C $a=2$ et $b=1$

D $a=-1$ et $b=-1$

E $a=-1$ et $b=0$

Q18 Soient $(a;b)\in\mathbb{R}^2$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=3x^2+2ax+b$. Si $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx<2$, alors le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $f(x)=0$ est :

A 0 B 1 C 2 D 3 E 4

Q19 Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ et $\alpha\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$. Soient z_1 et z_2 les deux solutions de l'équation d'inconnue z : (E) : $z^2-\sin(2\alpha)z+\sin^2\alpha=0$. La valeur de α pour laquelle les points O, $M(z_1)$ et $M(z_2)$ sont les sommets d'un triangle équilatéral est :

A $\dfrac{\pi}{3}$ B $\dfrac{\pi}{4}$ C $\dfrac{\pi}{5}$ D $\dfrac{\pi}{6}$ E $\dfrac{\pi}{8}$

Q20 Pour tout entier naturel non nul n et pour tout réel x, on pose : $f_n(x)=e^{-x}-nx$. On a :

A $(\forall n\in\mathbb{N}^*)(\exists!\,\alpha_n\in]0;1[)$: $f_n(\alpha_n)=0$ et $\lim n\alpha_n=1$

B $(\forall n\in\mathbb{N}^*)(\exists!\,\alpha_n\in]0;1[)$: $f_n(\alpha_n)=0$ et $\lim n\alpha_n=0$

C $(\forall n\in\mathbb{N}^*)(\exists!\,\alpha_n\in]0;1[)$: $f_n(\alpha_n)=0$ et $\lim n\alpha_n=e$

D $(\forall n\in\mathbb{N}^*)(\exists!\,\alpha_n\in]-1;0[)$: $f_n(\alpha_n)=0$ et $\lim n\alpha_n=0$

E $(\forall n\in\mathbb{N}^*)(\exists!\,\alpha_n\in]-1;0[)$: $f_n(\alpha_n)=0$ et $\lim n\alpha_n=1$

FACULTÉ DE MÉDECINE ET DE PHARMACIE · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès à la Faculté de Médecine et de Pharmacie

Année universitaire 2021–2022

2021

Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14
B	B	D	E	B	E	E	B	D	C	A	C	C	E

Q15	Q16	Q17	Q18	Q19	Q20
A	B	B	C	D	A

Q1 ✔ Réponse B

$\ln(e+x) = 1 + \ln\left(1+\frac{x}{e}\right) \sim 1 + \frac{x}{e}$, donc $\sqrt{\ln(e+x)} - 1 \sim \frac{x}{2e}$; et $\sqrt{x+1} - 1 \sim \frac{x}{2}$.

Le quotient tend vers $\frac{x/(2e)}{x/2} = \frac{1}{e}$.

Q2 ✔ Réponse B

$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$ et

$\left(\ln\frac{x+1}{x}\right)' = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} = -\frac{1}{x(x+1)}$. Donc

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{(1-x)x(x+1)} = \frac{1}{(1-x)^2}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x(1-x^2)}.$$

Q3 ✔ Réponse D

$i(7-15i) = 15+7i$, donc $\frac{7-15i}{15+7i} = \frac{1}{i} = -i$. Comme $2021 = 4\times 505 + 1$: $(-i)^{2021} = (-i)^1 = -i$.

Q4 ✔ Réponse E

C'est une somme géométrique de raison $-x$: elle vaut $\frac{1-(-x)^{n+1}}{1+x}$, et $(-x)^{n+1} \to 0$ car $|x| < 1$. La limite est $\frac{1}{1+x}$.

Q5 ✔ Réponse B

$g(x) = x^5 + x - 1$ a pour dérivée $5x^4 + 1 > 0$: g est strictement croissante et continue, de $-\infty$ à $+\infty$. Elle s'annule exactement une fois (entre 0 et 1, puisque $g(0) = -1$ et $g(1) = 1$).

Q6 ✔ Réponse E

En passant au module : $|z|^2 = |15 - 20i| = 25$, donc $|z| = 5$ et $|(1+i)z| = \sqrt{2}\times 5 = 5\sqrt{2}$.

Q7 ✔ Réponse E

$\sqrt{\ln(1+x^2)} \sim \sqrt{x^2} = |x|$, donc $f(x) \sim \frac{|x|}{x}$: $f \to 1$ en 0^+ et $f \to -1$ en 0^-. Les limites à droite et à gauche diffèrent : pas de limite en 0.

Q8 ✔ Réponse B

$u_{n+1} - u_n = u_n^2 \geq 0$: la suite est croissante, donc $u_n \geq 1$. Si elle convergeait vers ℓ, on aurait $\ell = \ell^2 + \ell$, soit $\ell = 0$, impossible puisque $u_n \geq 1$. Croissante et non convergente, elle tend vers $+\infty$.

Q9 ✔ Réponse D

$\frac{x}{1+e^{-x^2}} = \frac{xe^{x^2}}{e^{x^2}+1}$, dont une primitive est $\frac{1}{2}\ln\left(e^{x^2}+1\right)$.

L'intégrale vaut $\frac{1}{2}(\ln(e+1) - \ln 2) = \ln\sqrt{\frac{1+e}{2}}$.

Q10 ✔ Réponse C

$f(x) = x^2 + x\ln x - x + c$ (car $(x\ln x - x)' = \ln x$).

$f(1) = 1 - 1 + c = 4$, donc $c = 4$ et

$f(e) = e^2 + e - e + 4 = e^2 + 4$.

Q11 ✔ Réponse A

$|z|^2 = 1 + (1+\sqrt{2})^2 = 4 + 2\sqrt{2}$ et

$\left(2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{8}\right)^2 = 8\times\frac{2+\sqrt{2}}{4} = 4 + 2\sqrt{2}$: $|z| = 2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{8}$.

z est dans le premier quadrant avec

$\tan(\arg z) = 1 + \sqrt{2} = \tan\frac{3\pi}{8}$, donc $\arg z \equiv \frac{3\pi}{8}\ [2\pi]$.

Q12 ✔ Réponse C

$\int_1^2 f'f'' = \left[\frac{(f')^2}{2}\right]_1^2 = \frac{f'(2)^2 - f'(1)^2}{2} = 8$, donc

$(f'(2) - f'(1))(f'(2) + f'(1)) = 16$ et $f'(2) + f'(1) = \frac{16}{2} = 8$.

Q13 ✔ Réponse C

(S_n) converge si et seulement si $|q| < 1$, et alors $\lim S_n = \frac{q}{1-q}$.

$\frac{q}{1-q} = 4 \iff q = \frac{4}{5}$.

Q14 ✔ Réponse E

Soit $J = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}\,dx$. Le changement $x = \frac{\pi}{2} - t$ échange les bornes $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{3}$ ainsi que sin et cos : $I = J$.

Or $I + J = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$, donc $I = \frac{\pi}{12}$.

Q15 ✔ Réponse A

Identité du parallélogramme :

$|z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2 = 2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right) = 4$. Donc

$|z_1 - z_2|^2 = 4 - 3 = 1$.

Q16 ✔ Réponse B

Avec $v_n = u_n^2$: $2v_n = v_{n+1} + v_{n-1}$, soit $v_{n+1} - v_n = v_n - v_{n-1}$.

La suite (v_n) est arithmétique de raison $v_1 - v_0 = 1$: $v_n = n$, donc $u_n = \sqrt{n} \to +\infty$.

Q17 ✔ Réponse B

Il faut d'abord la continuité en 0 : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x+1} = 1 = f(0) = b$.
Ensuite les dérivées à gauche (a) et à droite ($-\frac{1}{(0+1)^2} = -1$) doivent être égales : $a = -1$.

Q18 ✔ Réponse C

$\int_{-1}^{1} (3x^2 + 2ax + b)\,dx = 2 + 0 + 2b < 2$ donne $b < 0$. Le discriminant de $3x^2 + 2ax + b$ vaut $4a^2 - 12b > 0$: deux solutions réelles.

Q19 ✔ Réponse D

$\Delta = \sin^2 2\alpha - 4\sin^2\alpha = -4\sin^4\alpha = (2i\sin^2\alpha)^2$, d'où

$$z = \sin\alpha\cos\alpha \pm i\sin^2\alpha = \sin\alpha\, e^{\pm i\alpha}.$$

$OM_1 = OM_2 = \sin\alpha$ et l'angle $\widehat{M_1OM_2}$ vaut 2α. Le triangle est équilatéral si $2\alpha = \dfrac{\pi}{3}$, soit $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$.

Q20 ✔ Réponse A

f_n est strictement décroissante, $f_n(0) = 1 > 0$ et $f_n(1) = e^{-1} - n < 0$: il existe un unique $\alpha_n \in]0;1[$ tel que $f_n(\alpha_n) = 0$.
Alors $n\alpha_n = e^{-\alpha_n}$, donc $0 < \alpha_n \leq \dfrac{1}{n} \to 0$ et $n\alpha_n = e^{-\alpha_n} \to e^0 = 1$.

FACULTÉ DE MÉDECINE ET DE PHARMACIE · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès à la Faculté de Médecine et de Pharmacie

Année universitaire 2020–2021

2020 — Énoncé

Q1 Si z est le nombre complexe de module $\sqrt{2}$ et d'argument $\frac{\pi}{3}$, alors z^8 est égal à :

A $8+i8\sqrt{3}$ B $-8+i8\sqrt{3}$
C $-8-i8\sqrt{3}$ D $8-i8\sqrt{3}$
E $4+i4\sqrt{3}$

Q2 Si θ est un nombre réel, alors $\cos^3\theta$ est égal à :

A $\frac{1}{8}(\cos 3\theta+3\cos\theta)$
B $\frac{1}{4}(\cos 3\theta+3\cos\theta)$
C $\frac{1}{4}(\sin 3\theta+3\sin\theta)$
D $\frac{1}{8}(3\cos\theta-\cos 3\theta)$
E $\frac{1}{8}(\sin 3\theta+3\sin\theta)$

Q3 Si $x\in]0,1[$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-x)^n(1+x)^n$ est égale à :

A $+\infty$ B $-\infty$ C 0 D -1 E 1

Q4 Le domaine de définition de la fonction f définie par $f(x)=\frac{1}{x-1}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ est :

A $]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$
B $]-1,1[\cup]1,+\infty[$
C $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$
D $]-\infty,-1[\cup]0,1[\cup]1,+\infty[$
E $]-1,1[$

Q5 Si $f(x)=(x^2-x)\,e^{\frac{1}{x}}$, alors $f'(x)$ est égale à :

A $(2x-1)e^{\frac{1}{x}}$
B $\left(1-\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}$
C $\left(\frac{1}{x}-1\right)e^{\frac{1}{x}}$
D $\left(2x-2+\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}$
E $\left(2x-\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}$

Q6 Si z est un nombre complexe tel que $\arg(z-1)\equiv\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$ et $\arg(z+1)\equiv\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$, alors z est égal à :

A $\sqrt{3}\,i$ B $2\sqrt{3}\,i$
C $-\sqrt{3}\,i$ D $-2\sqrt{3}\,i$
E $1+\sqrt{3}\,i$

Q7 Si $z=1+ie^{i\frac{\theta}{2}}$ où $\theta\in]-\pi,\pi[$, alors $|z|$ est égal à :

A 2 B $2\cos\frac{\theta}{2}$
C $2\cos\frac{\theta+\pi}{4}$ D $\cos\frac{\theta+\pi}{4}$
E $2\sin\frac{\theta}{4}$

Q8 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2n}$ est égale à :

A 0 B e^{-4} C e^4 D e E 1

Q9 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite géométrique de premier terme $u_1=2$ et de raison $q=\frac{1}{3}$. Alors le produit $u_1\times u_2\times\cdots\times u_n$ $(n\geq 1)$ est égal à :

A $2^n\cdot 3^{\frac{n(n-1)}{2}}$ B $\frac{2^n}{3^{\frac{n(n-1)}{2}}}$
C $\frac{2^n}{3^{\frac{n(n+1)}{2}}}$ D $2^n\cdot 3^{\frac{n(n+1)}{2}}$
E $\frac{1}{2^n\cdot 3^{\frac{n(n-1)}{2}}}$

Q10 Si $(\forall x\in\mathbb{R})$; $f(x)=(x-5)(x-4)(x-3)(x-2)(x-1)$, alors $f'(1)$ est égale à :

A 24 B 1 C 0 D 5 E -24

Q11 Soit f la fonction définie par : $f(x)=\frac{2\ln x}{x\,(1+(\ln x)^2)}$. La primitive de f sur $]0,+\infty[$ qui s'annule en 1 est :

A $\ln\left((\ln x)^2+1\right)$
B $(\ln x)^2$
C $2\ln\left((\ln x)^2+1\right)$
D $\frac{x\ln x}{\ln x+1}$
E $\frac{2\ln x}{(\ln x)^2+1}$

Q12 L'intégrale $\int_0^1\frac{2t+3}{t+2}\,\mathrm{d}t$ est égale à :

A $\ln\frac{3}{2}$ B $2+\ln\frac{3}{2}$
C $2-\ln\frac{2}{3}$ D $2+\ln\frac{2}{3}$
E $\ln\frac{2}{3}$

Q13 Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. L'ensemble des points M d'affixe z tels que $z+\frac{1}{z}\in\mathbb{R}$ est :

A L'axe des réels privé du point O
B Le cercle de centre O et de rayon 1
C L'axe des réels privé des deux points $A(-1)$ et $B(1)$
D Le cercle de centre O et de rayon 1 privé des deux points $A(-1)$ et $B(1)$
E L'axe des réels privé du point O, union le cercle de centre O et de rayon 1

Q14 Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $w_0=\frac{1}{2}$ et $(\forall n\in\mathbb{N})$; $w_{n+1}=(w_n-1)^2+1$. Si (w_n) est convergente, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}w_n$ est égale à :

A 0 B 2 C 1 D $\frac{1}{2}$ E -1

Q15 Soit $a\in]0,+\infty[$ et f la fonction définie par : $f(x)=1+x\ln\sqrt{1+\frac{a}{x}}$. Alors $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ est égale à :

A 1 B $1+\frac{a}{2}$ C $1+a$ D $+\infty$
E a

Q16 Soit ABC un triangle isocèle en A tel que $AB=AC=10$. L'aire maximale du triangle ABC est :

A $25\frac{\sqrt{2}}{2}$ B 50 C 100 D 10
E $5\sqrt{2}$

Q17 Si $(\forall x\in\mathbb{R}_+^*)$; $f(x)=x^3+3\ln x+1$, alors le nombre dérivé $\left(f^{-1}\right)'(2)$ est égal à :

A $\frac{1}{3}$ B $\frac{1}{6}$ C $\frac{1}{5}$ D $\frac{1}{4}$ E $\frac{1}{2}$

Q18 L'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x)\,e^x\,\mathrm{d}x$ est égale à :

A $\frac{1+e^{\frac{\pi}{2}}}{2}$ B $\frac{e+e^{\frac{\pi}{2}}}{2}$
C $\frac{1-e^{\frac{\pi}{2}}}{2}$ D $1+e^{\frac{\pi}{2}}$
E $1-e^{\frac{\pi}{2}}$

Q19 On considère la fonction f définie par : $(\forall x\in\mathbb{R})\ f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$. Un encadrement de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0,1]$ est :

A $0\leq f'(x)\leq\frac{1}{\sqrt{e}}$
B $-\frac{1}{\sqrt{e}}\leq f'(x)\leq 0$
C $-\frac{1}{2}\leq f'(x)\leq 0$
D $0\leq f'(x)\leq\sqrt{e}$
E $-\frac{1}{\sqrt{e}}\leq f'(x)\leq-\frac{1}{2}$

Q20 Soit $f(x)=\sqrt{x^3+2x^2+3}-ax\sqrt{x+b}$, avec a et b deux réels donnés. f admet une limite finie en $+\infty$ si et seulement si :

A $a>0$ et $b>0$ B $a=1$ et $b>0$
C $a=1$ et $b=2$ D $a=1$ et $b=0$
E $a>0$ et $b=0$

FACULTÉ DE MÉDECINE ET DE PHARMACIE · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès à la Faculté de Médecine et de Pharmacie

Année universitaire 2020–2021

2020

Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14
B	B	C	D	D	A	C	B	B	A	A	D	E	C

Q15	Q16	Q17	Q18	Q19	Q20
B	B	B	A	B	C

Q1 ✔ Réponse B

$z^8 = (\sqrt{2})^8 e^{8i\pi/3} = 16\,e^{2i\pi/3} = 16\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -8 + 8i\sqrt{3}$.

Q2 ✔ Réponse B

$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$, donc $\cos^3\theta = \frac{1}{4}(\cos 3\theta + 3\cos\theta)$.

Q3 ✔ Réponse C

$(1-x)^n(1+x)^n = (1-x^2)^n$ avec $0 < 1-x^2 < 1$: la limite est 0.

Q4 ✔ Réponse D

Il faut $x \neq 0$, $x \neq 1$ et $1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x} > 0$, c'est-à-dire $x < -1$ ou $x > 0$. D'où $D_f =]-\infty, -1[\cup]0, 1[\cup]1, +\infty[$.

Q5 ✔ Réponse D

$f'(x) = (2x-1)e^{1/x} + (x^2 - x) \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) e^{1/x} =$
$\left(2x - 1 - 1 + \frac{1}{x}\right) e^{1/x} = \left(2x - 2 + \frac{1}{x}\right) e^{1/x}$.

Q6 ✔ Réponse A

Pour $z = \sqrt{3}\,i$: $z - 1 = -1 + i\sqrt{3} = 2e^{2i\pi/3}$ et $z + 1 = 1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\pi/3}$. Les deux conditions sont vérifiées. (Le point est l'intersection de la demi-droite issue de 1 de direction $\frac{2\pi}{3}$ et de la demi-droite issue de -1 de direction $\frac{\pi}{3}$: il est unique.)

Q7 ✔ Réponse C

$ie^{i\theta/2} = e^{i\varphi}$ avec $\varphi = \frac{\theta+\pi}{2}$, et $1 + e^{i\varphi} = 2\cos\frac{\varphi}{2}\,e^{i\varphi/2}$.
Donc $|z| = 2\left|\cos\frac{\theta+\pi}{4}\right| = 2\cos\frac{\theta+\pi}{4}$, car $\frac{\theta+\pi}{4} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Q8 ✔ Réponse B

$2n\ln\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \sim 2n \times \left(-\frac{2}{n+1}\right) \to -4$. La limite vaut e^{-4}.

Q9 ✔ Réponse B

$u_k = 2 \times 3^{-(k-1)}$, donc le produit vaut
$2^n \times 3^{-(0+1+\cdots+(n-1))} = \frac{2^n}{3^{\frac{n(n-1)}{2}}}$.

Q10 ✔ Réponse A

$f(x) = g(x)(x-1)$ avec $g(x) = (x-5)(x-4)(x-3)(x-2)$, donc $f'(1) = g(1) = (-4)(-3)(-2)(-1) = 24$.

Q11 ✔ Réponse A

Avec $u = 1 + (\ln x)^2$: $u' = \frac{2\ln x}{x}$, donc $f = \frac{u'}{u}$ et $F(x) = \ln\left(1 + (\ln x)^2\right)$, qui vaut bien 0 en $x = 1$.

Q12 ✔ Réponse D

$\frac{2t+3}{t+2} = 2 - \frac{1}{t+2}$. L'intégrale vaut
$2 - [\ln(t+2)]_0^1 = 2 - \ln\frac{3}{2} = 2 + \ln\frac{2}{3}$.

Q13 ✔ Réponse E

Pour $z \neq 0$: $z + \frac{1}{z}$ est réel si et seulement si il est égal à son conjugué, $z + \frac{1}{z} = \bar{z} + \frac{1}{\bar{z}}$, ce qui s'écrit $(z - \bar{z})\left(1 - \frac{1}{|z|^2}\right) = 0$.
Donc z est réel (non nul) ou $|z| = 1$: c'est l'axe des réels privé de O, union le cercle unité.

Q14 ✔ Réponse C

Une limite ℓ vérifie
$\ell = (\ell-1)^2 + 1 \iff \ell^2 - 3\ell + 2 = 0 \iff \ell = 1$ ou $\ell = 2$.
Or $w_1 = \frac{5}{4} \in [1, 2]$, et pour $x \in [1, 2]$: $1 \leq (x-1)^2 + 1 \leq x$. La suite est donc décroissante à partir du rang 1, avec $w_n \leq \frac{5}{4} < 2$: sa limite est 1.

Q15 ✔ Réponse B

$x\ln\sqrt{1 + \frac{a}{x}} = \frac{x}{2}\ln\left(1 + \frac{a}{x}\right) \sim \frac{x}{2} \times \frac{a}{x} = \frac{a}{2}$. Donc $f(x) \to 1 + \frac{a}{2}$.

Q16 ✔ Réponse B

$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin\widehat{A} = 50\sin\widehat{A} \leq 50$, avec égalité pour un angle droit en A.

Q17 ✔ Réponse B

$f(1) = 1 + 0 + 1 = 2$, donc $f^{-1}(2) = 1$. $f'(x) = 3x^2 + \frac{3}{x}$ et $f'(1) = 6 \neq 0$, d'où $\left(f^{-1}\right)'(2) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{6}$.

Q18 ✔ Réponse A

Une primitive de $e^x \sin x$ est $\frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2}$ (deux intégrations par parties, ou dériver pour vérifier). L'intégrale vaut
$\frac{e^{\pi/2}(1-0)}{2} - \frac{1 \times (0-1)}{2} = \frac{1 + e^{\pi/2}}{2}$.

Q19 ✔ Réponse B

$f'(x) = -xe^{-x^2/2}$. La fonction $g(x) = xe^{-x^2/2}$ a pour dérivée $(1-x^2)e^{-x^2/2} \geq 0$ sur $[0,1]$: elle croît de $g(0) = 0$ à $g(1) = e^{-1/2}$.

Donc $0 \leq g(x) \leq \dfrac{1}{\sqrt{e}}$, soit $-\dfrac{1}{\sqrt{e}} \leq f'(x) \leq 0$.

Q20 ✔ Réponse C

Quand $x \to +\infty$:

$$\begin{aligned}\sqrt{x^3+2x^2+3} &= x^{3/2}\sqrt{1+\tfrac{2}{x}+\tfrac{3}{x^3}} \\ &= x^{3/2} + x^{1/2} + o(1) \\ ax\sqrt{x+b} &= ax^{3/2} + \frac{ab}{2}x^{1/2} + o(1).\end{aligned}$$

Donc $f(x) = (1-a)x^{3/2} + \left(1 - \dfrac{ab}{2}\right)x^{1/2} + o(1)$. La limite est finie si et seulement si $a = 1$ et $1 - \dfrac{b}{2} = 0$, soit $b = 2$ (la limite vaut alors 0).

FACULTÉ DE MÉDECINE ET DE PHARMACIE DE FÈS · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès · Faculté de Médecine et de Pharmacie de Fès

Session 2019–2020

2019 Énoncé

Q1 (2 pts) Le domaine de définition de la fonction numérique f de la variable réelle x définie par $f(x) = \tan\left(\sqrt[3]{-\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}+\frac{\pi}{2}\right)$ est égal à :

A $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ B $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ C vide D $\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ E $\mathbb{R}$

Q2 (2 pts) La fonction dérivée 3e de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\left(e^{-x}+\frac{1}{2}x-1\right)$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

A $f'''(x) = e^{-x}(3-x)+1$
B $f'''(x) = e^{-x}(3-x)$
C $f'''(x) = e^{-x}(x-3)$
D $f'''(x) = 2e^{-x}(3-x)$
E $f'''(x) = e^{-x}$

Q3 (2 pts) La valeur de l'intégrale $I = \int_1^{e^2} (\ln t)^2\,\mathrm{d}t$ est :

A $I = 2\left(e^2-1\right)$ B $I = e-2$ C $I = e^2-2$ D $I = 0$ E $I = 2\left(1-e^2\right)$

Q4 (2 pts) La fonction numérique définie sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ par $g(x) = \ln\left(\frac{1+\sin x}{\cos x}\right)$ est :

A strictement négative
B paire
C ni paire ni impaire
D strictement positive
E impaire

Q5 (2 pts) Dans l'ensemble des nombres réels, l'équation $e^x+ix = x+ie^x$:

A admet quatre solutions
B admet une seule solution
C admet trois solutions
D n'admet aucune solution
E admet une infinité de solutions

Q6 (2 pts) Une urne contient trois boules vertes, quatre boules bleues et cinq boules blanches indiscernables au toucher. On tire au hasard et simultanément deux boules de cette urne. La probabilité d'avoir deux boules de même couleur est :

A $p = 1$
B $p = \frac{C_3^2C_4^2C_5^2}{C_{12}^2}$
C $p = \frac{C_3^2+C_4^2+C_5^2}{C_{12}^2}$
D $p = \frac{A_3^2+A_4^2+A_5^2}{C_{12}^2}$
E $p = \frac{A_3^2A_4^2A_5^2}{C_{13}^2}$

Q7 (2 pts) Le nombre complexe $\frac{2e^{2019i\frac{\pi}{3}}+2e^{2016i\frac{\pi}{3}}}{e^{2020i\pi}+e^{2018i\pi}}$ est :

A égal à 1
B nul
C strictement négatif
D imaginaire pur et non nul
E égal à 2

Q8 (0,75 pt) La solution générale de l'équation différentielle $\pi y'' = 0$ est l'ensemble des applications définies sur $\mathbb{R}$ par (où a et b sont deux nombres réels) :

A $y(x) = ax+b$
B $y(x) = (ax+b)e^{-\pi x}$
C $y(x) = e^{-\pi x}\left(a\cos(\pi x)+b\sin(\pi x)\right)$
D $y(x) = a\cos\left(\sqrt{\pi}\,x+b\right)$
E $y(x) = a\cos(\pi x+b)$

Q9 (0,75 pt) Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct, l'ensemble des points M vérifiant $\overrightarrow{AM}\cdot\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right) = 0$, où A, B et C sont trois points distincts deux à deux fixés dans l'espace, est :

A l'ensemble $\{A,B,C\}$
B un cercle de centre A
C la sphère de diamètre $[BC]$
D une sphère de centre A
E un plan

Q10 (0,75 pt) La limite de la suite de terme général $v_n = \frac{(-\pi)^n-(-e)^n}{(-2)^n-(-3)^n}$ est égale à :

A $\frac{\pi}{3}$ B $+\infty$ C $\pi-e$ D $-\infty$ E $\frac{e}{2}$

Q11 (0,75 pt) Au voisinage de $+\infty$, la courbe de la fonction numérique de la variable réelle définie par $f(x) = \frac{e^x}{\ln x}$ admet :

A une asymptote horizontale
B une branche parabolique de direction l'axe des abscisses
C une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées
D une asymptote verticale
E un point d'inflexion

Q12 (0,75 pt) La valeur de l'intégrale $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2-5x+6}\,\mathrm{d}x$ est :

A -1 B $\ln 3-\ln 2$ C 0 D 1 E 2

Q13 (0,75 pt) La limite l en 1 de la fonction numérique de la variable réelle x définie par $F(x) = \int_1^x \frac{e^{-t^2}}{x-1}\,\mathrm{d}t$ est :

A $l = e^{-1}$ B $l = e^{-2}$ C $l = 0$ D n'existe pas E $l = +\infty$

Q14 (0,5 pt) La limite de la suite définie par : $u_0 = 1$ et $(\forall n\in\mathbb{N})\ u_{n+1} = \frac{u_n^3}{2}$ est :

A n'existe pas B $-\sqrt{2}$ C $+\infty$ D $\sqrt{2}$ E 0

Q15 (0,5 pt) Dans $\mathbb{R}$, l'équation : $\ln^3(x)+\ln(x)-1 = 0$,

A admet deux solutions dans $]1,e[$
B admet trois solutions dans $]1,e[$
C admet trois solutions dans $]0,+\infty[$
D admet une seule solution dans $]1,e[$
E n'admet aucune solution dans $]1;+\infty[$

Q16 (0,5 pt) Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, le produit vectoriel $\vec{\imath}\wedge\left(\vec{\jmath}\wedge\vec{k}\right)$ est égal à :

A $\vec{\imath}$ B $\vec{\jmath}$ C $\vec{0}$ D $\vec{k}$ E $-\vec{k}$

FACULTÉ DE MÉDECINE ET DE PHARMACIE DE FÈS · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès · Faculté de Médecine et de Pharmacie de Fès

Session 2019–2020

2019

Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14
C	B	A	E	D	C	B	A	E	D	C	B	A	E

Q15	Q16
D	C

Q1 ✔ Réponse C

Dans le programme marocain, $\sqrt[3]{a}$ n'est défini que pour $a \geq 0$. Ici $-\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2 \geq 0$ impose $x = \frac{\pi}{2}$.
Mais pour $x = \frac{\pi}{2}$, l'argument de la tangente vaut $0 + \frac{\pi}{2}$, où $\tan$ n'est pas définie. Le domaine de définition est donc vide.

Q2 ✔ Réponse B

$f(x) = xe^{-x} + \frac{x^2}{2} - x$, donc

$$f'(x) = (1-x)e^{-x} + x - 1$$
$$f''(x) = (x-2)e^{-x} + 1$$
$$f'''(x) = (3-x)e^{-x}.$$

Q3 ✔ Réponse A

Une primitive de $(\ln t)^2$ est $t(\ln t)^2 - 2t\ln t + 2t$ (deux intégrations par parties). Donc

$$I = \left(4e^2 - 4e^2 + 2e^2\right) - 2 = 2e^2 - 2 = 2\left(e^2 - 1\right).$$

Q4 ✔ Réponse E

$g(x) + g(-x) = \ln\frac{(1+\sin x)(1-\sin x)}{\cos^2 x} = \ln\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0$: g est impaire. (Elle s'annule en 0, donc n'est ni strictement positive ni strictement négative.)

Q5 ✔ Réponse D

Pour x réel, l'équation s'écrit $(e^x - x) + i(x - e^x) = 0$, c'est-à-dire $e^x = x$. Or $e^x > x$ pour tout réel x (la fonction $e^x - x$ a pour minimum 1 en 0) : aucune solution.

Q6 ✔ Réponse C

Les tirages simultanés de 2 boules parmi 12 sont au nombre de C_{12}^2 ; les tirages unicolores sont $C_3^2 + C_4^2 + C_5^2$ (on additionne les trois couleurs, cas incompatibles). Donc $p = \frac{3+6+10}{66} = \frac{19}{66}$.

Q7 ✔ Réponse B

$e^{2019i\pi/3} = e^{673i\pi} = -1$ et $e^{2016i\pi/3} = e^{672i\pi} = 1$: le numérateur vaut $-2 + 2 = 0$. Le dénominateur vaut $1 + 1 = 2$. Le nombre est nul.

Q8 ✔ Réponse A

$\pi y'' = 0 \iff y'' = 0$: y' est constante, y est affine, $y(x) = ax + b$.

Q9 ✔ Réponse E

Si A, B, C ne sont pas alignés, $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est non nul et la condition $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ définit le plan passant par A de vecteur normal $\vec{n}$: c'est le plan (ABC).
Remarque : si A, B, C étaient alignés, $\vec{n} = \vec{0}$ et tout point de l'espace conviendrait.

Remarque : L'énoncé dit seulement « trois points distincts deux à deux » : si A, B, C sont alignés, AB ∧ AC = 0 et l'ensemble est tout l'espace (non proposé). E est la réponse visée en supposant A, B, C non alignés. À trancher par le professeur.

Q10 ✔ Réponse D

En divisant numérateur et dénominateur par $(-3)^n$:

$$v_n = \frac{\left(\frac{\pi}{3}\right)^n - \left(\frac{e}{3}\right)^n}{\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1}.$$

Comme $\pi > 3$, le numérateur tend vers $+\infty$, et le dénominateur tend vers -1 : $v_n \to -\infty$.

Q11 ✔ Réponse C

En $+\infty$: $f(x) \to +\infty$ et $\frac{f(x)}{x} = \frac{e^x}{x\ln x} \to +\infty$ (croissances comparées). La courbe admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

Q12 ✔ Réponse B

$\frac{1}{(x-2)(x-3)} = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}$. Sur $[-1, 1]$:

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2 - 5x + 6} = \left[\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|\right]_{-1}^{1}$$
$$= \ln 2 - \ln\frac{4}{3}$$
$$= \ln\frac{3}{2}$$
$$= \ln 3 - \ln 2.$$

Q13 ✔ Réponse A

$F(x) = \frac{G(x) - G(1)}{x - 1}$ avec G une primitive de $t \mapsto e^{-t^2}$. Quand $x \to 1$, ce taux d'accroissement tend vers $G'(1) = e^{-1}$.

Q14 ✔ Réponse E

Par récurrence $0 < u_n \leq 1$, donc $u_{n+1} = \frac{u_n^3}{2} \leq \frac{u_n}{2}$ et $0 < u_n \leq \frac{1}{2^n}$. La limite est 0.

Q15 ✔ Réponse D

Avec $t = \ln x$: $h(t) = t^3 + t - 1$ est strictement croissante ($h'(t) = 3t^2 + 1 > 0$), $h(0) = -1$ et $h(1) = 1$. Elle s'annule une seule fois, pour $t \in]0, 1[$, c'est-à-dire $x = e^t \in]1, e[$.

Q16 ✔ Réponse C

Dans un repère orthonormé direct, $\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$, puis $\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{0}$.

FACULTÉ DE MÉDECINE ET DE PHARMACIE DE FÈS · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès · Faculté de Médecine et de Pharmacie de Fès

Session 2018–2019

2018 Énoncé

Q1 (2 pts) Le domaine de définition de la fonction f de la variable réelle x définie par $f(x) = \sqrt[3]{-x^2}$ est égal à :

A $]-\infty, 0[$ B $]-\infty, 0]$
C vide D $\{0\}$
E $[0, +\infty[$

Q2 (2 pts) Pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0, +\infty[$, la valeur de l'intégrale $\int_0^x \frac{t}{1+t}\,dt$ est :

A $x - \ln(1+x)$ B x
C 0 D $\ln(x+1) - x$
E $2x - \ln(1+x)$

Q3 (2 pts) Pour tout entier naturel non nul n, $\ln^{(n)}$, la dérivée n-ième de la fonction ln sur l'intervalle $]0, +\infty[$, est la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

A $\ln^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{(n-1)!}{x^n}$
B $\ln^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{x^n}$
C $\ln^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \frac{n!}{x^n}$
D $\ln^{(n)}(x) = (\ln x)^n$
E $\ln^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}$

Q4 (2 pts) La limite $\lim\limits_{x\to+\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est égale à :

A $-\infty$ B 0 C 1 D -1 E $+\infty$

Q5 (2 pts) La limite l en 1 de la fonction $x \mapsto \int_0^x (t^2 + 2t - 1)\, e^t\, dt$ est :

A $l = +\infty$ B $l = 1$
C $l = 4e + 1$ D $l = -\infty$
E n'existe pas

Q6 (2 pts) Le texte suivant :
« $(x \in \mathbb{R}) \quad x^2 \geq 0$ » est une :

A proposition vraie
B proposition fausse
C proposition positive
D fonction propositionnelle
E loi logique

Q7 (2 pts) Dans l'espace (ξ) rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2018 = 0 \end{cases}$ est :

A un cercle
B un plan
C une droite passant par le point $O(0, 0, 0)$
D la sphère de centre O et de rayon 2018
E la sphère de centre O et de rayon $\sqrt{2018}$

Q8 (0,75 pt) On considère la suite définie par : $u_0 = 1{,}0001$ et $(\forall n \in \mathbb{N})$ $u_{n+1} = u_n^{2018}$. La limite de la suite (u_n) est :

A n'existe pas B $-\infty$ C 0 D 1
E $+\infty$

Q9 (0,75 pt) Pour tout réel non nul x, on considère dans le plan complexe les points $A(|x|)$, $B\left(|x|e^{2i}\right)$, $C\left(|x|e^{-2i}\right)$ et $D\left(-|x|e^{-2i}\right)$. Alors :

A A, B, C et D sont alignés
B $ABCD$ est un parallélogramme
C A, B, C et D sont cocycliques
D $(AB) \parallel (CD)$
E $AB = CD$

Q10 (0,75 pt) La probabilité pour qu'un candidat obtienne la note 0,25 dans cette épreuve de mathématiques, sachant qu'il choisit au hasard l'une des cinq réponses possibles dans chacune des seize questions, est :

A $\frac{1}{80}$ B 0 C 1 D $\frac{4^{16}}{5^{16}}$ E $\frac{C_5^4}{80}$

Q11 (0,75 pt) La limite de la suite de terme général $u_n = 1{,}999\ldots999$, où 9 est écrit $n+1$ fois, est égale à :

A 0 B $+\infty$ C 3 D 2 E $1{,}99$

Q12 (0,75 pt) La valeur de l'intégrale $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{2 - x^2}\,dx$ est :

A π B 2π C 0 D $\pi\sqrt{2}$ E $2\sqrt{2}$

Q13 (0,75 pt) L'équation $x^{2019} + x - 2019 = 0$, d'inconnue x :

A admet une seule solution dans l'ensemble des nombres complexes
B admet 2019 solutions dans $\mathbb{R}$
C admet une seule solution dans $\mathbb{N}$
D admet une seule solution dans l'ensemble des entiers relatifs
E admet une seule solution dans $\mathbb{R}$

Q14 (0,5 pt) Pour tout entier naturel non nul n, l'équation $A_n^k = k!$, d'inconnue k dans $\mathbb{N}$:

A n'admet pas de solution
B admet la seule solution n
C admet exactement deux solutions
D admet une infinité de solutions
E admet $n+1$ solutions

Q15 (0,5 pt) Soient P et Q deux propositions telles que P est fausse. Si l'implication $P \Longrightarrow Q$ est vraie, alors :

A Q est à la fois vraie et fausse
B Q est soit vraie soit fausse
C Q est nécessairement fausse
D Q est nécessairement vraie
E P est vraie

Q16 (0,5 pt) Dans le plan complexe rapporté au repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$, l'ensemble des points $M(z)$ tels que $\arg(z) \equiv 0\ [\pi]$ est :

A l'axe des imaginaires
B l'axe des réels
C le plan complexe
D l'axe des réels privé du point O
E une demi-droite d'origine O

FACULTÉ DE MÉDECINE ET DE PHARMACIE DE FÈS · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès · Faculté de Médecine et de Pharmacie de Fès

Session 2018–2019

2018

Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14
D	A	E	C	B	D	A	E	C	B	D	A	E	C

Q15	Q16
B	D

Q1 ✔ Réponse D

Dans le programme marocain, $\sqrt[3]{a}$ n'est défini que pour $a \geq 0$. Or $-x^2 \geq 0 \iff x = 0$: $D_f = \{0\}$.

Q2 ✔ Réponse A

$\dfrac{t}{1+t} = 1 - \dfrac{1}{1+t}$, donc l'intégrale vaut $[t - \ln(1+t)]_0^x = x - \ln(1+x)$.

Q3 ✔ Réponse E

$\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$, $\ln''(x) = -\dfrac{1}{x^2}$, $\ln'''(x) = \dfrac{2}{x^3}$… Par récurrence, si $\ln^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\,x^{-n}$, alors $\ln^{(n+1)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\,(-n)x^{-n-1} = (-1)^n \dfrac{n!}{x^{n+1}}$.

Q4 ✔ Réponse C

Avec $u = \dfrac{1}{x} \to 0^+$: $x \sin\dfrac{1}{x} = \dfrac{\sin u}{u} \to 1$.

Q5 ✔ Réponse B

$\left((t^2-1)e^t\right)' = 2te^t + (t^2-1)e^t = (t^2+2t-1)e^t$. La fonction vaut donc $(x^2-1)e^x + 1$; elle est continue et sa limite en 1 est $0 + 1 = 1$.

Q6 ✔ Réponse D

Le texte dépend de la variable x et ne contient aucun quantificateur (ni $\forall$ ni $\exists$) : c'est une fonction propositionnelle (une proposition « ouverte »). Avec le quantificateur, « $(\forall x \in \mathbb{R})\ x^2 \geq 0$ » serait une proposition vraie.

Q7 ✔ Réponse A

C'est l'intersection de la sphère de centre O et de rayon $\sqrt{2018}$ avec le plan $x - y + z = 0$, qui passe par le centre O : un cercle (grand cercle) de centre O et de rayon $\sqrt{2018}$.

Q8 ✔ Réponse E

$u_n = u_0^{2018^n}$ et $\ln u_n = 2018^n \ln(1{,}0001) \to +\infty$ car $\ln(1{,}0001) > 0$. Donc $u_n \to +\infty$.

Q9 ✔ Réponse C

Les quatre affixes ont le même module $|x|$: les points sont sur le cercle de centre O et de rayon $|x|$, donc cocycliques (et pas alignés).
- B : $z_A + z_C = |x|(1 + e^{-2i}) \neq z_B + z_D = |x|(e^{2i} - e^{-2i})$.
- D : $\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = \dfrac{-2e^{-2i}}{e^{2i} - 1} = \dfrac{ie^{-3i}}{\sin 1}$ n'est pas réel.
- E : $AB = 2|x|\sin 1 \neq CD = 2|x|$.

Q10 ✔ Réponse B

Dans cette épreuve, chaque question rapporte 2, $0{,}75$ ou $0{,}5$ point. Une note est une somme de tels nombres (ou 0) : la plus petite note non nulle possible est $0{,}5$. La note $0{,}25$ est impossible, sa probabilité est 0.

Q11 ✔ Réponse D

$u_n = 2 - \dfrac{1}{10^{n+1}} \to 2$.

Q12 ✔ Réponse A

$y = \sqrt{2 - x^2}$ décrit le demi-cercle supérieur de centre O et de rayon $\sqrt{2}$: l'intégrale est l'aire du demi-disque, $\dfrac{\pi(\sqrt{2})^2}{2} = \pi$.

Q13 ✔ Réponse E

$g(x) = x^{2019} + x - 2019$ a pour dérivée $2019x^{2018} + 1 > 0$: g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, de $-\infty$ à $+\infty$, donc s'annule exactement une fois (E, B fausse).
Cette solution est entre 1 et 2 ($g(1) = -2017 < 0 < g(2)$) : elle n'est pas entière (C, D fausses). Dans $\mathbb{C}$, un polynôme de degré 2019 a 2019 racines comptées avec multiplicité (A fausse).

Q14 ✔ Réponse C

Pour $0 \leq k \leq n$:
$A_n^k = k! \iff \dfrac{n!}{(n-k)!\,k!} = 1 \iff C_n^k = 1 \iff k = 0$ ou $k = n$. Comme $n \geq 1$, ce sont deux solutions distinctes.

Q15 ✔ Réponse B

Quand P est fausse, l'implication $P \Longrightarrow Q$ est vraie quelle que soit Q : on ne peut rien conclure sur Q, qui peut être vraie ou fausse.

Q16 ✔ Réponse D

L'argument n'est défini que pour $z \neq 0$, et $\arg z \equiv 0\ [\pi]$ signifie que z est un réel non nul (positif ou négatif) : c'est l'axe des réels privé de O.

FACULTÉ DE MÉDECINE ET DE PHARMACIE DE FÈS · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès · Faculté de Médecine et de Pharmacie de Fès

Session 2016–2017

2016 Énoncé

Q1 (2 pts) Pour tout entier naturel n tel que $n \geq 2$, on a :

A A_n^2 est un multiple de C_n^2
B $A_n^2 = C_n^2$
C $A_n^2 < C_n^2$
D $A_n^2 = \dfrac{C_n^2}{2!}$
E $A_n^2 \leq C_n^2$

Q2 (2 pts) La fonction dérivée de la fonction $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$,

$$x \mapsto e^x - \ln x + \sqrt[3]{x} - x^2 + \frac{x-1}{x+1} - x$$

est la fonction définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par :

A $f'(x) = e^x - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - 2x - \dfrac{2}{(x+1)^2} - 1$
B $f'(x) = -\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - 2x + \dfrac{2}{(x+1)^2} - 1$
C $f'(x) = e^x - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - 2x + \dfrac{2}{(x+1)^2}$
D $f'(x) = e^x + \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - 2x + \dfrac{2}{(x+1)^2} - 1$
E $f'(x) = e^x - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - 2x + \dfrac{2}{(x+1)^2} - 1$

Q3 (2 pts) La valeur de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\ln 4} \left(e^{2x} - 4e^x\right) \mathrm{d}x$ est :

A $-4{,}5$ B $\ln 4$ C 0 D $\ln 2 - 1$ E $e^2 - 4e$

Q4 (2 pts) La limite de la suite de terme général : $u_n = n + \cos\left((-1)^n n^3 - n^2 + \sqrt[3]{n}\right)$ est :

A n'existe pas B 0 C $-\infty$ D $+\infty$ E -1

Q5 (2 pts) Le domaine de définition de la fonction numérique f de la variable réelle x définie par $f(x) = e^{\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}-1}}$ est :

A $]-\infty,0[$ B $]0,1[\cup]1,+\infty[$
C $]0,1[\cup]1,+\infty]$ D $]0,1[\cup[1,+\infty[$
E $]0,+\infty[$

Q6 (2 pts) La probabilité pour qu'un candidat obtienne la note 20 dans cette épreuve de mathématiques, sachant qu'il a choisi au hasard l'une des cinq réponses possibles dans chacune des seize questions, est :

A $\dfrac{1}{80}$ B $\dfrac{C_5^1}{80}$ C $\dfrac{16}{80}$ D $\dfrac{1}{5^{16}}$ E 0

Q7 (2 pts) Les deux nombres complexes $z_1 = e^{2017i} + e^{2016i}$ et $z_2 = e^{-2017i} + e^{-2016i}$ sont :

A strictement positifs
B strictement négatifs
C conjugués
D égaux
E opposés

Q8 (0,75 pt) La solution de l'équation différentielle $y' + y + 1 = 0$ vérifiant $y(0) = 0$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

A $y(x) = (x+1)e^{-x}$
B $y(x) = e^x - e^{-x}$
C $y(x) = e^{-x} - 1$
D $y(x) = \cos(x) - 1$
E $y(x) = e^{-x}(\cos x + \sin x) - 1$

Q9 (0,75 pt) Dans l'ensemble des nombres réels, l'équation $(\cos x + i \sin x)^5 = 0$:

A admet deux solutions
B admet une seule solution
C admet une infinité de solutions
D n'admet pas de solution
E admet cinq solutions

Q10 (0,75 pt) La limite de la suite de terme général $v_n = \sqrt[n+1]{7} - \sqrt[n+1]{e}$ est :

A $\dfrac{7}{e}$ B $7 - e$ C 0 D $-\infty$ E $+\infty$

Q11 (0,75 pt) La limite $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x^x - 1}{x - 1}$ est égale à :

A $-\infty$ B $+\infty$ C -1 D 1 E 0

Q12 (0,75 pt) Si f^{-1} est la fonction réciproque de la fonction $f :]\ln 4,+\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln\left(e^{2x} - 4e^x\right)$, alors :

A $\left(f^{-1}\right)'(\ln 5) = 0$
B $\left(f^{-1}\right)'(\ln 5) = \dfrac{1}{6}$
C $\left(f^{-1}\right)'(\ln 5) = -\dfrac{1}{6}$
D $\left(f^{-1}\right)'(\ln 5) \neq \dfrac{1}{6}$
E $f(\ln 5) \neq \ln 5$

Q13 (0,75 pt) L'écart type d'une variable aléatoire binomiale X de paramètres $n = 16$ et $p = 0{,}5$ est :

A $\sigma(X) = 4$ B $\sigma(X) = 2$
C $\sigma(X) = -4$ D $\sigma(X) = 3$
E $\sigma(X) = -2$

Q14 (0,5 pt) La suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1{,}222\ldots222$ où le chiffre 2 est écrit n fois :

A admet une limite infinie
B est strictement décroissante
C est constante
D est strictement négative
E est strictement croissante

Q15 (0,5 pt) L'équation $e^x - \ln(x) = 0$:

A admet une solution unique dans $]-2,+\infty[$
B admet au moins une solution dans $]-\infty;+\infty[$
C admet une solution unique dans $]0,+\infty[$
D admet deux solutions dans $]-2,+\infty[$
E n'admet pas de solution dans $]0,+\infty[$

Q16 (0,5 pt) La valeur de l'intégrale $J = \displaystyle\int_0^1 2\left(e^t + e^{-t}\right)^2 \mathrm{d}t$ est :

A $e^2 - e^{-2} + 4$ B $e^{-2} - e^2 + 4$
C $e^2 - e^{-2} - 4$ D $e^2 + e^{-2} + 4$
E 2

FACULTÉ DE MÉDECINE ET DE PHARMACIE DE FÈS · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès · Faculté de Médecine et de Pharmacie de Fès

Session 2016–2017

2016

Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14
A	E	A	D	B	D	C	C	D	C	D	B	B	E

Q15	Q16
E	A

Q1 ✔ Réponse A

$A_n^2 = n(n-1)$ et $C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$, donc $A_n^2 = 2C_n^2$: c'est un multiple de C_n^2. Comme $C_n^2 > 0$ pour $n \geq 2$, $A_n^2 > C_n^2$ (B, C, D, E fausses).

Q2 ✔ Réponse E

Terme par terme : $(e^x)' = e^x$, $(-\ln x)' = -\dfrac{1}{x}$, $\left(x^{1/3}\right)' = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, $(-x^2)' = -2x$, $\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)' = \dfrac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2} = \dfrac{2}{(x+1)^2}$ et $(-x)' = -1$.

Q3 ✔ Réponse A

$$I = \left[\frac{e^{2x}}{2} - 4e^x\right]_0^{\ln 4} = (8-16) - \left(\frac{1}{2} - 4\right) = -8 + 3{,}5 = -4{,}5.$$

Q4 ✔ Réponse D

Le cosinus est compris entre -1 et 1, donc $u_n \geq n - 1 \to +\infty$.

Q5 ✔ Réponse B

Il faut $x > 0$ (pour $\ln x$) et $\sqrt[3]{x} \neq 1$, c'est-à-dire $x \neq 1$: $D_f =]0,1[\cup]1,+\infty[$. (C est mal écrit avec « $+\infty$] » et D contient 1.)

Q6 ✔ Réponse D

La note 20 exige les seize bonnes réponses. Chaque question est réussie avec la probabilité $\dfrac{1}{5}$, indépendamment des autres : $p = \left(\dfrac{1}{5}\right)^{16} = \dfrac{1}{5^{16}}$.

Q7 ✔ Réponse C

$\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$, donc $z_2 = \overline{z_1}$: ils sont conjugués. Ils ne sont pas réels ($\mathfrak{Im}(z_1) = \sin 2017 + \sin 2016 \neq 0$), donc ni égaux, ni opposés, ni de signe défini.

Q8 ✔ Réponse C

$y' = -y - 1$ a pour solutions $y = Ce^{-x} - 1$. La condition $y(0) = C - 1 = 0$ donne $C = 1$: $y(x) = e^{-x} - 1$.

Q9 ✔ Réponse D

$(\cos x + i \sin x)^5 = e^{5ix}$ a pour module 1 : il n'est jamais nul.

Q10 ✔ Réponse C

$\sqrt[n+1]{7} = e^{\frac{\ln 7}{n+1}} \to 1$ et $\sqrt[n+1]{e} = e^{\frac{1}{n+1}} \to 1$: $v_n \to 0$.

Q11 ✔ Réponse D

C'est le nombre dérivé en 1 de $g(x) = x^x = e^{x \ln x}$: $g'(x) = (\ln x + 1)x^x$, donc $g'(1) = 1$.

Q12 ✔ Réponse B

$f(\ln 5) = \ln(25-20) = \ln 5$ (E fausse), donc $f^{-1}(\ln 5) = \ln 5$. $f'(x) = \dfrac{2e^{2x} - 4e^x}{e^{2x} - 4e^x}$, d'où $f'(\ln 5) = \dfrac{50-20}{25-20} = 6$ et $\left(f^{-1}\right)'(\ln 5) = \dfrac{1}{f'(\ln 5)} = \dfrac{1}{6}$.

Q13 ✔ Réponse B

$V(X) = np(1-p) = 16 \times 0{,}5 \times 0{,}5 = 4$, donc $\sigma(X) = \sqrt{4} = 2$.

Q14 ✔ Réponse E

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{2}{10^{n+1}} > 0$: la suite est strictement croissante. Elle est majorée par $1 + \dfrac{2}{9} = \dfrac{11}{9}$, sa limite (finie).

Q15 ✔ Réponse E

L'équation n'a de sens que pour $x > 0$. Pour $x > 0$: $e^x > x + 1 > x > \ln x$, donc $e^x - \ln x > 0$. L'équation n'a aucune solution.

Q16 ✔ Réponse A

$2\left(e^t + e^{-t}\right)^2 = 2e^{2t} + 4 + 2e^{-2t}$, donc $J = \left[e^{2t} + 4t - e^{-2t}\right]_0^1 = e^2 + 4 - e^{-2} - 0$.

FACULTÉ DE MÉDECINE ET DE PHARMACIE DE FÈS · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès · Faculté de Médecine et de Pharmacie de Fès

Session 2013–2014

2013

Énoncé

Q1 Le domaine de définition de la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x^4 - x^2}$ est :

A $\mathbb{R}$
B $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[\cup \{0\}$
C $\varnothing$
D $[0, +\infty[$
E $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$

Q2 Une urne contient 5 boules blanches, 4 vertes et 3 rouges. On tire simultanément 4 boules de cette urne. Le nombre de tirages contenant au moins une boule non blanche est :

A $C_{12}^4 - C_5^4$
B $C_{12}^4 - C_7^4$
C $A_{12}^4 - A_5^4$
D C_5^4
E C_{12}^4

Q3 Le module du nombre complexe $\dfrac{2012 - 2013i}{2012 + 2013i}$ est :

A 4025
B $\sqrt{2012^2 + 2013^2}$
C $\sqrt{2012 + 2013}$
D 1
E -1

Q4 La forme exponentielle du nombre complexe $1 + e^{i\frac{8\pi}{7}}$ est :

A $e^{i\frac{8\pi}{7}}$
B $2\cos\left(\dfrac{11\pi}{7}\right) e^{i\frac{11\pi}{7}}$
C $2\cos\left(\dfrac{4\pi}{7}\right) e^{i\frac{11\pi}{7}}$
D $-e^{i\frac{8\pi}{7}}$
E $2\sin\left(\dfrac{4\pi}{7}\right) e^{i\frac{11\pi}{7}}$

Q5 L'intersection de la sphère $S(\Omega(-1,0,1), R = 1)$ et de la droite (AB), où $A(-1,0,1)$ et $B(1,0,-1)$, est :

A deux points
B un segment
C un demi-cercle
D l'ensemble vide
E un point

Q6 Soit a un nombre réel strictement positif. La solution générale de l'équation différentielle $y'' + ay = 0$ est l'ensemble des fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par (avec α et β deux nombres réels) :

A $y(x) = \alpha\cos(ax) + \beta\sin(ax)$
B $y(x) = \alpha e^{ax} + \beta e^{-ax}$
C $y(x) = \alpha e^{ax} + \beta$
D $y(x) = (\alpha x + \beta) e^{ax}$
E $y(x) = \alpha\cos\left(\sqrt{a}\,x\right) + \beta\sin\left(\sqrt{a}\,x\right)$

Q7 La valeur de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)\,\mathrm{d}x$ est :

A $I = \dfrac{\pi}{4}$
B $I = \ln\left(\sqrt{2}\right)$
C $I = \ln 2$
D $I = 1$
E $I = 0$

Q8 La fonction primitive de la fonction ln sur l'intervalle $]0, +\infty[$ s'annulant en $\sqrt{e}$ est la fonction F définie sur $]0, +\infty[$ par :

A $F(x) = x\ln x - x - \sqrt{e}$
B $F(x) = e^x$
C $F(x) = x\ln x - x + \dfrac{\sqrt{e}}{2}$
D $F(x) = -\displaystyle\int_{\sqrt{e}}^{x} \ln t\,\mathrm{d}t$
E $F(x) = x\ln x - x + \sqrt{e}$

Q9 La limite de la suite récurrente convergente définie par $U_0 = 2013$ et $(\forall n \in \mathbb{N})\ U_{n+1} = \ln(U_n) + 1$ est :

A n'existe pas
B $-\infty$
C $\ln(2013)$
D $+\infty$
E $\ln(e)$

Q10 $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - \ln x}{\sqrt[3]{x} - x^3} =$

A 0
B 1
C $+\infty$
D $-\infty$
E -1

FACULTÉ DE MÉDECINE ET DE PHARMACIE DE FÈS · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès · Faculté de Médecine et de Pharmacie de Fès

Session 2013–2014

2013

Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10
B	A	D	B	A	E	B	C	E	D

Q1 ✔ Réponse B

$x^4 - x^2 = x^2(x^2-1) \geq 0 \iff x = 0$ ou $x^2 \geq 1$. Le domaine est $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[\cup \{0\}$ (E oublie 0).

Q2 ✔ Réponse A

On retire du nombre total de tirages (C_{12}^4) ceux qui ne contiennent que des boules blanches (C_5^4) : $C_{12}^4 - C_5^4 = 495 - 5 = 490$.

Q3 ✔ Réponse D

Le numérateur est le conjugué du dénominateur : ils ont le même module, donc le quotient a pour module 1. (Un module n'est jamais négatif.)

Q4 ✔ Réponse B

$1 + e^{i\theta} = 2\cos\dfrac{\theta}{2}\, e^{i\theta/2}$, d'où $1 + e^{i\frac{8\pi}{7}} = 2\cos\dfrac{4\pi}{7}\, e^{i\frac{4\pi}{7}}$. Mais $\cos\dfrac{4\pi}{7} < 0$: ce n'est pas une forme exponentielle (le module doit être positif).

On écrit $2\cos\dfrac{4\pi}{7}\, e^{i\frac{4\pi}{7}} = \left(-2\cos\dfrac{4\pi}{7}\right) e^{i\frac{4\pi}{7}+i\pi} = 2\cos\dfrac{11\pi}{7}\, e^{i\frac{11\pi}{7}}$, car $\cos\dfrac{11\pi}{7} = \cos\dfrac{3\pi}{7} = -\cos\dfrac{4\pi}{7} > 0$. C'est B. (C est l'opposé du nombre.)

Q5 ✔ Réponse A

A est le centre Ω de la sphère : la droite (AB) passe par le centre, elle coupe donc la sphère en deux points (diamétralement opposés).

Q6 ✔ Réponse E

$y'' + \omega^2 y = 0$ avec $\omega = \sqrt{a} > 0$ a pour solutions $y(x) = \alpha\cos(\sqrt{a}\,x) + \beta\sin(\sqrt{a}\,x)$.

Q7 ✔ Réponse B

$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ a pour primitive $-\ln(\cos x)$ sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

$I = -\ln\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \ln\sqrt{2}$.

Q8 ✔ Réponse C

Les primitives de $\ln$ sont $x\ln x - x + c$. En $\sqrt{e}$: $\dfrac{\sqrt{e}}{2} - \sqrt{e} + c = 0$, donc $c = \dfrac{\sqrt{e}}{2}$: C. (D s'annule en $\sqrt{e}$, mais sa dérivée est $-\ln$.)

Q9 ✔ Réponse E

La limite $\ell > 0$ vérifie $\ell = \ln\ell + 1$. Or $\ln t \leq t - 1$ avec égalité seulement pour $t = 1$: donc $\ell = 1 = \ln(e)$.

Q10 ✔ Réponse D

$\dfrac{e^x - \ln x}{\sqrt[3]{x} - x^3} = \dfrac{e^x}{x^3} \cdot \dfrac{1 - \frac{\ln x}{e^x}}{x^{-8/3} - 1}$. Le premier facteur tend vers $+\infty$, le second vers $\dfrac{1}{-1} = -1$: la limite est $-\infty$.

FACULTÉ DE MÉDECINE ET DE PHARMACIE DE FÈS · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès · Faculté de Médecine et de Pharmacie de Fès

Session 2012–2013

2012 Énoncé

Q1 Le domaine de définition de la fonction numérique f de la variable réelle x définie par $f(x) = \ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$ est :

A $[1, +\infty[$
B $\mathbb{R}$
C $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$
D $]-\infty, -1[$
E $]1, +\infty[$

Q2 La fonction dérivée de la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln\left(\sqrt[3]{e^x}\right)$ est la fonction g' définie sur $\mathbb{R}$ par :

A $g'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{e^{2x}}}$
B $g'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{e^{x}}}$
C $g'(x) = \dfrac{e^x}{3}$
D $g'(x) = \dfrac{1}{3}$
E $g'(x) = \dfrac{1}{3e^x}$

Q3 La valeur de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\pi} 2e^x \sin(x)\,\mathrm{d}x$ est :

A $I = e^{\pi}$
B $I = e^{\pi} - 1$
C $I = e^{\pi} + 1$
D $I = 0$
E $I = 1 - e^{\pi}$

Q4 Soit m un nombre réel non nul. La solution générale de l'équation différentielle $y'' - 2my' + 2m^2y = 0$ est l'ensemble des fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par (avec a et b deux nombres réels) :

A $y(x) = e^{mx}\left(a\cos(mx) + b\sin(mx)\right)$
B $y(x) = ae^{mx} + be^{-mx}$
C $y(x) = ae^{mx} + b$
D $y(x) = (ax + b)e^{mx}$
E $y(x) = a\cos(mx) + b\sin(mx)$

Q5 L'intersection de la sphère $S\left(\Omega(1,1,1), R = 1\right)$ et du plan $(P) :\ x - y + z + \sqrt{3} - 1 = 0$ est :

A un segment
B un demi-cercle
C un point
D l'ensemble vide
E un cercle

Q6 On considère trois urnes U_1, U_2 et U_3 contenant 20 boules réparties comme suit :

Urne	U_1	U_2	U_3
Boules blanches	4	3	1
Boules vertes	3	4	5

On choisit au hasard une urne et on tire au hasard une boule de cette urne. Sachant que la boule tirée est blanche, la probabilité p pour qu'elle provienne de l'urne U_1 est :

A $p = \dfrac{24}{49}$
B $p = \dfrac{4}{21}$
C $p = \dfrac{7}{18}$
D $p = \dfrac{8}{20}$
E $p = \dfrac{4}{7}$

Q7 L'écriture sous la forme exponentielle du nombre complexe $\dfrac{\sqrt{3} - i}{-1 + i\sqrt{3}}$ est :

A $e^{-\frac{5i\pi}{6}}$
B $-e^{-\frac{5i\pi}{6}}$
C $2e^{-\frac{5i\pi}{6}}$
D $e^{\frac{4i\pi}{3}}$
E 2

Q8 La forme algébrique du nombre complexe $(-1+i)^{2012}$ est :

A 2^{2012}
B $2^{2012}\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$
C $-2^{2012}i\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$
D -2^{1006}
E -2^{2013}

Q9 La limite de la suite de terme général $S_n = \ln\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{e^k}{3^{k+1}}\right)$ est :

A $\ln 3$
B $-\infty$
C $\ln(e)$
D $+\infty$
E $-\ln(3-e)$

Q10 La limite l au point 1 de la fonction numérique R de la variable réelle x définie par $R(x) = \dfrac{1}{x-1}\displaystyle\int_1^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est :

A $l = \dfrac{1}{e^2}$
B $l = \dfrac{1}{e}$
C n'existe pas
D $l = +\infty$
E $l = 0$

FACULTÉ DE MÉDECINE ET DE PHARMACIE DE FÈS · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès · Faculté de Médecine et de Pharmacie de Fès

Session 2012–2013

2012 — Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10
C	D	C	A	C	A	A	D	E	B

Q1 ✔ Réponse C

$\dfrac{x-1}{x+1} > 0$ quand $x-1$ et $x+1$ ont le même signe (et $x \neq -1$) : $x < -1$ ou $x > 1$.

Q2 ✔ Réponse D

$\sqrt[3]{e^x} = e^{x/3}$, donc $g(x) = \dfrac{x}{3}$ et $g'(x) = \dfrac{1}{3}$.

Q3 ✔ Réponse C

Une primitive de $2e^x \sin x$ est $e^x(\sin x - \cos x)$ (dériver pour vérifier). Donc $I = e^\pi(0+1) - (0-1) = e^\pi + 1$.

Q4 ✔ Réponse A

Équation caractéristique : $r^2 - 2mr + 2m^2 = 0$, de discriminant $-4m^2 = (2im)^2$. Racines $r = m \pm im$, d'où $y(x) = e^{mx}\left(a\cos(mx) + b\sin(mx)\right)$.

Q5 ✔ Réponse C

$d(\Omega,(P)) = \dfrac{|1-1+1+\sqrt{3}-1|}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 1 = R$: le plan est tangent à la sphère, l'intersection est un point.

Q6 ✔ Réponse A

Chaque urne est choisie avec la probabilité $\frac{1}{3}$. Probabilités totales :

$$P(B) = \frac{1}{3}\left(\frac{4}{7} + \frac{3}{7} + \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{3} \times \frac{7}{6} = \frac{7}{18}.$$

Formule de Bayes : $p = \dfrac{\frac{1}{3} \times \frac{4}{7}}{\frac{7}{18}} = \dfrac{4}{21} \times \dfrac{18}{7} = \dfrac{24}{49}$.

Q7 ✔ Réponse A

$\sqrt{3} - i = 2e^{-i\pi/6}$ et $-1 + i\sqrt{3} = 2e^{2i\pi/3}$, donc le quotient vaut $e^{-i\pi/6 - 2i\pi/3} = e^{-5i\pi/6}$.

Q8 ✔ Réponse D

$-1 + i = \sqrt{2}\, e^{3i\pi/4}$, donc $(-1+i)^{2012} = 2^{1006} e^{1509 i\pi} = -2^{1006}$ (car 1509 est impair).

Q9 ✔ Réponse E

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{e^k}{3^{k+1}} = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{e}{3}\right)^k \to \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{e}{3}} = \frac{1}{3-e}$ (car $\frac{e}{3} < 1$). Par continuité de $\ln$: $S_n \to \ln \dfrac{1}{3-e} = -\ln(3-e)$.

Q10 ✔ Réponse B

$R(x)$ est le taux d'accroissement en 1 d'une primitive G de $t \mapsto e^{-t^2}$: il tend vers $G'(1) = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$.

FACULTÉ DE MÉDECINE ET DE PHARMACIE DE FÈS · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès · Faculté de Médecine et de Pharmacie de Fès

Session 2011–2012

2011 Énoncé

Q1 Dans un laboratoire de production de médicaments, on dispose de deux machines $L1$ et $L2$ pour la production du médicament $D1$. La machine $L1$ assure 70% de la production du médicament $D1$, alors que la machine $L2$ assure 30% restante. 5% du médicament $D1$ produit par $L1$ n'est pas valable et 1% de celui de $L2$ n'est pas aussi valable. On choisit au hasard un échantillon de ce médicament $D1$. La probabilité pour que cet échantillon soit produit par la machine $L2$ sachant qu'il n'est pas valable est :

A $p = \dfrac{3}{38}$ B $p = \dfrac{5}{38}$
C $p = \dfrac{70}{380}$ D $p = \dfrac{A_3^2}{70}$
E $p = \dfrac{C_3^2}{70}$

Q2 La limite en $+\infty$ de la suite $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ est :

A 2 B 0 C e D $+\infty$ E 1

Q3 L'ensemble des solutions complexes de l'équation : $Z^2 = \dfrac{8}{Z}$ est :

A $S = \{2, -1 + i\sqrt{3}, -1 - i\sqrt{3}\}$
B $S = \{2, 1 + i\sqrt{3}, 1 - i\sqrt{3}\}$
C $S = \{2, 1 + i\sqrt{3}, -1 - i\sqrt{3}\}$
D $S = \{2i, 1 + i\sqrt{3}, -1 - i\sqrt{3}\}$
E $S = \{-2, 1 + i\sqrt{3}, -1 - i\sqrt{3}\}$

Q4 L'ensemble de définition de la fonction :

$$f(x) = \sqrt{|\ln(x) - 1| - 1}$$

est :

A $D =]0, +\infty[$
B $D =]0, 1[\cup [e^2, +\infty[$
C $D =]0, 1] \cup [e^2, +\infty[$
D $D =]-\infty, 1] \cup [e^2, +\infty[$
E $D = [e^2, +\infty[$

Q5 L'intersection de la sphère $S\,(\Omega(1, -2, 0), R = 3)$ et le plan (P) : $x + y + z + (3\sqrt{3} + 1) = 0$ est :

A un segment B un cercle
C un point D vide
E un demi-cercle

Q6 La limite en $x = 2$ de la fonction : $g(x) = \dfrac{e^{2x} - e^4}{x - 2}$ est :

A $l = 4$ B $l = e^4$
C $l = 2e^4$ D $l = +\infty$
E $l = 0$

Q7 La valeur de l'intégrale

$$I = \int_2^e \frac{\ln(2)}{x(\ln x)^2}\, dx$$

est :

A $I = 1 + \ln(2)$ B $I = 1 - \ln(4)$
C $I = 1 + \ln(4)$ D $I = 1 - \ln(2)$
E $I = e - \ln(2)$

Q8 L'ensemble des solutions de l'inéquation :

$$10^{2x} - 3.(10)^x - 4 > 0$$

est :

A $S = \left]0, \dfrac{\ln 2}{\ln 10}\right]$
B $S = \left]0, \dfrac{\ln 10}{\ln 2}\right]$
C $S = \left[\dfrac{\ln 10}{\ln 2}, +\infty\right[$
D $S = \left[\dfrac{\ln 2}{\ln 10}, +\infty\right[$
E $S = \left]\dfrac{\ln 4}{\ln 10}, +\infty\right[$

Q9 La limite en $+\infty$ de la suite : $u_n = \dfrac{(-1)^n(n + 2^n)}{n2^{n+1}}$ est :

A $L = +\infty$ B $L = 1$
C $L = \dfrac{1}{2}$ D $L = 2$
E $L = 0$

Q10 La population statistique $P(t)$ d'une bactérie dans une solution biologique vérifie l'équation différentielle :

$$\begin{cases} P'(t) = 2P(t), \ t \geq 0 \\ P(0) = 10 \end{cases}$$

Le temps nécessaire pour avoir une population de 10^{21} Pour cette bactérie est :

A $t = 10 \ln 10$
B $t = 10^{10}$
C $t = (\ln 10)^{10}$
D $t = (10 \ln 10)^{10}$
E $t = 10(\ln 2)^{10}$

FACULTÉ DE MÉDECINE ET DE PHARMACIE DE FÈS · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès · Faculté de Médecine et de Pharmacie de Fès

Session 2011–2012

2011

Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10
A	D	A	C	C	C	D	E	E	A

Q1 ✔ Réponse **A**

Probabilités totales :
$P(\text{non valable}) = 0{,}7 \times 0{,}05 + 0{,}3 \times 0{,}01 = 0{,}035 + 0{,}003 = 0{,}038$.
Formule de Bayes : $p = \dfrac{0{,}003}{0{,}038} = \dfrac{3}{38}$.

Q2 ✔ Réponse **D**

Chacun des n termes est au moins égal au dernier, $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$:
$S_n \geq \dfrac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \to +\infty$.

Q3 ✔ Réponse **A**

Pour $Z \neq 0$: $Z^3 = 8$. Les solutions sont 2, $2e^{2i\pi/3} = -1 + i\sqrt{3}$ et $2e^{-2i\pi/3} = -1 - i\sqrt{3}$.

Q4 ✔ Réponse **C**

Il faut $x > 0$ et $|\ln x - 1| \geq 1$, c'est-à-dire $\ln x - 1 \geq 1$ ($x \geq e^2$) ou $\ln x - 1 \leq -1$ ($0 < x \leq 1$).

Q5 ✔ Réponse **C**

$d(\Omega, (P)) = \dfrac{|1 - 2 + 0 + 3\sqrt{3} + 1|}{\sqrt{3}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 3 = R$: le plan est tangent, l'intersection est un point.

Q6 ✔ Réponse **C**

C'est le taux d'accroissement en 2 de $x \mapsto e^{2x}$, dont la dérivée en 2 vaut $2e^4$.

Q7 ✔ Réponse **D**

Une primitive de $\dfrac{1}{x(\ln x)^2}$ est $-\dfrac{1}{\ln x}$. Donc
$I = \ln 2 \left(-1 + \dfrac{1}{\ln 2}\right) = 1 - \ln 2$.

Q8 ✔ Réponse **E**

Avec $t = 10^x > 0$: $t^2 - 3t - 4 = (t-4)(t+1) > 0 \iff t > 4$,
c'est-à-dire $x \ln 10 > \ln 4$, soit $x > \dfrac{\ln 4}{\ln 10}$.

Q9 ✔ Réponse **E**

$|u_n| = \dfrac{n + 2^n}{n2^{n+1}} = \dfrac{1}{2^{n+1}} + \dfrac{1}{2n} \to 0$, donc $u_n \to 0$.

Q10 ✔ Réponse **A**

$P(t) = 10e^{2t}$.
$10e^{2t} = 10^{21} \iff e^{2t} = 10^{20} \iff t = \dfrac{20 \ln 10}{2} = 10 \ln 10$.

FACULTÉ DE MÉDECINE ET DE PHARMACIE DE FÈS · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès · Faculté de Médecine et de Pharmacie de Fès

Session 2010–2011

2010 Énoncé

Q1 Un sac contient 34 jetons, sur chacun est écrit une lettre de la phrase suivante : « GAGNER LA COUPE DU MONDE EN AFRIQUE DU SUD ». On tire 12 fois un jeton avec remise. La probabilité de former avec les lettres tirées la phrase : « ESPAGNE GAGNE » dans cet ordre est :

A $p = \dfrac{5^3.3^2.3^2}{34^{12}}$

B $p = \dfrac{5^3.3^4.2^3}{34^{12}}$

C $p = \dfrac{A_5^3.A_3^2.A_3^2}{A_{34}^{12}}$

D $p = \dfrac{A_5^3.A_3^2.A_3^2}{34^{12}}$

E $p = \dfrac{C_5^3.C_3^2.C_3^2}{C_{34}^{12}}$

Q2 La limite en $+\infty$ de la suite $\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^{-\sqrt{n}}$ est :

A e^{-1} B 0 C e D $+\infty$ E 1

Q3 La valeur du nombre complexe $\left(-1+i\sqrt{3}\right)^{2010}+\left(-1-i\sqrt{3}\right)^{2010}$ est :

A 2^{2009}

B $2\cos\left(\dfrac{4\pi}{3}\right)e^{\frac{i2\pi}{3}}$

C $2\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)e^{\frac{i4\pi}{3}}$

D $2i\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)e^{\frac{i4\pi}{3}}$

E 2^{2011}

Q4 La limite en $+\infty$ de la fonction : $f(x)=\exp\left(x+x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right)$ est :

A $l=1$ B n'existe pas

C $l=0$ D $l=-1$

E $l=+\infty$

Q5 L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$ est :

A une droite

B un cercle

C une sphère

D un demi-cercle

E un plan

Q6 La dérivée de la fonction $g(x)=\ln\left(\sqrt[3]{x}\right)$ sur $]0,+\infty[$ est :

A $g'(x)=\dfrac{1}{3x}$ B $g'(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x}}{3x}$

C $g'(x)=\dfrac{x}{\sqrt[3]{x}}$ D $g'(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

E $g'(x)=\dfrac{1}{x.\sqrt[3]{x}}$

Q7 La valeur de l'intégrale $J=\displaystyle\int_1^e \frac{\ln^n(x)}{x}\,dx$ est :

A $J=\dfrac{1}{n+1}$ B $J=\dfrac{e}{n+1}$

C $J=\dfrac{2e}{n+1}$ D $J=\dfrac{2e}{n}$

E $J=\dfrac{1}{n}$

Q8 L'ensemble des solutions de l'inéquation :

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x \geq 2$$

est :

A $S=\left]-\infty,\dfrac{-\ln 2}{\ln 3}\right]$

B $S=\left]-\infty,\dfrac{\ln 3}{\ln 2}\right]$

C $S=\left[\dfrac{\ln 3}{\ln 2},+\infty\right[$

D $S=\left[\dfrac{\ln 2}{\ln 3},+\infty\right[$

E $\varnothing$

Q9 La valeur de la somme $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kC_n^k$ est :

A $S_n=n2^{n-1}$

B $S_n=(n-1)2^n$

C $S_n=n2^n$

D $S_n=2^n$

E $S_n=n3^{n-1}$

Q10 Soit i le nombre imaginaire. La valeur de la somme $S=\displaystyle\sum_{k=0}^{2011}(i)^k$ est :

A $S=0$ B $S=\dfrac{2}{1-i}$

C $S=\dfrac{2i}{1-i}$ D $S=\dfrac{-2i}{1-i}$

E $S=\dfrac{1+i}{1-i}$

FACULTÉ DE MÉDECINE ET DE PHARMACIE DE FÈS · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès · Faculté de Médecine et de Pharmacie de Fès

Session 2010–2011

2010

Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10
B	A	E	E	C	A	A	A	A	A

Q1 ✔ Réponse B

Dans la phrase (34 lettres) : E apparaît 5 fois, A 3 fois, N 3 fois, G 2 fois, S et P 1 fois chacun.
« ESPAGNE GAGNE » contient E (3 fois), S, P, A (2 fois), G (3 fois) et N (2 fois). Les tirages sont indépendants (avec remise), donc

$$p = \frac{5^3 \times 1 \times 1 \times 3^2 \times 2^3 \times 3^2}{34^{12}} = \frac{5^3 \cdot 3^4 \cdot 2^3}{34^{12}}.$$

Q2 ✔ Réponse A

$-\sqrt{n}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = -\frac{\ln(1+h)}{h}$ avec $h = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$: cette quantité tend vers -1, et la suite vers e^{-1}.

Q3 ✔ Réponse E

$-1+i\sqrt{3} = 2e^{2i\pi/3}$, donc $\left(-1+i\sqrt{3}\right)^{2010} = 2^{2010}e^{1340i\pi} = 2^{2010}$. Le second terme est le conjugué, égal lui aussi à 2^{2010}. La somme vaut 2^{2011}.

Q4 ✔ Réponse E

$x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \to 1$, donc l'exposant $x + x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ tend vers $+\infty$ et $f(x) \to +\infty$.

Q5 ✔ Réponse C

Avec I milieu de $[AB]$: $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$. La condition donne $MI = \frac{AB}{2}$: c'est la sphère de diamètre $[AB]$ (pour $A \neq B$).

Q6 ✔ Réponse A

$g(x) = \frac{1}{3}\ln x$, donc $g'(x) = \frac{1}{3x}$.

Q7 ✔ Réponse A

Une primitive de $\frac{\ln^n x}{x}$ est $\frac{\ln^{n+1} x}{n+1}$, donc $J = \frac{1-0}{n+1} = \frac{1}{n+1}$.

Q8 ✔ Réponse A

En passant au logarithme : $-x\ln 3 \geq \ln 2 \iff x \leq -\frac{\ln 2}{\ln 3}$.

Q9 ✔ Réponse A

$kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$, donc $S_n = n\sum_{j=0}^{n-1} C_{n-1}^j = n2^{n-1}$. (On peut aussi dériver $(1+x)^n = \sum C_n^k x^k$ et prendre $x = 1$.)

Q10 ✔ Réponse A

$S = \frac{1-i^{2012}}{1-i}$ et $i^{2012} = (i^4)^{503} = 1$, donc $S = 0$. (Les autres propositions sont non nulles.)

FACULTÉ DE MÉDECINE ET DE PHARMACIE DE FÈS · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès · Faculté de Médecine et de Pharmacie de Fès

Session 2009–2010

2009 Énoncé

Q1 La dérivée de la fonction $f(x) = x^x$, $x > 0$ est :

A $f'(x) = (\ln x + 1)e^{x \ln x}$
B $f'(x) = e^{x \ln 2}(x \ln 2)$
C $f'(x) = x(x^{x-1})$
D $f'(x) = (1-x)x^{x-1}$
E $f'(x) = e^x + (1-x)e^{x-1}$

Q2 La limite de la fonction $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ en $+\infty$ est :

A 1
B 0
C n'existe pas
D $+\infty$
E e

Q3 L'ensemble des points $M(Z)$ du plan complexe tels que : $\left|\frac{iZ+3}{Z-4}\right| = 1$ est :

A un cercle
B une droite
C une demi-droite
D un demi-cercle
E réunion de deux demi-droites

Q4 $l = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n(-1)^n}{2n^2+1}$ est :

A $l = 1$
B l n'existe pas
C $l = 0$
D $l = -1$
E $l = +\infty$

Q5 La solution générale de l'équation différentielle $y'' = 2y'$ est :

A $y(x) = ae^x + be^{2x}$
B $y(x) = a + be^{2x}$
C $y(x) = ae^x + b$
D $y(x) = ae^x + be^{-2x}$
E $y(x) = a + be^{-2x}$

Q6 $L = \lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=2}^{n-1} \left(\frac{1}{3^k}\right)$ est :

A $L = 0$
B $L = \frac{1}{6}$
C $L = 1$
D $L = -1$
E $L = +\infty$

Q7 La valeur de l'intégrale $I = \int_2^e \frac{(\ln(\sqrt{x}))^2}{x}\,dx$ est :

A $I = \frac{1}{12}\left(1 + (\ln 2)^3\right)$
B $I = \frac{1}{12}\left(1 - (\ln 2)^3\right)$
C $I = \left(1 + (\ln 2)^3\right)$
D $I = \left(1 - (\ln 2)^3\right)$
E $I = \frac{1}{12}\left(1 + (\ln 2)^2\right)$

Q8 L'intersection de la sphère (S) de centre $I(1,1,0)$ et de rayon $R = 2$ avec le plan $(P) : 2x + 2y - z = 0$ est :

A un point
B un segment
C un cercle
D deux points
E l'ensemble vide

Q9 Le concours de la médecine pour l'année $2008 - 2009$ est composé de 4 épreuves : (E_1), (E_2), (E_3) et (E_4). La probabilité de passer chaque épreuve (E_i) est $\frac{1}{2^i}$. La probabilité de passer toutes les épreuves est :

A $p = \frac{1}{2^{10}}$
B $p = \frac{15}{2^4}$
C $p = 1$
D $p = 0$
E $p = \frac{1}{2}$

Q10 L'argument du nombre complexe $z = (\sqrt{3} - i)^{2009}$ est :

A $\beta = \pi$
B $\beta = \frac{-5\pi}{6}$
C $\beta = \frac{\pi}{6}$
D $\beta = \frac{5\pi}{6}$
E $\beta = -\pi$

FACULTÉ DE MÉDECINE ET DE PHARMACIE DE FÈS · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès · Faculté de Médecine et de Pharmacie de Fès

Session 2009–2010

2009

Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10
A	E	B	C	B	B	B	C	A	B

Q1 ✔ Réponse A

$f(x) = e^{x\ln x}$, donc $f'(x) = (x\ln x)' e^{x\ln x} = (\ln x + 1)e^{x\ln x}$.

Q2 ✔ Réponse E

$x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \to 1$, donc $f(x) \to e$.

Q3 ✔ Réponse B

$iZ + 3 = i(Z - 3i)$, donc $|iZ+3| = |Z-3i|$. La condition s'écrit $|Z-3i| = |Z-4|$: M est équidistant des points d'affixes $3i$ et 4, c'est la médiatrice de ces deux points, une droite.

Q4 ✔ Réponse C

$\left|\frac{n(-1)^n}{2n^2+1}\right| = \frac{n}{2n^2+1} \leq \frac{1}{2n} \to 0 : l = 0$.

Q5 ✔ Réponse B

Équation caractéristique $r^2 - 2r = 0$, de racines 0 et 2 : $y(x) = a + be^{2x}$.

Q6 ✔ Réponse B

Somme géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $\frac{1}{9}$: la limite vaut $\frac{1/9}{1-1/3} = \frac{1/9}{2/3} = \frac{1}{6}$.

Q7 ✔ Réponse B

$(\ln\sqrt{x})^2 = \frac{(\ln x)^2}{4}$, et une primitive de $\frac{(\ln x)^2}{4x}$ est $\frac{(\ln x)^3}{12}$. Donc $I = \frac{1-(\ln 2)^3}{12}$.

Q8 ✔ Réponse C

$d(I,(P)) = \frac{|2+2-0|}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{4}{3} < 2 = R$: le plan coupe la sphère suivant un cercle.

Q9 ✔ Réponse A

En considérant les épreuves comme indépendantes : $p = \frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{8}\times\frac{1}{16} = \frac{1}{2^{1+2+3+4}} = \frac{1}{2^{10}}$.

Q10 ✔ Réponse B

$\sqrt{3} - i = 2e^{-i\pi/6}$, donc $\arg z \equiv -\frac{2009\pi}{6}$. Comme $2009 = 12\times 167 + 5$, $-\frac{2009\pi}{6} = -334\pi - \frac{5\pi}{6} \equiv -\frac{5\pi}{6}\ [2\pi]$.

FACULTÉ DE MÉDECINE ET DE PHARMACIE D'OUJDA · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès · Faculté de Médecine et de Pharmacie d'Oujda

Session 2019–2020

2019 — Énoncé

Q1 L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. On considère le point $G(1,2,-1)$, la droite (Δ) : $x = y-1 = z+1$ et le plan (P) : $2x - y + z - 1 = 0$.

- **A** La droite (Δ) est contenue dans le plan (P)
- **B** La distance de G à (P) est 3
- **C** (Δ) et (P) sont orthogonaux
- **D** (Δ) et (P) sont parallèles
- **E** La distance de G à (Δ) est $\sqrt{\frac{2}{3}}$

Q2 (u_n) est une suite réelle définie par : $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{2}{n}u_n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

- **A** (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{n}$
- **B** (u_n) est une suite croissante
- **C** (u_n) est une suite minorée par $\frac{1}{4}$
- **D** $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $u_n = \frac{2^{n-1}}{(n-1)!}$
- **E** Les suggestions précédentes sont fausses

Q3 On pose $S = 327 + 338 + 349 + 360 + 371 + 382 + 393 + 404 + \cdots + 767$.

- **A** S est pair
- **B** $S = 22427$
- **C** $S = 22417$
- **D** $S > 22447$
- **E** $S < 22426$

Q4 On considère dans l'ensemble des nombres complexes le nombre $z = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$.

- **A** $z^2 = 1 + i$
- **B** $|z| = 2\cos\frac{5\pi}{8}$
- **C** $z^8 = -\left(2\cos\frac{5\pi}{8}\right)^8$
- **D** $z^8 = \left(2\cos\frac{5\pi}{8}\right)^8$
- **E** $\arg(z) \equiv \frac{3\pi}{4}\ [2\pi]$

Q5 On pose $u = \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)$.

- **A** $1 + u = 2\overline{u}$
- **B** $1+u+u^2+u^3+u^4+u^5+u^6 = -1$
- **C** $1+u+u^2+u^3+u^4+u^5+u^6 = 2$
- **D** $\frac{1-u}{1+u}$ est un nombre réel
- **E** Les suggestions précédentes sont fausses

Q6 Un sac contient 3 boules blanches, 3 boules noires et 3 boules rouges indiscernables au toucher. On tire successivement avec remise 4 boules du sac. La probabilité d'avoir les trois couleurs est :

- **A** $\frac{4}{9}$
- **B** $\frac{1}{27}$
- **C** $\frac{1}{81}$
- **D** $\frac{4}{27}$
- **E** Les suggestions précédentes sont fausses

Q7 On considère l'équation différentielle suivante : $y'' - 6y' + 9y = 0$. La solution de cette équation qui vérifie $y(0) = 3$ et $y'(0) = 10$ est :

- **A** $y(x) = e^x(2x+3) + 5x$
- **B** $y(x) = e^{2x}(x+3) + x$
- **C** $y(x) = e^{3x}(3-x) + 2x$
- **D** $y(x) = e^{3x}(x+10) - 7$
- **E** $y(x) = e^{3x}(x+3)$

Q8 On pose : $I = \int_{\frac{1}{2}}^{1} (2x-1)^4\,\mathrm{d}x$;

$J = \int_1^e \frac{2}{x\,(2+\ln x)^3}\,\mathrm{d}x$;

$K = \int_0^{\pi} \cos(x)\sin(x)\cos(2x)\,\mathrm{d}x$.

- **A** $I = 1$
- **B** $J = \frac{7}{36}$
- **C** $K = 0$
- **D** $K = \frac{1}{2}$
- **E** Les suggestions précédentes sont fausses

Q9 On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{(1-x)\,(1-e^x)}$.

- **A** L'ensemble de définition de f est $]-\infty; 0]$
- **B** L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$
- **C** f est croissante sur $]-\infty; 0[$
- **D** f est décroissante sur $]-\infty; 0[$
- **E** f est dérivable en 1 à droite

Q10 Le plan est rapporté à un repère orthonormé. La fonction f est définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1-e^x}{1-\ln x}$.

- **A** La courbe de f présente une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$
- **B** La fonction f est positive sur D_f
- **C** La pente de la tangente à la courbe en 1 est 1
- **D** La tangente à la courbe en 1 est parallèle à l'axe des abscisses
- **E** Les suggestions précédentes sont fausses

(On rappelle que $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien et e sa base.)

FACULTÉ DE MÉDECINE ET DE PHARMACIE D'OUJDA · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès · Faculté de Médecine et de Pharmacie d'Oujda

Session 2019–2020

2019

Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10
E	D	B	C	E	A	E	C	D	A

Q1 ✔ Réponse E

(Δ) passe par $A(0,1,-1)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u}(1,1,1)$; (P) a pour vecteur normal $\vec{n}(2,-1,1)$.

- $\vec{u}\cdot\vec{n}=2\neq 0$: (Δ) n'est ni contenue dans (P) ni parallèle à (P) ; $\vec{u}$ et $\vec{n}$ ne sont pas colinéaires : pas orthogonaux.
- $d(G,(P))=\dfrac{|2-2-1-1|}{\sqrt{6}}=\dfrac{2}{\sqrt{6}}\neq 3$.
- $\overrightarrow{AG}(1,1,0)$ et $\overrightarrow{AG}\wedge\vec{u}=(1,-1,0)$, donc

$d(G,(\Delta))=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\dfrac{2}{3}}$: E.

Q2 ✔ Réponse D

Par récurrence : $u_1=\dfrac{2^0}{0!}=1$, et si $u_n=\dfrac{2^{n-1}}{(n-1)!}$ alors

$u_{n+1}=\dfrac{2}{n}\cdot\dfrac{2^{n-1}}{(n-1)!}=\dfrac{2^n}{n!}$: D est vraie.

A est fausse (la « raison » $\frac{2}{n}$ dépend de n), B aussi $(u_4=\frac{4}{3}<u_3=2)$, et C aussi : $u_n=\dfrac{2^{n-1}}{(n-1)!}\to 0$.

Q3 ✔ Réponse B

Les termes forment une suite arithmétique de raison 11 : de 327 à 767 il y a $\dfrac{767-327}{11}+1=41$ termes. Donc

$$S=\frac{41\times(327+767)}{2}=41\times 547=22427,$$

nombre impair : seule B est vraie.

Q4 ✔ Réponse C

$z=1-e^{i\pi/4}=e^{i\pi/8}\left(e^{-i\pi/8}-e^{i\pi/8}\right)=-2i\sin\dfrac{\pi}{8}\,e^{i\pi/8}=2\sin\dfrac{\pi}{8}\,e^{-3i\pi/8}$.

Donc $|z|=2\sin\dfrac{\pi}{8}>0$, alors que $2\cos\dfrac{5\pi}{8}=-2\sin\dfrac{\pi}{8}<0$ (B fausse), et $\arg z\equiv-\dfrac{3\pi}{8}$ (E fausse).

$z^8=\left(2\sin\frac{\pi}{8}\right)^8 e^{-3i\pi}=-\left(2\sin\frac{\pi}{8}\right)^8=-\left(2\cos\frac{5\pi}{8}\right)^8$ (puissance paire) : C. Enfin $z^2=1-\sqrt{2}+i(1-\sqrt{2})\neq 1+i$.

Q5 ✔ Réponse E

$u=e^{2i\pi/7}$ vérifie $u^7=1$ et $u\neq 1$, donc

$1+u+\cdots+u^6=\dfrac{1-u^7}{1-u}=0$: B et C sont fausses.

$|1+u|=2\cos\dfrac{\pi}{7}\neq 2=|2\bar{u}|$: A est fausse. Enfin

$\dfrac{1-u}{1+u}=\dfrac{-2i\sin\frac{\pi}{7}}{2\cos\frac{\pi}{7}}=-i\tan\dfrac{\pi}{7}$ est imaginaire pur non nul : D est fausse. Donc E.

Q6 ✔ Réponse A

À chaque tirage, chaque couleur a la probabilité $\frac{1}{3}$. On retire les cas où une couleur au moins manque (inclusion-exclusion) :

$$P=1-3\left(\frac{2}{3}\right)^4+3\left(\frac{1}{3}\right)^4=1-\frac{48}{81}+\frac{3}{81}=\frac{36}{81}=\frac{4}{9}.$$

Q7 ✔ Réponse E

L'équation caractéristique $r^2-6r+9=0$ a la racine double 3 : $y=(ax+b)e^{3x}$.

$y(0)=b=3$ et $y'(x)=(a+3ax+3b)e^{3x}$, donc

$y'(0)=a+9=10$ et $a=1$: $y=(x+3)e^{3x}$.

Q8 ✔ Réponse C

- $I=\left[\dfrac{(2x-1)^5}{10}\right]_{1/2}^{1}=\dfrac{1}{10}$.
- Avec $u=2+\ln x$: $J=\displaystyle\int_2^3\frac{2}{u^3}\,du=\left[-\frac{1}{u^2}\right]_2^3=\frac{1}{4}-\frac{1}{9}=\frac{5}{36}$.
- $\cos x\sin x\cos 2x=\frac{1}{2}\sin 2x\cos 2x=\frac{1}{4}\sin 4x$, donc

$K=\left[-\dfrac{\cos 4x}{16}\right]_0^{\pi}=0$: C.

Q9 ✔ Réponse D

$g(x)=(1-x)(1-e^x)\geq 0$ quand les deux facteurs ont le même signe : $x\leq 0$ ou $x\geq 1$. Donc $D_f=]-\infty;0]\cup[1;+\infty[$ (A et B fausses).

$g'(x)=-(1-e^x)-(1-x)e^x=xe^x-1<0$ pour $x<0$: g, donc $f=\sqrt{g}$, est décroissante sur $]-\infty;0[$ (D).

En 1 : $g(1)=0$ et $g'(1)=e-1>0$, donc

$\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\dfrac{\sqrt{g(x)}}{x-1}\to+\infty$ quand $x\to 1^+$: pas dérivable (E fausse).

Q10 ✔ Réponse A

$D_f=]0,e[\cup]e,+\infty[$. En $+\infty$: $\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{e^x-1}{x(\ln x-1)}\to+\infty$ (croissances comparées), et $f(x)\to+\infty$: branche parabolique de direction (Oy) (A).

Sur $]0,e[$, $1-e^x<0$ et $1-\ln x>0$: $f<0$ (B fausse). Enfin

$$f'(1)=\frac{-e(1-\ln 1)+(1-e)\cdot 1}{(1-\ln 1)^2}=1-2e,$$

ni 1 ni 0 : C et D sont fausses.

FACULTÉ DE MÉDECINE ET DE PHARMACIE D'OUJDA · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès · Faculté de Médecine et de Pharmacie d'Oujda

Session 2017–2018

2017 Énoncé

Q1 On pose : $A = 1+\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+\cdots+\cos\left(\frac{9\pi}{5}\right)$ et $B = \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)+\cdots+\sin\left(\frac{9\pi}{5}\right)$. On considère le nombre complexe $z = A + iB$. Le nombre complexe z est égal à :

A $z = 0$ B $z = -2i$
C $z = \frac{1}{2}$ D $z = 2i$
E Toutes les réponses proposées sont fausses

Q2 Soit la fonction numérique f définie pour la variable réelle x par : $f(x) = 2\ln\left(x^2 - 2x + 2\right)$.

A Le domaine de définition de f est : $D_f = \mathbb{R}^+$
B $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$
C $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$
D $f''(x) = \dfrac{x(4-x)}{\left((x-1)^2+1\right)^2}$
E $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \ln 2$

Q3 On considère $I = \int_0^1 5e^t\cos(2t)\,\mathrm{d}t$ et $J = 5\int_0^1 e^t\sin(2t)\,\mathrm{d}t$.

A $2J - I = e\cos(2) - 1$
B $2I + J = 1 - e\sin(2)$
C $J = 2 + e\sin(2) - 2e\cos(2)$
D $I = 2 + e\cos(2) - 2\sin(2)$
E Toutes les propositions sont fausses

Q4 Si une fonction f est définie en un point a, alors nécessairement :

A f est continue en a
B $\ln(f)$ est définie en a
C $\dfrac{1}{f}$ est définie en a
D $\dfrac{1}{e^f}$ est définie en a
E Toutes les propositions sont fausses

Q5 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$. On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 1$ et $z_B = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Soit C le symétrique de B par rapport à l'axe des abscisses.

A L'affixe z_C du point C est $z_C = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$
B Le triangle ABC est équilatéral
C Le module $|z_B - z_A| = \sqrt{2}$
D Le triangle ABC est isocèle
E L'affixe z_C du point C est $z_C = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

Q6 Choisir la bonne réponse :

A La solution de l'équation différentielle $y'' - 2y' - 8y = 0$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$ est $y = e^{-2x} + 2e^{4x}$
B Le nombre $\left(e^{i\theta}\right)^m$ avec $m \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$ est égal à : $\cos(\theta^m) + i\sin(\theta^m)$
C Le nombre $\left(e^{i\theta}\right)^m$ avec $m \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$ est égal à : $m(\cos\theta + i\sin\theta)$
D L'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace tels que $x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z+3 = 0$ est une sphère
E L'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace tels que $x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z+3 = 0$ est un ensemble vide

Q7 On considère la fonction f_n définie par : pour tout réel $x \in [0;+\infty[$, $f_n(x) = nxe^{-nx}$ avec n un entier supérieur ou égal à 1 ($n \geq 1$). On note C_n la courbe représentative de f_n dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

A $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$
B $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = -\infty$
C $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = n$
D $f_n'(x) = ne^{-nx}(nx-1)$
E Toutes les propositions sont fausses

Q8 On prend les mêmes données de la question précédente.

A La courbe C_n admet l'asymptote d'équation $y = 1$
B La courbe C_n admet l'asymptote d'équation $y = e$
C f_n présente un maximum au point de coordonnées $\left(\frac{1}{e};\frac{1}{n}\right)$
D f_n présente un maximum au point de coordonnées $\left(\frac{1}{n};\frac{1}{e}\right)$
E f_n présente un maximum au point de coordonnées $\left(\frac{1}{e};-\frac{1}{n}\right)$

Q9 On prend les mêmes données de la question 7. On note C_1 et C_2 les courbes représentatives de f_1 et f_2 (pour $n = 1$ et $n = 2$).

A Les deux courbes C_1 et C_2 se coupent en deux points P et Q d'abscisses respectives $p = e^2$ et $q = \ln 4$
B Dans l'intervalle $]\ln 2, +\infty[$, C_2 est en dessous de C_1
C Les deux courbes C_1 et C_2 ne se coupent pas
D Dans l'intervalle $]0, \ln 2[$, C_2 est en dessous de C_1
E Les deux courbes C_1 et C_2 se coupent en deux points P et Q d'abscisses respectives $p = e^2$ et $q = e$

Q10 On prend les mêmes données de la question 7. L'aire du domaine compris entre C_1, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \ln 2$ est :

A $\frac{1}{2}(\ln 2 - 1)$ B $\ln 2 - 1$
C $1 - \ln 2$ D $\dfrac{\ln 2}{2}$
E Toutes les réponses proposées sont fausses

FACULTÉ DE MÉDECINE ET DE PHARMACIE D'OUJDA · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès · Faculté de Médecine et de Pharmacie d'Oujda

Session 2017–2018

2017

Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10
A	C	C	D	B	D	E	D	B	E

Q1 ✔ Réponse A

Avec $\omega = e^{i\pi/5}$: $z = \sum_{k=0}^{9} \omega^k = \dfrac{1-\omega^{10}}{1-\omega} = \dfrac{1-e^{2i\pi}}{1-\omega} = 0$ (car $\omega \neq 1$).

Q2 ✔ Réponse C

$x^2-2x+2 = (x-1)^2+1 > 0$: $D_f = \mathbb{R}$ (A fausse). $f(x) \to +\infty$ en $+\infty$ (B fausse), mais $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{2\ln(x^2-2x+2)}{x} \to 0$ (croissances comparées) : C.

$f'(x) = \dfrac{4(x-1)}{(x-1)^2+1}$ et $f''(x) = \dfrac{4\left(1-(x-1)^2\right)}{\left((x-1)^2+1\right)^2} = \dfrac{4x(2-x)}{\left((x-1)^2+1\right)^2}$ (D fausse). Enfin $f(0) = 2\ln 2$ (E fausse).

Q3 ✔ Réponse C

$I + iJ = 5\displaystyle\int_0^1 e^{(1+2i)t}\,dt = \dfrac{5\left(e^{1+2i}-1\right)}{1+2i} = \left(e^{1+2i}-1\right)(1-2i)$.

Avec $e^{1+2i}-1 = (e\cos 2 - 1) + ie\sin 2$:

$$I = e\cos 2 - 1 + 2e\sin 2, \qquad J = e\sin 2 - 2e\cos 2 + 2.$$

C est vraie. On vérifie que les autres sont fausses : $2J - I = 5 - 5e\cos 2$ et $2I + J = 5e\sin 2$.

Q4 ✔ Réponse D

$e^{f(a)}$ existe et est strictement positif, donc $\dfrac{1}{e^{f(a)}}$ est toujours défini : D.

Les autres ne sont pas automatiques : f peut être discontinue en a, et si $f(a) \leq 0$ (ou $f(a) = 0$), $\ln f$ (ou $\frac{1}{f}$) n'est pas défini en a.

Q5 ✔ Réponse B

$z_C = \bar{z}_B = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ (A et E fausses). 1, $e^{2i\pi/3}$ et $e^{-2i\pi/3}$ sont les racines cubiques de l'unité : ABC est équilatéral, de côté $|z_B - z_A| = \left|-\dfrac{3}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right| = \sqrt{3}$ (C fausse).

Remarque : un triangle équilatéral est aussi isocèle, donc D est vraie elle aussi.

Remarque : B (triangle équilatéral) est la réponse visée, mais D (triangle isocèle) est vraie aussi puisqu'un triangle équilatéral est isocèle. À trancher par le professeur (garder B ou retirer la question).

Q6 ✔ Réponse D

$x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z+3 = (x-1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2-3$: l'ensemble est la sphère de centre $(1,-2,-1)$ et de rayon $\sqrt{3}$ (D, et E fausse).

A est fausse : la fonction proposée vaut 3 en 0 (la bonne solution est $\frac{2}{3}e^{4x} + \frac{1}{3}e^{-2x}$). B et C sont fausses : $(e^{i\theta})^m = \cos(m\theta) + i\sin(m\theta)$.

Q7 ✔ Réponse E

$f_n(x) = \dfrac{nx}{e^{nx}} \to 0$ en $+\infty$: A, B et C sont fausses.

$f_n'(x) = ne^{-nx} - n^2xe^{-nx} = ne^{-nx}(1-nx)$: D a le signe inversé. Donc E.

Q8 ✔ Réponse D

$f_n'(x) = ne^{-nx}(1-nx)$ est positive puis négative : maximum en $x = \dfrac{1}{n}$, de valeur $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$. L'asymptote en $+\infty$ est $y = 0$ (A et B fausses).

Q9 ✔ Réponse B

$f_2(x) - f_1(x) = 2xe^{-2x} - xe^{-x} = xe^{-2x}\left(2 - e^{x}\right)$.

Les courbes se coupent en $x = 0$ et $x = \ln 2$ (A, C, E fausses). Sur $]0, \ln 2[$, $2 - e^x > 0$: C_2 est au-dessus (D fausse) ; sur $]\ln 2, +\infty[$, $2 - e^x < 0$: C_2 est en dessous de C_1 (B).

Q10 ✔ Réponse E

$f_1(x) = xe^{-x} \geq 0$ et une primitive est $-(x+1)e^{-x}$:

$$\int_0^{\ln 2} xe^{-x}\,dx = 1 - \frac{\ln 2 + 1}{2} = \frac{1-\ln 2}{2} \approx 0{,}153.$$

Cette valeur n'est pas proposée ($\frac{1}{2}(\ln 2 - 1)$ est son opposé) : E.

FACULTÉ DE MÉDECINE ET DE PHARMACIE D'OUJDA · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès · Faculté de Médecine et de Pharmacie d'Oujda

Session 2016–2017

2016

Énoncé

Q1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la suite (V_n) définie par :

$$V_n = \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \cdots + \sin\left(\frac{n-1}{n}\pi\right).$$

On considère le nombre complexe z tel que : $z = \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$.

- **A** $V = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = 1 + i\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)$
- **B** $V = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = 1 + i\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)$
- **C** $V_n = \dfrac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$
- **D** $V_n = \tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)$
- **E** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{V_n}{n} = 0$

Q2 Soit $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)}$. On pose $S = \sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n(n+1)}$.

- **A** $S_n = 1 + \dfrac{1}{n+1}$
- **B** S est divergente
- **C** S est convergente et sa somme est égale à 1
- **D** S est convergente et sa somme est égale à n
- **E** Toutes les réponses proposées sont fausses

Q3 On considère la suite numérique définie par : $u_0 = e^2 - 1$ et $u_{n+1} = (1+u_n)e^{-2} - 1$ avec n un entier naturel. On pose $V_n = 3(1+u_n)$.

- **A** (u_n) est croissante
- **B** (V_n) est une suite arithmétique
- **C** $u_n = e^{2n+2} - 1$
- **D** $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = -1$
- **E** $\ln V_0 + \ln V_1 + \cdots + \ln V_n = (n+1)(2 - n + \ln 3)$

Q4 On considère la fonction f : $f(x) = x - \dfrac{1 - 2\ln(1+x)}{x+1}$ et C_f la courbe qui la représente dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

- **A** Le domaine de définition de f est $[-1; +\infty[$
- **B** $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$
- **C** $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +1$
- **D** $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -1$
- **E** $f'(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 4 - 2\ln(x+1)}{(x+1)^2}$

Q5 On prend les mêmes données de la question précédente.

- **A** La solution de l'équation $f(x) = x$ est $x = 1 - \sqrt{e}$
- **B** Dans le domaine $]-1; -1+\sqrt{e}]$; $f(x) - x \geq 0$
- **C** Dans le domaine $[\sqrt{e} - 1; +\infty[$; $f(x) - x \leq 0$
- **D** La droite d'équation $y = x + \dfrac{2}{\sqrt{e^3}}$ est tangente à la courbe C_f au point d'abscisse $x_0 = \sqrt{e^3} - 1$
- **E** Toutes les réponses proposées sont fausses

Q6 Dans un repère orthonormé direct $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère les points : $A(-1, 2, 0)$, $B(3, 0, 4)$ et $C(-2, 1, 2)$.

- **A** La surface du triangle ABC est $5\sqrt{2}$
- **B** La surface du triangle ABC est $5\sqrt{3}$
- **C** La hauteur passant par le point A dans le triangle ABC est $\sqrt{5}$
- **D** La hauteur passant par A dans le triangle ABC est $\sqrt{6}$
- **E** Les points A, B et C sont alignés

Q7 Choisir la réponse juste :

- **A** Le périmètre d'un cercle de rayon R est πR
- **B** Le nombre complexe $e^{i\frac{\pi}{4}} + e^{i\frac{3\pi}{4}}$ est égal à $i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
- **C** On peut choisir un jury de 5 personnes parmi 9 personnes de 256 façons possibles
- **D** L'hectare est une unité de longueur
- **E** Toutes les propositions sont fausses

Q8 Soit $I = 2\displaystyle\int_0^{-a} \left(\tan^3(x) + \tan x\right) \mathrm{d}x$ et $J = \displaystyle\int_0^{-a} \cos^3(2t)\,\mathrm{d}t$.

- **A** $I = 1 - \dfrac{1}{\cos^2 a}$
- **B** $I = 2 - \dfrac{1}{\cos^2 a}$
- **C** $J = \sin a \cdot \left(\dfrac{\cos a \, \sin^2 2a}{3} + \cos a\right)$
- **D** $J = \dfrac{\sin a}{2} \cdot \left(\dfrac{\cos a \, \sin^2 2a}{3} + \cos a\right)$
- **E** Toutes les réponses proposées sont fausses

Q9 Soit $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \cos x \,\mathrm{d}x$ avec $n \in \mathbb{N}$.

- **A** $I_0 = -1$
- **B** $I_1 = \dfrac{\pi}{2}$
- **C** $I_{n+2} = \left(\dfrac{\pi}{2}\right)^{n+1} + (n+1)I_n$
- **D** $I_{n+2} = \left(\dfrac{\pi}{2}\right)^{n+2} - (n+1)(n+2)I_n$
- **E** $I_2 = 2 - \dfrac{\pi^2}{4}$

Q10 Choisir l'affirmation juste :

- **A** $\cos^2\dfrac{3\pi}{12} + \cos^2\dfrac{5\pi}{12} + \cos^2\dfrac{9\pi}{12} + \cos^2\dfrac{11\pi}{12} = 3$
- **B** Le point $I(2, 0)$ est le centre de symétrie de la courbe représentant la fonction : $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$
- **C** $\sqrt{1 - \sin 2x} = \cos 2x$
- **D** La période de la fonction $f(x) = 1 - 8\cos x - 4\cos 2x$ est π
- **E** La propriété suivante est fausse : $(g \circ f)' = f' \cdot g'(f)$

FACULTÉ DE MÉDECINE ET DE PHARMACIE D'OUJDA · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès · Faculté de Médecine et de Pharmacie d'Oujda

Session 2016–2017

2016

Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10
C	C	E	E	D	D	E	E	D	B

Q1 ✔ Réponse C

$z = e^{i\pi/n}$ et $z^n = -1$, donc

$$\begin{aligned} 1 + z + \cdots + z^{n-1} &= \frac{1 - z^n}{1 - z} \\ &= \frac{2}{1 - e^{i\pi/n}} \\ &= \frac{2}{-2i \sin\frac{\pi}{2n}\, e^{i\pi/(2n)}} \\ &= 1 + \frac{i}{\tan\frac{\pi}{2n}}. \end{aligned}$$

A et B sont fausses. V_n est la partie imaginaire de cette somme : $V_n = \dfrac{1}{\tan\frac{\pi}{2n}}$ (C). Enfin $\dfrac{V_n}{n} \sim \dfrac{2n/\pi}{n} \to \dfrac{2}{\pi} \neq 0$.

Q2 ✔ Réponse C

$\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$: la somme télescope,

$S_n = 1 - \dfrac{1}{n+1} \to 1$. La série converge et sa somme vaut 1.

Q3 ✔ Réponse E

$1 + u_{n+1} = e^{-2}(1 + u_n) : 1 + u_n = e^2 \cdot e^{-2n}$, donc $u_n = e^{2-2n} - 1$ (décroissante ; A et C fausses) et $V_n = 3e^{2-2n}$, géométrique de limite 0 (B et D fausses).

$\ln V_k = \ln 3 + 2 - 2k$, d'où

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \ln V_k = (n+1)(\ln 3 + 2) - n(n+1) = (n+1)(2 - n + \ln 3)$: E.

Q4 ✔ Réponse E

$D_f =]-1; +\infty[$ (A fausse). En -1^+ : $1 - 2\ln(1+x) \to +\infty$ et $x + 1 \to 0^+$, donc $f(x) \to -\infty$ (B fausse). En $+\infty$:

$\dfrac{1 - 2\ln(1+x)}{x+1} \to 0$, donc $f(x) \to +\infty$ (C et D fausses).

$\left(\dfrac{1 - 2\ln(1+x)}{x+1}\right)' = \dfrac{-2 - 1 + 2\ln(1+x)}{(x+1)^2}$, donc

$$f'(x) = 1 - \frac{2\ln(1+x) - 3}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x + 4 - 2\ln(x+1)}{(x+1)^2}.$$

Q5 ✔ Réponse D

$f(x) - x = \dfrac{2\ln(1+x) - 1}{x+1}$: elle s'annule pour $x = \sqrt{e} - 1$ (A fausse), est ≤ 0 sur $]-1; \sqrt{e} - 1]$ (B fausse) et ≥ 0 ensuite (C fausse).

En $x_0 = \sqrt{e^3} - 1 : \ln(1 + x_0) = \frac{3}{2}$, donc

$f'(x_0) = 1 - \dfrac{3-3}{(x_0+1)^2} = 1$ et $f(x_0) = x_0 - \dfrac{1-3}{\sqrt{e^3}} = x_0 + \dfrac{2}{\sqrt{e^3}}$.

La tangente est $y = x + \dfrac{2}{\sqrt{e^3}}$: D.

Q6 ✔ Réponse D

$\overrightarrow{AB}(4,-2,4)$ et $\overrightarrow{AC}(-1,-1,2) : \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (0,-12,-6)$, de norme $6\sqrt{5} \neq 0$ (non alignés). L'aire vaut $3\sqrt{5}$ (A et B fausses).

$BC = \|(-5,1,-2)\| = \sqrt{30}$, donc la hauteur issue de A vaut $\dfrac{2 \times 3\sqrt{5}}{\sqrt{30}} = \dfrac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$: D.

Q7 ✔ Réponse E

- A : le périmètre vaut $2\pi R$.
- B : $e^{i\pi/4} + e^{3i\pi/4} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = i\sqrt{2}$.
- C : $\binom{9}{5} = 126$.
- D : l'hectare est une unité d'aire.

Toutes sont fausses : E.

Q8 ✔ Réponse E

$\tan^3 x + \tan x = \tan x(1 + \tan^2 x)$, dont une primitive est $\dfrac{\tan^2 x}{2}$: $I = \tan^2(-a) = \tan^2 a = \dfrac{1}{\cos^2 a} - 1$. A en est l'opposé et B vaut $1 - \tan^2 a$: fausses.

$\cos^3 u = \cos u\,(1 - \sin^2 u)$, donc

$$J = \frac{1}{2}\left[\sin 2t - \frac{\sin^3 2t}{3}\right]_0^{-a} = -\frac{\sin 2a}{2}\left(1 - \frac{\sin^2 2a}{3}\right).$$

C vaut $\dfrac{\sin 2a}{2}\left(1 + \dfrac{\sin^2 2a}{3}\right)$ et D la moitié de C : aucune n'est égale à J (par exemple pour $a = \frac{\pi}{4}$, $J = -\frac{1}{3}$, C $= \frac{2}{3}$, D $= \frac{1}{3}$).

Donc E.

Q9 ✔ Réponse D

Deux intégrations par parties :

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= \left[x^{n+2} \sin x\right]_0^{\pi/2} - (n+2)\int_0^{\pi/2} x^{n+1} \sin x\, dx \\ &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+2} - (n+2)(n+1)I_n, \end{aligned}$$

car

$$\int_0^{\pi/2} x^{n+1} \sin x\, dx = \left[-x^{n+1}\cos x\right]_0^{\pi/2} + (n+1)I_n = (n+1)I_n.$$

D est vraie.

$I_0 = 1$, $I_1 = \frac{\pi}{2} - 1$ et $I_2 = \frac{\pi^2}{4} - 2$: A, B, E sont fausses.

Q10 ✔ Réponse B

B : en développant, $f(2+h) = h^3 - 3h$, fonction impaire de h. Donc $f(2-h) = -f(2+h)$: le point $I(2,0)$ est centre de symétrie de la courbe.

- A : $\cos^2\frac{\pi}{4} + \cos^2\frac{3\pi}{4} = 1$ et $\cos^2\frac{5\pi}{12} + \cos^2\frac{11\pi}{12} = \sin^2\frac{\pi}{12} + \cos^2\frac{\pi}{12} = 1$: la somme vaut 2.
- C : $\sqrt{1 - \sin 2x} = |\cos x - \sin x|$, différent de $\cos 2x$ en général.
- D : la période est 2π (à cause de $\cos x$).
- E : la formule $(g \circ f)' = f' \cdot g' \circ f$ est vraie.

FACULTÉ DE MÉDECINE ET DE PHARMACIE D'OUJDA · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès · Faculté de Médecine et de Pharmacie d'Oujda

Session 2015–2016

2015

Énoncé

Q1 On considère le nombre complexe $z = \dfrac{\sqrt{3}-i}{1-i}$.

- **A** $z = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}i$
- **B** $z = \sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right)$
- **C** $z = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}i$
- **D** $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
- **E** $z = \sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\dfrac{5\pi}{4}\right)\right)$

Q2 On considère la suite complexe définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{4}\right) u_n$$

$(\forall n \in \mathbb{N})$.

- **A** $u_4 = \dfrac{1}{32}\left(1+i\sqrt{3}\right)$
- **B** $|u_n| = 2^n$
- **C** $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = 2$
- **D** u_n est réel si et seulement si $n = 3k+1$ avec $k \in \mathbb{N}$
- **E** Toutes les réponses proposées sont fausses

Q3 On considère les suites suivantes : $u_n = \sum\limits_{p=0}^{n-1} \dfrac{2}{3^p}$ et $V_n = -5\left(\sqrt{2}\right)^n$.

- **A** $u_n = 2\left(1-3^n\right)$
- **B** $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 0$
- **C** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$
- **D** $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = -5$
- **E** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Q4 Une étude sur la fréquentation d'un stade de sport a permis de constater que pour chaque année un taux de réabonnement de 80 % ainsi que l'apparition de 4000 nouveaux abonnés. On note V_n le nombre d'abonnés à la fin de la n-ième année et on a $V_0 = 7000$. On pose $u_n = 2\cdot 10^4 - V_n$.

- **A** $V_{n+1} = 11000 + 0{,}8\,V_n$
- **B** $V_{n+1} = 7000 + 0{,}8\,V_n$
- **C** (u_n) est une suite arithmétique
- **D** $u_n = 13000\cdot(0{,}8)^n$
- **E** $u_n = 13000\cdot(0{,}8)^{n+1}$

Q5 On considère la fonction numérique définie pour tout x réel par : $g(x) = \dfrac{x}{2}\sqrt{x^2+4} + \dfrac{x^2}{2}$.

- **A** Le domaine de définition de g est $D_g =]-\infty;-2] \cup [2;+\infty[$
- **B** Dans un intervalle déterminé, $g^{-1}(x) = \dfrac{x}{2\sqrt{x+1}}$
- **C** $\left(g^{-1}\right)'(0) = 1$
- **D** $g'(0) = 0$
- **E** $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 2$

Q6

- **A** Le volume d'un cube dont la diagonale d'une face mesure $4\sqrt{2}$ cm est 8 cm^3
- **B** Il faut multiplier par $\sqrt[3]{3}$ le rayon d'une sphère pour tripler son volume
- **C** Si $x^2+y^2 = 208$ et $xy = 58$, alors $x+y = 16$
- **D** Le produit de 3 entiers consécutifs est 990. La somme des deux plus petits est alors de 21
- **E** Toutes les affirmations proposées sont fausses

Q7 Soit la fonction f définie dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + \sin(2x)$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

- **A** La fonction f est paire
- **B** Le point O n'est pas le centre de symétrie de C_f
- **C** C_f est au-dessus de la droite d'équation $y = 2x+1$
- **D** La période de f est π
- **E** $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{f(x)}{x} = 4$

Q8 On considère la fonction numérique $f(x) = 2\dfrac{\sqrt{\ln(1-x)}}{1-x}$ et

$I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx}\sin x\,\mathrm{d}x$ et

$J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx}\cos x\,\mathrm{d}x$.

- **A** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$
- **B** Pour $x = -\sqrt{e}$; $f'(x) = 0$
- **C** $J_n - nI_n = e^{n\frac{\pi}{2}}$
- **D** $I_n = \dfrac{1-ne^{-n\frac{\pi}{2}}}{n^2+1}$
- **E** $J_n = \dfrac{1+ne^{-n\frac{\pi}{2}}}{n^2+1}$

Q9 Soit $I = \displaystyle\int_0^a \frac{\cos x}{1+2\sin x}\,\mathrm{d}x$ et

$J = \displaystyle\int_0^a \frac{\sin 2x}{1+2\sin x}\,\mathrm{d}x$.

- **A** $I = 1 - \ln(1-\sin a)$
- **B** $I = 1 - \ln(1-2\sin a)$
- **C** $J = \sin a + \ln(1+2\sin a)$
- **D** $J = \sin a + \ln\dfrac{1}{\sqrt{1+2\sin a}}$
- **E** Toutes les réponses proposées sont fausses

Q10 Soit $I_n = \displaystyle\int_0^a x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x$ $(n \geq 1)$.

- **A** $I_1 = 1 + \dfrac{a+1}{e^a}$
- **B** La suite (I_n) est croissante (avec $a = 1$)
- **C** $\lim\limits_{x\to-\infty} I_n = +\infty$ (avec $a = 1$)
- **D** $I_n = nI_{n-1} + a^n e^{-a}$
- **E** Toutes les réponses proposées sont fausses

FACULTÉ DE MÉDECINE ET DE PHARMACIE D'OUJDA · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès · Faculté de Médecine et de Pharmacie d'Oujda

Session 2015–2016

2015

Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10
D	E	C	D	C	B	E	D	D	E

Q1 ✔ Réponse D

$z = \dfrac{(\sqrt{3}-i)(1+i)}{2} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}i$ (A et C fausses).

Sous forme exponentielle : $z = \dfrac{2e^{-i\pi/6}}{\sqrt{2}\,e^{-i\pi/4}} = \sqrt{2}\,e^{i\pi/12}$ (B et E fausses). En identifiant les parties imaginaires : $\sqrt{2}\sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$, d'où $\sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$: D.

Q2 ✔ Réponse E

$\dfrac{1+i\sqrt{3}}{4} = \dfrac{1}{2}e^{i\pi/3}$, donc $u_n = \dfrac{1}{2^n}e^{in\pi/3}$.

- $u_4 = \dfrac{1}{16}e^{4i\pi/3} = -\dfrac{1}{32}\left(1+i\sqrt{3}\right)$: A a le mauvais signe.
- $|u_n| = 2^{-n} \to 0$: B et C fausses.
- u_n est réel si et seulement si $\frac{n\pi}{3} \equiv 0\ [\pi]$, c'est-à-dire $n = 3k$: D fausse.

Donc E.

Q3 ✔ Réponse C

$u_n = 2\cdot\dfrac{1-(1/3)^n}{1-1/3} = 3\left(1-\dfrac{1}{3^n}\right) \to 3$: C (A et E fausses).

$V_n = -5(\sqrt{2})^n \to -\infty$: B et D fausses.

Q4 ✔ Réponse D

$V_{n+1} = 0{,}8\,V_n + 4000$ (A et B fausses). Alors $u_{n+1} = 20000 - 0{,}8V_n - 4000 = 0{,}8(20000 - V_n) = 0{,}8\,u_n$: (u_n) est géométrique (C fausse), de premier terme $u_0 = 13000$, donc $u_n = 13000\times 0{,}8^n$: D.

Q5 ✔ Réponse C

$D_g = \mathbb{R}$ (A fausse). $g'(x) = \dfrac{1}{2}\sqrt{x^2+4} + \dfrac{x^2}{2\sqrt{x^2+4}} + x > 0$ et $g'(0) = 1$ (D fausse). Comme $g(0) = 0$: $(g^{-1})'(0) = \dfrac{1}{g'(0)} = 1$: C.

En écrivant $g(x) = \dfrac{x}{2}\left(\sqrt{x^2+4}+x\right)$ et en posant $s = \sqrt{x^2+4}+x$, on trouve $g^{-1}(y) = \dfrac{y}{\sqrt{y+1}}$ (B a un facteur 2 de trop). En $-\infty$, $\sqrt{x^2+4}+x = \dfrac{4}{\sqrt{x^2+4}-x} \sim \dfrac{2}{|x|}$, d'où $g(x) \to -1$ (E fausse).

Q6 ✔ Réponse B

- A : le côté vaut 4 cm, donc le volume 64 cm^3.
- B : le volume $\frac{4}{3}\pi R^3$ est multiplié par k^3 quand R est multiplié par k ; $k^3 = 3$ donne $k = \sqrt[3]{3}$: **vraie**.
- C : $(x+y)^2 = 208 + 116 = 324$, donc $x+y = \pm 18$.
- D : $990 = 9\times 10\times 11$ et $9+10 = 19$.

Q7 ✔ Réponse E

$\dfrac{f(x)}{x} = 2 + 2\cdot\dfrac{\sin 2x}{2x} \to 2+2 = 4$: E.

f est impaire (A fausse), donc O est centre de symétrie (B fausse). $f(x) - (2x+1) = \sin 2x - 1 \le 0$ (C fausse). f n'est pas périodique (elle tend vers $+\infty$).

Q8 ✔ Réponse D

$J_n + iI_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} e^{(i-n)x}\,dx = \dfrac{ie^{-n\pi/2}-1}{i-n}$. En multipliant par $\dfrac{-n-i}{-n-i}$:

$$J_n + iI_n = \frac{n + e^{-n\pi/2} + i\left(1 - ne^{-n\pi/2}\right)}{n^2+1}.$$

Donc $I_n = \dfrac{1-ne^{-n\pi/2}}{n^2+1}$ (D), $J_n = \dfrac{n+e^{-n\pi/2}}{n^2+1}$ (E fausse) et $J_n - nI_n = e^{-n\pi/2}$ (C fausse).

Pour f ($x \le 0$, $t = 1-x \ge 1$) : $f = \dfrac{2\sqrt{\ln t}}{t} \to 0$ en $-\infty$ (A fausse), et la dérivée s'annule pour $\ln t = \frac{1}{2}$, soit $x = 1-\sqrt{e}$, pas $-\sqrt{e}$ (B fausse).

Q9 ✔ Réponse D

$I = \dfrac{1}{2}\ln(1+2\sin a)$ (A et B fausses).

Avec $u = \sin x$:

$J = \displaystyle\int_0^{\sin a} \frac{2u}{1+2u}\,du = \int_0^{\sin a}\left(1 - \frac{1}{1+2u}\right)du =$

$\sin a - \dfrac{1}{2}\ln(1+2\sin a) = \sin a + \ln\dfrac{1}{\sqrt{1+2\sin a}}$: D.

Q10 ✔ Réponse E

- $I_1 = \left[-(x+1)e^{-x}\right]_0^a = 1 - \dfrac{a+1}{e^a}$: A a le mauvais signe.
- Pour $a = 1$: sur $[0,1]$, $x^{n+1} \le x^n$, donc $I_{n+1} \le I_n$: la suite est décroissante (B fausse), et $0 \le I_n \le \int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1}$, donc elle tend vers 0 (C fausse).
- Par parties : $I_n = \left[-x^n e^{-x}\right]_0^a + nI_{n-1} = nI_{n-1} - a^n e^{-a}$: D a le mauvais signe.

Donc E.

FACULTÉ DE MÉDECINE ET DE PHARMACIE D'OUJDA · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès · Faculté de Médecine et de Pharmacie d'Oujda

Session 2014–2015

2014

Énoncé

Q1 Soit : $S=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$; $u_n=\dfrac{5^n+(-3)^n}{2^n+3(-1)^n}$; $v_n=\dfrac{n+\sin n}{n-\sin n}$ avec $n>1$, et :

$$w_n=\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}.$$

- **A** $S=2n^2-1$
- **B** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=1$
- **C** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\dfrac{5}{2}$
- **D** $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=+\infty$
- **E** $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n=1$

Q2 On considère les points M, N et P dont les affixes sont respectivement : $z_M=2\left(i\sqrt{3}+1\right)$, $z_N=2\left(1-i\sqrt{3}\right)$ et $z_P=i\sqrt{3}-1$.

- **A** $|z_N|=2$
- **B** $z_M=\dfrac{1}{\overline{z_N}}$
- **C** $z_M=\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}$
- **D** Les droites (MP) et (NP) sont perpendiculaires
- **E** Les droites (MP) et (NP) sont parallèles

Q3 Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, paire et périodique de période T.

- **A** La fonction dérivée f' est paire et périodique
- **B** La fonction dérivée f' est impaire mais non nécessairement périodique
- **C** $\forall k\in\mathbb{Z},\ f'(kT)=0$
- **D** $\displaystyle\int_T^{2T} f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{T}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$
- **E** Toutes les réponses proposées sont fausses

Q4 Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{e^{1-x}}{1+e^{-x}}$ et C_f la courbe qui la représente dans un repère orthonormé.

- **A** Le domaine de définition de f est : $D_f=]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$
- **B** f est croissante sur son domaine de définition
- **C** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$
- **D** L'équation $f(x)=e^{-x}$ n'a pas de solution
- **E** La tangente à C_f au point M d'abscisse $x_M=0$ coupe l'axe des abscisses au point $N(2;0)$

Q5 Soient f et g les fonctions définies sur $[0;1]$ par : $f(x)=2x$ et $g(x)=x^2$. Soit C_f la courbe représentant f et C_g la courbe représentant g dans un repère orthonormé. L'aire S, en unité d'aire, de la surface comprise entre les courbes C_f et C_g et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$ est :

- **A** 0
- **B** 1
- **C** $\dfrac{2}{3}$
- **D** 2
- **E** $\dfrac{1}{3}$

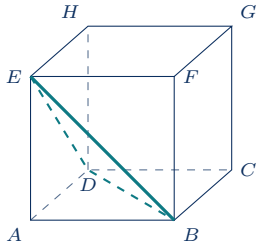
Q6 Le nombre d'habitants d'un pays était de 32 millions en 2012. Cette population s'accroît naturellement chaque année de 5 %. Par ailleurs, ce pays accueille chaque année un demi-million d'immigrés. Soit v_n le nombre d'habitants de ce pays, en millions, lors de l'année $(2012+n)$. On pose $u_n=v_n+10$.

- **A** $v_{n+1}=32{,}5+0{,}05\,v_n$
- **B** (u_n) est une suite arithmétique de raison $1{,}05$
- **C** Le nombre d'années n au bout duquel la population de ce pays dépassera 158 millions d'habitants est de 29 ans
- **D** Le nombre d'années n au bout duquel la population de ce pays dépassera 158 millions d'habitants est de 20 ans
- **E** Toutes les réponses proposées sont fausses

Q7 Choisir la réponse juste :

- **A** La courbe représentative de la fonction $f(x)=x^2+2x-1$ admet comme axe de symétrie la droite d'équation $x=1$
- **B** La courbe représentative d'une fonction ne coupe jamais son asymptote oblique
- **C** On considère une fonction numérique g dérivable sur $\mathbb{R}$. L'équation $g'(x)=2g(x)$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$
- **D** La fonction $h(x)=|4x(x-5)|$ est non dérivable au point $x_0=5$
- **E** La fonction $f(x)=|x+5|-|3-x|+2x-3$ n'admet pas de primitive dans $\mathbb{R}$

Q8 On considère un cube $ABCDEFGH$ (schéma) de côté a.



- **A** $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{EA}$
- **B** $\overrightarrow{AG}$ est un vecteur normal au plan (BDE)
- **C** $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BE}=a^2$
- **D** Les droites (AG) et (DE) ne sont pas orthogonales
- **E** $\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BG}$

Q9 Une étude sur la propagation de deux types de maladies M_1 et M_2 dans un pays a prouvé que 18 % sont atteints de la maladie M_1. Parmi les malades atteints par M_1, il y a 8 % atteints par la maladie M_2, et parmi les non atteints par M_1, il y a 7 % atteints par M_2. On choisit au hasard une personne de ce pays et on définit les événements suivants : C : « la personne est atteinte de M_1 » ; D : « la personne est atteinte de M_2 ».

- **A** La probabilité pour que cette personne soit atteinte par M_2 est de $7{,}18\cdot10^{-2}$
- **B** La probabilité pour que cette personne soit atteinte par M_1 et par M_2 est de $0{,}18$
- **C** La probabilité pour que cette personne soit atteinte par M_1 et par M_2 est de $0{,}144$
- **D** Sachant que cette personne est atteinte par la maladie M_2, la probabilité pour qu'elle ne soit pas atteinte par M_1 est $0{,}2$
- **E** Toutes les réponses proposées sont fausses

Q10 $I_n=(n+1)\displaystyle\int_a^1 t^n\ln(t)\,\mathrm{d}t$.

- **A** $I_n=\dfrac{1}{(n+1)^2}\left(a^{n+1}-1\right)-\dfrac{a^{n+1}}{n+1}\ln a$
- **B** $I_n=\dfrac{1}{n+1}\left(1-a^{n+1}\right)-a^{n+1}\ln a$
- **C** $I_n=\dfrac{1}{n+1}\left(a^{n+1}-1\right)-a^{n+1}\ln a$
- **D** $I_n=\dfrac{1}{(n+1)^2}\left(a^{n+1}-1\right)-a^{n+1}\ln a$
- **E** Pour $a=\dfrac{1}{2}$, $\lim\limits_{n\to\infty} I_n=+\infty$

FACULTÉ DE MÉDECINE ET DE PHARMACIE D'OUJDA · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès · Faculté de Médecine et de Pharmacie d'Oujda

Session 2014–2015

2014

Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10
E	D	C	E	C	C	D	B	A	C

Q1 ✔ Réponse E

- $S = 2 \cdot \dfrac{n(n+1)}{2} - n = n^2$ (A fausse).
- $u_n = \left(\dfrac{5}{2}\right)^n \cdot \dfrac{1+(-3/5)^n}{1+3(-1/2)^n} \to +\infty$ (B et C fausses).
- $v_n = \dfrac{1+\frac{\sin n}{n}}{1-\frac{\sin n}{n}} \to 1$ (D fausse).
- Chacun des n termes de w_n est compris entre $\dfrac{n}{n^2+n}$ et $\dfrac{n}{n^2+1}$, donc $\dfrac{n^2}{n^2+n} \le w_n \le \dfrac{n^2}{n^2+1}$; les deux bornes tendent vers 1 : E.

Q2 ✔ Réponse D

$|z_N| = |z_M| = 4$: A et C sont fausses, et $\dfrac{1}{\bar{z}_N}$ a pour module $\dfrac{1}{4}$ (B fausse).
$\dfrac{z_P - z_M}{z_P - z_N} = \dfrac{-3-i\sqrt{3}}{-3+3i\sqrt{3}} = \dfrac{(-3-i\sqrt{3})(-3-3i\sqrt{3})}{36} = \dfrac{12i\sqrt{3}}{36} = \dfrac{i\sqrt{3}}{3}$, imaginaire pur : $(MP) \perp (NP)$ (D).

Q3 ✔ Réponse C

En dérivant $f(-x) = f(x)$: f' est impaire ; en dérivant $f(x+T) = f(x)$: f' est T-périodique (A et B fausses). Donc $f'(kT) = f'(0) = 0$ (une fonction impaire s'annule en 0) : C.
Par périodicité puis parité : $\displaystyle\int_T^{2T} f = \int_{-T/2}^{T/2} f = 2\int_0^{T/2} f$, et non la moitié (D fausse).

Q4 ✔ Réponse E

$f(x) = \dfrac{e}{e^x+1}$ est définie et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ (A et B fausses), de limite e en $-\infty$ (C fausse).
$f(x) = e^{-x} \iff e = 1+e^{-x} \iff x = -\ln(e-1)$: il y a une solution (D fausse).
$f(0) = \dfrac{e}{2}$ et $f'(x) = -\dfrac{e\,e^x}{(e^x+1)^2}$, $f'(0) = -\dfrac{e}{4}$. La tangente $y = \dfrac{e}{2} - \dfrac{e}{4}x$ coupe l'axe des abscisses en $x = 2$: E.

Q5 ✔ Réponse C

Sur $[0;1]$, $2x - x^2 = x(2-x) \ge 0$, donc
$S = \displaystyle\int_0^1 (2x-x^2)\,dx = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Q6 ✔ Réponse C

$v_{n+1} = 1{,}05\,v_n + 0{,}5$ (A fausse). Alors
$u_{n+1} = 1{,}05v_n + 10{,}5 = 1{,}05\,u_n$: (u_n) est géométrique de raison $1{,}05$ (B fausse) et $u_n = 42 \times 1{,}05^n$.
$v_n > 158 \iff 1{,}05^n > 4 \iff n > \dfrac{\ln 4}{\ln 1{,}05} \approx 28{,}4$: il faut 29 ans (C).

Q7 ✔ Réponse D

D : $u(x) = 4x(x-5)$ s'annule en 5 avec $u'(5) = 20 \neq 0$. Les dérivées à droite et à gauche de $h = |u|$ en 5 valent 20 et -20 : h n'est pas dérivable en 5.
- A : l'axe de symétrie de la parabole est $x = -1$.
- B : une courbe peut couper son asymptote (par exemple $x + \frac{\sin x}{x}$).
- C : par exemple $g(x) = e^{2x}$ vérifie $g' = 2g$ pour tout x.
- E : f est continue sur $\mathbb{R}$, donc admet des primitives.

Q8 ✔ Réponse B

Dans le repère $\left(A; \frac{1}{a}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{a}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{a}\overrightarrow{AE}\right)$: $B(a,0,0)$, $D(0,a,0)$, $E(0,0,a)$, $G(a,a,a)$.
- $\overrightarrow{AG}(a,a,a)$, $\overrightarrow{BD}(-a,a,0)$, $\overrightarrow{BE}(-a,0,a)$: $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BE} = 0$, donc $\overrightarrow{AG}$ est normal au plan (BDE) (B) ; C est fausse ($0 \neq a^2$).
- A : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{EA} = (a,a,-a) \neq \overrightarrow{AG}$.
- D : $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{DE} = (a,a,a)\cdot(0,-a,a) = 0$: elles sont orthogonales.
- E : $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA} = (0,a,0) \wedge (-a,0,0) = (0,0,a^2) \neq \overrightarrow{BG} = (0,a,a)$.

Q9 ✔ Réponse A

$P(C \cap D) = 0{,}18 \times 0{,}08 = 0{,}0144$ (B et C fausses) et $P(\bar{C} \cap D) = 0{,}82 \times 0{,}07 = 0{,}0574$.
Formule des probabilités totales : $P(D) = 0{,}0144 + 0{,}0574 = 0{,}0718 = 7{,}18 \cdot 10^{-2}$ (A). Enfin $P_D(\bar{C}) = \dfrac{0{,}0574}{0{,}0718} \approx 0{,}80$ (D fausse).

Q10 ✔ Réponse C

Par parties ($u = \ln t$, $v' = t^n$) :

$$\int_a^1 t^n \ln t\,dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\ln t\right]_a^1 - \int_a^1 \frac{t^n}{n+1}\,dt = -\frac{a^{n+1}\ln a}{n+1} - \frac{1-a^{n+1}}{(n+1)^2}.$$

En multipliant par $n+1$: $I_n = \dfrac{a^{n+1}-1}{n+1} - a^{n+1}\ln a$ (C). Pour $a = \frac{1}{2}$, $I_n \to 0$ (E fausse).

FACULTÉ DE MÉDECINE ET DE PHARMACIE D'OUJDA · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès · Faculté de Médecine et de Pharmacie d'Oujda

Session 2013–2014

2013 Énoncé

Q1 Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. z est un nombre complexe.

- **A** $\mathrm{Im}\left(z^2\right) = -\left(\mathrm{Im}(z)\right)^2$
- **B** Si $|2i - \overline{z}| = |2 + iz|$, alors $\mathrm{Im}(z) = 1$
- **C** Pour tout nombre complexe non nul z, les points M d'affixe z, N d'affixe $\frac{1}{\overline{z}}$ et le point O sont alignés
- **D** Si $|1 + iz| = |1 - i\overline{z}|$, alors $\mathrm{Re}(z) = 0$
- **E** Pour $z = 1 + i$, alors $z^6 = -4i$

Q2 Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose $p(z) = 2z^3 + 14z^2 + 41z + 68$. On note z_1, z_2 et z_3 les solutions de l'équation $p(z) = 0$ avec $z_1 \in \mathbb{R}$ et $\mathrm{Im}(z_2) > 0$. Les points A, B et C sont respectivement les images de z_1, z_2 et z_3 dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

- **A** $p(z)$ n'est pas divisible par $(z + 4)$
- **B** $z_2 + z_3 = 0$
- **C** Le triangle ABC est isocèle et rectangle en A
- **D** $|z_2 - z_1| = 2$
- **E** Les affixes des points M et N tels que $BCMN$ est un carré de centre A sont respectivement $z_M = -13 - 5i$ et $z_N = -13 + 5i$

Q3 L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Soit (P) le plan d'équation $2x - 3y + z - 6 = 0$.

- **A** Le plan (P) ne passe pas par le point $A(3; 0; 0)$
- **B** On considère le point $D(5; -3; 1)$. Le vecteur $\overrightarrow{AD}$ n'est pas normal au plan (P)
- **C** Une équation cartésienne du plan (P') passant par D et parallèle à (P) est $2x - 3y + z + 20 = 0$
- **D** Les points A et D n'appartiennent pas au plan (R) d'équation $x + y + z - 3 = 0$
- **E** Les plans (P) et (R) sont sécants suivant une droite (Δ) passant par A. La droite (Δ) admet pour vecteur directeur $\vec{u}(4; 1; -5)$

Q4 Choisir la réponse juste :

- **A** On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x - 2| + 1$: $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{11}{4}$
- **B** $I = \displaystyle\int_{-3}^{3} \sqrt{9 - x^2}\,\mathrm{d}x$; I représente l'aire d'un demi-disque de rayon 3
- **C** $\displaystyle\int_0^1 x^{2k}\,\mathrm{d}x = 2k + 1$ avec $k \in \mathbb{N}^*$
- **D** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(xe^{x^2} - \frac{1}{\cos^2 x}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{\pi}{4}} - 3\right)$
- **E** $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{-x}\sin(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} e^{-x}\cos(2x)\,\mathrm{d}x$

Q5 Soit la fonction numérique définie sur $]-\infty, 0[$ par : $f(x) = x + 5 + 6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$. Soit C_f la courbe représentant f dans un repère orthonormé.

- **A** La droite d'équation $y = -x + 4$ est asymptote oblique au voisinage de $-\infty$
- **B** La dérivée de la fonction au point $x = -5$ est $f'(-5) = 7$
- **C** La droite d'équation $y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2} + 6\ln\frac{3}{4}$ est tangente à la courbe C_f au point M d'abscisse $x_M = -3$
- **D** La fonction $h(x) = \frac{x^2}{2} + 5x + 6x\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$ est la primitive de f
- **E** $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$

Q6 (u_n) et (v_n) sont deux suites numériques définies par : $\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = 1 + \frac{1}{2}u_n \ ; \ (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$ et $v_n = u_n - 2$.

- **A** (u_n) est décroissante
- **B** $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{1}{2}$
- **C** (v_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{1}{2}$
- **D** $v_n = -\frac{1}{2^{n-2}}$
- **E** $u_n = 2 + 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Q7 Choisir la réponse juste :

- **A** $\frac{1}{1\times 2\times 3} + \frac{1}{2\times 3\times 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n+3}{4(n+1)(n+2)}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$
- **B** $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$
- **C** $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{10^k} = \frac{1}{90}\left(1 + \frac{1}{10^n}\right)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$
- **D** On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$: $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = 0$
- **E** $1! + 2! + \cdots + (n-1)! \geq n!$ avec n entier et $n \geq 2$

Q8 On considère la fonction $f(x) = \dfrac{\cos x}{x + 2\sin x}$.

- **A** La dérivée de f est : $f'(x) = \dfrac{x\sin x + \cos x - 2}{(x + 2\sin x)^2}$
- **B** La dérivée de f est : $f'(x) = \dfrac{x\sin x + \cos x + 2}{(x + 2\sin x)^2}$
- **C** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
- **D** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$
- **E** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

Q9 La solution de l'inéquation $1 + \ln x + \ln^2 x + \ln^3 x > 0$ est :

- **A** $]0, e^{-1}[$
- **B** $]0, +\infty[$
- **C** $]-\infty, e^{-1}[$
- **D** $]e, +\infty[$
- **E** $\left]\frac{1}{e}, +\infty\right[$

Q10 Choisir la réponse juste :

- **A** $\tan(a + b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 - \tan a \tan b}$
- **B** Le nombre de mots de six (6) lettres, qui ont un sens ou non, qu'on puisse écrire en utilisant toutes les lettres du mot « poumon » est 720
- **C** Le produit vectoriel de deux vecteurs est une valeur algébrique
- **D** Le produit scalaire de deux vecteurs est un nombre qui est toujours positif
- **E** $\tan\frac{\pi}{5} + \tan\frac{2\pi}{5} + \tan\frac{3\pi}{5} + \tan\frac{4\pi}{5} = 1$

FACULTÉ DE MÉDECINE ET DE PHARMACIE D'OUJDA · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès · Faculté de Médecine et de Pharmacie d'Oujda

Session 2013–2014

2013

Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10
C	C	E	B	C	D	B	E	E	–

Q1 ✔ Réponse C

C : $\dfrac{1}{\bar{z}} = \dfrac{z}{|z|^2}$ est un multiple réel positif de z, donc O, M, N sont alignés.
- A : avec $z = x + iy$, $\mathfrak{Im}(z^2) = 2xy$, différent de $-y^2$ en général.
- B : $|2i - \bar{z}| = |z + 2i|$ et $|2 + iz| = |z - 2i|$; l'égalité donne $\mathfrak{Im}(z) = 0$.
- D : $1 - i\bar{z} = \overline{1 + iz}$, donc l'égalité est vraie pour tout z (par exemple $z = 1$).
- E : $(1+i)^6 = (2i)^3 = -8i$.

Q2 ✔ Réponse C

$p(-4) = -128 + 224 - 164 + 68 = 0$ (A fausse) et $p(z) = (z+4)(2z^2 + 6z + 17)$. Les racines sont $z_1 = -4$ et $z_{2,3} = -\dfrac{3}{2} \pm \dfrac{5}{2}i$; $z_2 + z_3 = -3$ (B fausse).

$\dfrac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \dfrac{\frac{5}{2} + \frac{5}{2}i}{\frac{5}{2} - \frac{5}{2}i} = \dfrac{1+i}{1-i} = i$: $AB = AC$ et $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{2}$, le triangle est isocèle rectangle en A (C). $|z_2 - z_1| = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$ (D fausse).

Si A est le centre du carré $BCMN$, M est le symétrique de B : $z_M = 2z_1 - z_2 = -\dfrac{13}{2} - \dfrac{5}{2}i$ (E fausse).

Q3 ✔ Réponse E

- A : $2 \times 3 - 6 = 0$, donc $A \in (P)$.
- B : $\overrightarrow{AD}(2;-3;1)$ est exactement le vecteur normal de (P).
- C : le plan parallèle passant par D a pour équation $2x - 3y + z + d = 0$ avec $10 + 9 + 1 + d = 0$, soit $d = -20$.
- D : $3 + 0 + 0 - 3 = 0$, donc $A \in (R)$.
- E : A appartient aux deux plans, et $(2;-3;1) \wedge (1;1;1) = (-4;-1;5)$, colinéaire à $\vec{u}(4;1;-5)$: **vraie**.

Q4 ✔ Réponse B

B : $y = \sqrt{9 - x^2}$ décrit le demi-cercle supérieur de centre O et de rayon 3 : l'intégrale est l'aire du demi-disque.
- A : $\displaystyle\int_0^3 (|x-2|+1)\,dx = 2 + \frac{1}{2} + 3 = \frac{11}{2}$.
- C : l'intégrale vaut $\dfrac{1}{2k+1}$.
- D : l'intégrale vaut $\left[\frac{e^{x^2}}{2} - \tan x\right]_0^{\pi/4} = \dfrac{1}{2}\left(e^{\pi^2/16} - 3\right)$ (l'exposant est $\frac{\pi^2}{16}$).
- E : $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{(2i-1)x}\,dx = \frac{(1-e^{-\pi})(1+2i)}{5}$, donc l'intégrale avec $\sin 2x$ vaut le **double** de celle avec $\cos 2x$.

Q5 ✔ Réponse C

$f'(x) = 1 + 6\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x-1}\right) = 1 - \dfrac{6}{x(x-1)}$.

En -3 : $f'(-3) = 1 - \dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2}$ et $f(-3) = 2 + 6\ln\dfrac{3}{4}$, d'où la tangente $y = \dfrac{1}{2}(x+3) + 2 + 6\ln\dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{7}{2} + 6\ln\dfrac{3}{4}$: C.
- A : $\ln\frac{x}{x-1} \to 0$ en $-\infty$, l'asymptote est $y = x + 5$.
- B : $f'(-5) = 1 - \frac{6}{30} = \frac{4}{5}$.
- D : $h'(x) = x + 5 + 6\ln\frac{x}{x-1} - \frac{6}{x-1} \neq f(x)$.
- E : $\frac{x}{x-1} \to 0^+$ quand $x \to 0^-$, donc $f(x) \to -\infty$.

Q6 ✔ Réponse D

$v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = \dfrac{1}{2}u_n - 1 = \dfrac{1}{2}v_n$: (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ (C fausse), avec $v_0 = -4$. Donc $v_n = -\dfrac{4}{2^n} = -\dfrac{1}{2^{n-2}}$ (D).

Alors $u_n = 2 - \dfrac{4}{2^n}$ (E a le mauvais signe) : la suite est croissante (A fausse) et tend vers 2 (B fausse).

Q7 ✔ Réponse B

B est la formule classique (récurrence : $\frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$).
- A : avec $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right)$, la somme vaut $\dfrac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$ (il manque le facteur n ; pour $n = 2$: $\frac{5}{24} \neq \frac{5}{48}$).
- C : la somme vaut $\dfrac{1}{90}\left(1 - \dfrac{1}{10^n}\right)$.
- D : $S_n = \dfrac{n+1}{2n} \to \dfrac{1}{2}$.
- E : pour $n = 2$, $1! = 1 < 2! = 2$.

Q8 ✔ Réponse E

Pour $x > 2$: $|f(x)| \leq \dfrac{1}{x-2} \to 0$, donc $f(x) \to 0$: E.

$f'(x) = \dfrac{-\sin x(x + 2\sin x) - \cos x(1 + 2\cos x)}{(x + 2\sin x)^2} = -\dfrac{x\sin x + \cos x + 2}{(x + 2\sin x)^2}$: ni A ni B (B a le mauvais signe).

Q9 ✔ Réponse E

Avec $t = \ln x$: $1 + t + t^2 + t^3 = (1+t)(1+t^2)$, du signe de $1 + t$.

L'inéquation équivaut à $\ln x > -1$, soit $x > \dfrac{1}{e}$.

Q10 ✔ Réponse –

- A : faux, $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$.
- B : faux, le mot « poumon » contient deux fois la lettre o : $\dfrac{6!}{2!} = 360$ mots.
- C : faux, le produit vectoriel est un vecteur.
- D : faux, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta$ peut être négatif.
- E : faux, $\tan(\pi - x) = -\tan x$ donne $\tan\frac{4\pi}{5} = -\tan\frac{\pi}{5}$ et $\tan\frac{3\pi}{5} = -\tan\frac{2\pi}{5}$: la somme vaut 0.

Aucune proposition n'est juste (erreur du sujet).

FACULTÉ DE MÉDECINE ET DE PHARMACIE D'OUJDA · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès · Faculté de Médecine et de Pharmacie d'Oujda

Session 2012–2013

2012

Énoncé

Q1 Soit la fonction numérique définie par : $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 2x}$. C_f est la courbe représentant f dans un repère orthonormé.

- **A** Le domaine de définition de f est $\mathbb{R}$
- **B** La fonction f est dérivable à gauche de $x_0 = -2$
- **C** La courbe représentant f possède une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ d'équation $y = 2x + 1$
- **D** La fonction f est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$
- **E** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Q2 Choisir la réponse juste :

- **A** La dérivée de la fonction $f(x) = e^{\frac{x-1}{2x+3}}$ est $f'(x) = \dfrac{5}{2x+3} e^{\frac{x-1}{2x+3}}$
- **B** $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{e^{\frac{1}{x} + \frac{1}{\ln x}}}{x - 1} = 0$
- **C** $\dfrac{\sin x}{\cos x - 1} = \tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{x}{2}\right)$
- **D** La solution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\arctan(x^2 - 2x) = \dfrac{-\pi}{4}$ est $x = -1$
- **E** On pose $B = \arctan(3) + \arctan(2)$. Le calcul de $\tan B$ donne la valeur 1

Q3 Les nombres complexes :

- **A** $(1+i)^{2002} = -2^{1001}\, i$
- **B** Sachant que $z = \left(\dfrac{\sqrt{3} - i}{1 - i}\right)^3$, alors $|z| = \sqrt{2}$
- **C** $1 + i^2 + i^4 + \cdots + i^{2006} = 0$
- **D** La solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $-z\overline{z} + 3z + 2 = 6i$ est $z = 1 - 2i$
- **E** L'argument du nombre complexe $z = \left(\dfrac{1 + i\sqrt{3}}{1 + i}\right)^{20}$ est : $\arg z \equiv \dfrac{3\pi}{5}\ [2\pi]$

Q4 La fonction f solution de l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = 0$ et qui vérifie les conditions initiales $f(1) = e$ et $f'(2) = 0$ est :

- **A** $f(x) = xe^x$
- **B** $f(x) = \left(\dfrac{3}{2}x - \dfrac{1}{2}\right) e^x$
- **C** $f(x) = \left(\dfrac{3}{2} + \dfrac{x}{2}\right) e^x$
- **D** $f(x) = \left(\dfrac{3 - x}{2}\right) e^x$
- **E** $f(x) = \left(\dfrac{x - 3}{2}\right) e^x$

Q5 Une boîte contient 9 jetons (on ne peut pas les identifier par le toucher) : 2 jetons rouges portant le numéro 1, 3 jetons blancs portant les numéros 1, 2, 2 et 4 jetons noirs portant les numéros 1, 1, 2, 2. On tire au hasard et en même temps 3 jetons de la boîte.

- **A** La probabilité de l'événement X « les 3 jetons tirés ont des couleurs différentes » est $\dfrac{1}{6}$
- **B** La probabilité de l'événement Y « les 3 jetons tirés portent le même numéro » est $\dfrac{2}{7}$
- **C** La probabilité de l'événement Z « parmi les jetons tirés il y a au moins un jeton blanc » est $\dfrac{16}{21}$
- **D** La probabilité de l'événement $X \cap Y$ est $\dfrac{5}{21}$
- **E** La probabilité de l'événement $X \cap Y$ est $\dfrac{16}{21}$

Q6 On considère la suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n \, dx$.

- **A** $u_2 = \dfrac{\pi}{2}$
- **B** La suite (u_n) est croissante
- **C** $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{2}$
- **D** $u_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} u_n$
- **E** $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{n}\, u_n) = \dfrac{1}{2}$

Q7 La valeur de $I = \displaystyle\int_0^2 \frac{2x^2 - x - 2}{2x^2 + 3x + 1} \, dx$ est :

- **A** 2 **B** $\ln 2$ **C** -2 **D** $2 - \ln 15$ **E** $2 - \ln 2$

Q8 On considère la fonction $f(x) = x + \dfrac{1}{x} - (\ln x)^2 - 2$. Soit C_f sa courbe représentative. La surface de la partie du plan limitée par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$ est (avec u_a unité de mesure de la surface) :

- **A** $\dfrac{1}{2}\left(e^2 - 6e + 9\right) u_a$
- **B** $\dfrac{1}{2}(e+3)^2 u_a$
- **C** $(e-3)^2 u_a$
- **D** $(e+3)^2 u_a$
- **E** $-\dfrac{1}{2}(e-3)^2 u_a$

Q9 Les fonctions exponentielles :

- **A** La solution unique de l'équation $e^{2x}\left(4 - e^{2x}\right) = 3$ est $x = 0$
- **B** Dans $\mathbb{R}$, la solution de l'inéquation $e^{x^2 - 2} \leq e^{4 - x}$ est $S = [-2, 3]$
- **C** (u_n) est la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n e^{-u_n} \ ; \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$: la suite (u_n) est convergente
- **D** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{1 - e^{-x}} = -1$
- **E** $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin x \, e^{\cos x} \, dx = \frac{1}{e} - e$

Q10 On considère dans l'espace associé à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ les points $A(1, 2, -2)$, $B(0, 3, -3)$ et $C(1, 1, -2)$ et le plan (P) d'équation $x + y - 3 = 0$.

- **A** La distance du point $\Omega(0, 1, -1)$ au plan (P) est $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$
- **B** La sphère (S) de centre $\Omega(0, 1, -1)$ tangente au plan (P) a pour équation cartésienne : $x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 2z = 0$
- **C** Les points A, B et C sont alignés
- **D** La sphère (S) n'est pas tangente au plan (ABC)
- **E** Le point de contact de (S) et du plan (ABC) est C

FACULTÉ DE MÉDECINE ET DE PHARMACIE D'OUJDA · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès · Faculté de Médecine et de Pharmacie d'Oujda

Session 2012–2013

2012

Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10
C	B	C	D	C	D	D	A	C	E

Q1 ✔ Réponse C

$x^2+2x=x(x+2)\geq 0$: $D_f=]-\infty,-2]\cup[0,+\infty[$ (A fausse).

En $+\infty$: $\sqrt{x^2+2x}-(x+1)=\dfrac{-1}{\sqrt{x^2+2x}+x+1}\to 0$, donc $f(x)-(2x+1)\to 0$: C.

- B : en -2, $\dfrac{\sqrt{x(x+2)}}{x+2}$ tend vers $-\infty$ à gauche : pas dérivable.
- D : f est une somme de fonctions croissantes sur $[0,+\infty[$.
- E : $x+\sqrt{x^2+2x}=\dfrac{-2x}{\sqrt{x^2+2x}-x}\to -1$ en $-\infty$.

Q2 ✔ Réponse B

B : avec $h=\ln x\to 0^-$, $e^{1/h}\to 0$ beaucoup plus vite que $x-1\sim h$: $\dfrac{e^{1/x}e^{1/h}}{x-1}\sim e\,\dfrac{e^{1/h}}{h}\to 0$.

- A : $\left(\dfrac{x-1}{2x+3}\right)'=\dfrac{5}{(2x+3)^2}$ (le carré manque).
- C : $\dfrac{\sin x}{\cos x-1}=\dfrac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{-2\sin^2\frac{x}{2}}=-\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{x}{2}\right)$ (signe opposé).
- D : $x^2-2x=-1\iff x=1$.
- E : $\tan B=\dfrac{3+2}{1-6}=-1$.

Q3 ✔ Réponse C

C : $i^{2k}=(-1)^k$; la somme compte 1004 termes ($k=0$ à 1003) qui s'annulent deux à deux : elle vaut 0.

- A : $(1+i)^{2002}=(2i)^{1001}=2^{1001}i^{1001}=2^{1001}i$.
- B : le module de la fraction est $\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$, donc $|z|=2\sqrt{2}$.
- D : avec $z=x+iy$, la partie imaginaire donne $y=2$ et la partie réelle $x^2-3x+2=0$: $z=1+2i$ ou $z=2+2i$.
- E : la fraction vaut $\sqrt{2}\,e^{i\pi/12}$, donc $\arg z\equiv\dfrac{20\pi}{12}=\dfrac{5\pi}{3}$.

Q4 ✔ Réponse D

Racine double 1 : $f(x)=(ax+b)e^x$ et $f'(x)=(ax+a+b)e^x$.

$f(1)=(a+b)e=e$ donne $a+b=1$; $f'(2)=(3a+b)e^2=0$ donne $3a+b=0$. D'où $a=-\dfrac{1}{2}$, $b=\dfrac{3}{2}$: $f(x)=\dfrac{3-x}{2}e^x$.

Q5 ✔ Réponse C

Il y a $\binom{9}{3}=84$ tirages.

- $P(X)=\dfrac{2\times 3\times 4}{84}=\dfrac{2}{7}$ (A fausse).
- Cinq jetons portent le 1 et quatre le 2 :

$P(Y)=\dfrac{\binom{5}{3}+\binom{4}{3}}{84}=\dfrac{14}{84}=\dfrac{1}{6}$ (B fausse ; les valeurs de A et B sont inversées).

- $P(Z)=1-\dfrac{\binom{6}{3}}{84}=1-\dfrac{20}{84}=\dfrac{16}{21}$: C.
- $X\cap Y$: un rouge, un blanc et un noir portant tous le 1 :

$2\times 1\times 2=4$ tirages, $P=\dfrac{1}{21}$ (D et E fausses).

Q6 ✔ Réponse D

Intégration par parties (intégrales de Wallis) : $u_{n+2}=\dfrac{n+1}{n+2}u_n$: D.

- A : $u_2=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^2 x\,dx=\frac{\pi}{4}$.
- B : $0\leq\sin x\leq 1$, donc $(\sin x)^{n+1}\leq(\sin x)^n$: la suite est décroissante.
- C : $u_{n+2}\leq u_{n+1}\leq u_n$ donne $\dfrac{n+1}{n+2}\leq\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\leq 1$, donc le rapport tend vers 1.
- E : on sait que $(n+1)u_nu_{n+1}=\frac{\pi}{2}$, d'où $\sqrt{n}\,u_n\to\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Q7 ✔ Réponse D

$\dfrac{2x^2-x-2}{2x^2+3x+1}=1-\dfrac{4x+3}{(2x+1)(x+1)}=1-\dfrac{2}{2x+1}-\dfrac{1}{x+1}$.

Donc

$$I=[x-\ln(2x+1)-\ln(x+1)]_0^2=2-\ln 5-\ln 3=2-\ln 15.$$

Q8 ✔ Réponse A

Sur $[1,e]$, $f\geq 0$: $f(1)=0$, et $f'(x)=1-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2\ln x}{x}=\dfrac{x^2-1-2x\ln x}{x^2}$ où $g(x)=x^2-1-2x\ln x$ vérifie $g(1)=0$ et $g'(x)=2(x-1-\ln x)\geq 0$. Donc f croît à partir de $f(1)=0$.

Avec $\displaystyle\int_1^e(\ln x)^2\,dx=e-2$:

$$\begin{aligned}\int_1^e f(x)\,dx&=\frac{e^2-1}{2}+1-(e-2)-2(e-1)\\&=\frac{e^2-6e+9}{2}\\&=\frac{(e-3)^2}{2}.\end{aligned}$$

Q9 ✔ Réponse C

C : par récurrence $u_n>0$, donc $e^{-u_n}<1$ et $u_{n+1}<u_n$. La suite est décroissante et minorée par 0 : elle converge.

- A : avec $t=e^{2x}$, $t^2-4t+3=0$ donne $t=1$ ou $t=3$: deux solutions, 0 et $\frac{\ln 3}{2}$.
- B : $x^2-2\leq 4-x\iff(x+3)(x-2)\leq 0$, soit $S=[-3,2]$.
- D : $\dfrac{\sin x}{1-e^{-x}}\sim\dfrac{x}{x}=1$.
- E : $[-e^{\cos x}]_0^\pi=e-\dfrac{1}{e}$.

Q10 ✔ Réponse E

$d(\Omega,(P))=\dfrac{|0+1-3|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$ (A fausse) : (S) a pour équation $x^2+(y-1)^2+(z+1)^2=2$, soit $x^2+y^2+z^2-2y+2z=0$ (B a le mauvais signe devant $2z$).

$\overrightarrow{AB}(-1,1,-1)$ et $\overrightarrow{AC}(0,-1,0)$ ne sont pas colinéaires (C fausse) ; $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=(-1,0,1)$, d'où (ABC) : $x-z-3=0$.

$d(\Omega,(ABC))=\dfrac{|0+1-3|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$: le plan est tangent (D fausse).

Le point de contact est $\Omega+(1,0,-1)=(1,1,-2)=C$: E.

FACULTÉ DE MÉDECINE ET DE PHARMACIE D'OUJDA · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès · Faculté de Médecine et de Pharmacie d'Oujda

Session 2011–2012

2011 Énoncé

Q1 On considère le nombre complexe $z = 1 + \dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$. Le nombre z^{12} est égal à :

- **A** 1
- **B** $\left(2\cos\dfrac{\pi}{12}\right)^{12}$
- **C** $-\left(2\cos\dfrac{\pi}{12}\right)^{12}$
- **D** -1
- **E** -2^{12}

Q2 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = \dfrac{2}{5}u_{n+1} - \dfrac{1}{25}u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = u_{n+1} - \dfrac{1}{5}u_n$ et $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$.

- **A** (v_n) est une suite géométrique de raison 5
- **B** (v_n) est une suite arithmétique de raison 5
- **C** $v_n = 5^n$
- **D** $S_n = \dfrac{1}{4}\left(5 - \dfrac{1}{5^n}\right)$
- **E** $S_n = \dfrac{1}{4}\left(5 - \dfrac{1}{5^{n-1}}\right)$

Q3 Soit la fonction numérique définie par : $f(x) = 1 - \dfrac{1}{2}x - \dfrac{2}{e^x+1}$.

- **A** Le domaine de définition de f est $]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$
- **B** La fonction f est paire
- **C** La courbe représentant f possède une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ d'équation $y = -1 + \dfrac{1}{2}x$
- **D** La courbe représentant f possède une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ d'équation $y = 1 - \dfrac{1}{2}x$
- **E** La fonction f est croissante sur $[0;+\infty[$

Q4 On considère la fonction numérique $f(x) = \ln\left(\dfrac{x}{2-x}\right)$.

- **A** Le domaine de définition de f est $]0;2[\cup]2;+\infty[$
- **B** $f'(x) = \dfrac{2}{(2-x)^2}$
- **C** Le point $A(1,0)$ est le centre de symétrie de la courbe représentant f dans un repère orthonormé
- **D** La fonction réciproque est $f^{-1}(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$
- **E** $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$

Q5 Pour tout x réel, on considère la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{x}{x+e^{-x}}$. L'équation de la tangente à la courbe représentant f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ au point O, origine du repère, est :

- **A** $y = -x$
- **B** $y = x$
- **C** $y = 1 - x$
- **D** $y = x - 1$
- **E** $y = -2x$

Q6 La valeur de $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\ln(1+\cos x)\,\mathrm{d}x$ est :

- **A** $\dfrac{\pi}{2}$
- **B** -1
- **C** $e-1$
- **D** $\pi - 1$
- **E** $\dfrac{\pi}{2} - 1$

Q7 Une boîte contient 3 jetons blancs et 4 jetons noirs (on ne peut pas les identifier par le toucher). On tire au hasard et en même temps 3 jetons de la boîte. La probabilité que les trois jetons tirés soient de la même couleur est :

- **A** $\dfrac{1}{35}$
- **B** $\dfrac{1}{7}$
- **C** $\dfrac{1}{5}$
- **D** $\dfrac{12}{35}$
- **E** $\dfrac{31}{35}$

Q8 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}\ln\left(x^2-2x+2\right)$ est égale à :

- **A** 0
- **B** $+\infty$
- **C** $-\infty$
- **D** 2
- **E** -2

Q9 L'abscisse du point d'inflexion de la courbe représentant la fonction $f(x) = \dfrac{x}{x+1} - \ln\left(\dfrac{x+1}{2}\right)$ est :

- **A** $-\dfrac{1}{2}$
- **B** 0
- **C** $\dfrac{1}{2}$
- **D** 1
- **E** 2

Q10 La fonction f solution de l'équation différentielle $4y'' + 25y = 0$ et qui vérifie les conditions initiales $f(0) = 3$ et $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ est :

- **A** $3\left(\cos\left(\dfrac{5}{2}x\right) - \sin\left(\dfrac{5}{2}x\right)\right)$
- **B** $3\left(\cos\left(\dfrac{5}{2}x\right) + \sin\left(\dfrac{5}{2}x\right)\right)$
- **C** $3\cos\left(\dfrac{5}{2}x\right)$
- **D** $3\sin\left(\dfrac{5}{2}x\right) + 3$
- **E** $3\left(\sin\left(\dfrac{5}{2}x\right) - \cos\left(\dfrac{5}{2}x\right)\right)$

FACULTÉ DE MÉDECINE ET DE PHARMACIE D'OUJDA · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès · Faculté de Médecine et de Pharmacie d'Oujda

Session 2011–2012

2011

Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10
C	D	D	C	B	E	B	A	D	B

Q1 ✔ Réponse C

$z = 1 + e^{i\pi/6} = e^{i\pi/12}\left(e^{-i\pi/12} + e^{i\pi/12}\right) = 2\cos\dfrac{\pi}{12}\,e^{i\pi/12}$.

Donc $z^{12} = \left(2\cos\dfrac{\pi}{12}\right)^{12} e^{i\pi} = -\left(2\cos\dfrac{\pi}{12}\right)^{12}$.

Q2 ✔ Réponse D

$v_{n+1} = \dfrac{2}{5}u_{n+1} - \dfrac{1}{25}u_n - \dfrac{1}{5}u_{n+1} = \dfrac{1}{5}\left(u_{n+1} - \dfrac{1}{5}u_n\right) = \dfrac{1}{5}v_n$:

(v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{5}$, avec $v_0 = 1$, donc $v_n = \dfrac{1}{5^n}$ (A, B, C fausses).

$$S_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{5}{4}\left(1 - \frac{1}{5^{n+1}}\right) = \frac{1}{4}\left(5 - \frac{1}{5^n}\right).$$

Q3 ✔ Réponse D

f est définie sur $\mathbb{R}$ (A fausse).

$f(x) + f(-x) = 2 - \dfrac{2}{e^x+1} - \dfrac{2e^x}{e^x+1} = 0$: f est impaire (B fausse).

En $+\infty$, $\dfrac{2}{e^x+1} \to 0$: la droite $y = 1 - \dfrac{1}{2}x$ est asymptote (D).

$f'(x) = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{2e^x}{(e^x+1)^2} \le 0$, car $(e^x+1)^2 \ge 4e^x$: f est décroissante (E fausse).

Q4 ✔ Réponse C

$\dfrac{x}{2-x} > 0 \iff 0 < x < 2$ (A fausse).

$f(2-x) = \ln\dfrac{2-x}{x} = -f(x)$: $A(1,0)$ est centre de symétrie (C).

- B : $f'(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2-x} = \dfrac{2}{x(2-x)}$.
- D : $y = \ln\dfrac{x}{2-x} \iff x = \dfrac{2e^y}{1+e^y}$ (il manque le facteur 2).
- E : quand $x \to 2^-$, $\dfrac{x}{2-x} \to +\infty$, donc $f \to +\infty$.

Q5 ✔ Réponse B

$f(0) = 0$ et $f'(x) = \dfrac{(x+e^{-x}) - x(1-e^{-x})}{(x+e^{-x})^2} = \dfrac{(1+x)e^{-x}}{(x+e^{-x})^2}$, d'où $f'(0) = 1$. Tangente : $y = x$.

Q6 ✔ Réponse E

Par parties avec $u = \ln(1+\cos x)$ et $v = \sin x$: le crochet $[\sin x \ln(1+\cos x)]_0^{\pi/2}$ vaut 0, et

$$J = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x}{1+\cos x}\,dx = \int_0^{\pi/2} (1-\cos x)\,dx = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Q7 ✔ Réponse B

$P = \dfrac{\binom{3}{3} + \binom{4}{3}}{\binom{7}{3}} = \dfrac{1+4}{35} = \dfrac{1}{7}$.

Q8 ✔ Réponse A

$\ln(x^2 - 2x + 2) = 2\ln x + \ln\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right)$, et $\dfrac{\ln x}{x} \to 0$: la limite est 0.

Q9 ✔ Réponse D

Sur $]-1, +\infty[$: $f'(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2} - \dfrac{1}{x+1}$ et $f''(x) = -\dfrac{2}{(x+1)^3} + \dfrac{1}{(x+1)^2} = \dfrac{x-1}{(x+1)^3}$, qui s'annule en changeant de signe en $x = 1$.

Q10 ✔ Réponse B

$y'' + \dfrac{25}{4}y = 0$: $f(x) = a\cos\dfrac{5x}{2} + b\sin\dfrac{5x}{2}$, et $f(0) = a = 3$.

$f'(x) = \dfrac{5}{2}\left(-a\sin\dfrac{5x}{2} + b\cos\dfrac{5x}{2}\right)$; en $\frac{\pi}{2}$,

$\sin\frac{5\pi}{4} = \cos\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, donc $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \dfrac{5}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}(a-b) = 0$ et $b = 3$.

FACULTÉ DE MÉDECINE ET DE PHARMACIE D'OUJDA · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès · Faculté de Médecine et de Pharmacie d'Oujda

Session 2009–2010

2009

Énoncé

Q1 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n$ est égale à :

A 1 B $2e$ C $+\infty$ D e^2 E $\dfrac{2}{e}$

Q2 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\ln x$ est égale à :

A $+\infty$ B 1 C $\sqrt{2}$ D 0 E n'existe pas

Q3 La dérivée de $\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ est égale à :

A $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ B $\dfrac{x}{1+x^2}$ C $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ D $1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ E $1+\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

Q4 Soit f une fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=3\ln x-5x+2$. L'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1 est :

A $y=-2x-1$ B $y=2x+1$ C $y=2x-1$ D $y=-2x+1$ E $y=2x-3$

Q5 $\displaystyle\int_0^2 |1-x|\,dx$ est égale à :

A 2 B 1 C 3 D 4 E $0{,}5$

Q6 $\displaystyle\int_1^2 x\ln x\,dx$ est égale à :

A $-\dfrac{1}{2}+\ln 2$ B $\ln 2$ C $\ln 4$ D $\ln 4-\dfrac{3}{4}$ E $-1+\ln 2$

Q7 Soit une population de 1 000 000 habitants en 2009. Elle croît au taux de 5 % par an. En 2013, cette population sera :
(Indication : poser u_0 = population en 2009, u_4 = population en 2013 et exprimer u_4 en fonction de u_0.)

A 1 200 000 B 1 150 000 C 1 250 000 D 1 215 556 E 1 215 506

Q8 L'équation $(1-i)z+2i\overline{z}=7+3i$ a pour solution :

A $1-2i$ B $1+i$ C $2+i$ D $2-i$ E $1+2i$

Q9 Une urne contient trois boules rouges et cinq boules noires ; on les tire une à une. La probabilité de tirer d'abord toutes les boules rouges puis toutes les boules noires est :

A $\dfrac{15}{64}$ B $\dfrac{1}{56}$ C $\dfrac{1}{8}$ D $\dfrac{15}{56}$ E $\dfrac{3}{8}$

Q10 La somme $S=2+7+12+17+\cdots+97+102$ est égale à :

A 1092 B 1144 C 1040 D 1196 E 1300

FACULTÉ DE MÉDECINE ET DE PHARMACIE D'OUJDA · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès · Faculté de Médecine et de Pharmacie d'Oujda

Session 2009–2010

2009

Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10
D	D	C	A	B	D	E	E	B	A

Q1 ✔ Réponse D

$n \ln\left(1+\frac{2}{n}\right) \sim n \times \frac{2}{n} = 2$, donc la limite vaut e^2.

Q2 ✔ Réponse D

$\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\ln x = \frac{\ln x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} \leq \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \to 0$ (croissances comparées). La limite est 0.

Q3 ✔ Réponse C

$$\frac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Q4 ✔ Réponse A

$f(1) = -3$ et $f'(x) = \frac{3}{x} - 5$, $f'(1) = -2$. Tangente : $y = -2(x-1) - 3 = -2x - 1$.

Q5 ✔ Réponse B

L'intégrale est l'aire de deux triangles de base 1 et de hauteur 1 : $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

Q6 ✔ Réponse D

Par parties :

$$\int_1^2 x \ln x \, dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}\right]_1^2 = 2\ln 2 - 1 + \frac{1}{4} = \ln 4 - \frac{3}{4}.$$

Q7 ✔ Réponse E

$u_4 = u_0 \times 1{,}05^4 = 1\,000\,000 \times 1{,}21550625 \approx 1\,215\,506$ habitants.

Q8 ✔ Réponse E

Avec $z = x + iy$:
$(1-i)(x+iy) + 2i(x-iy) = (x+3y) + i(x+y)$.
Il faut $x + 3y = 7$ et $x + y = 3$, d'où $y = 2$, $x = 1$: $z = 1 + 2i$.

Q9 ✔ Réponse B

Il faut tirer les trois rouges en premier : $\frac{3}{8} \times \frac{2}{7} \times \frac{1}{6} = \frac{6}{336} = \frac{1}{56}$ (les noires viennent ensuite forcément). C'est aussi $\frac{1}{\binom{8}{3}}$.

Q10 ✔ Réponse A

Suite arithmétique de raison 5 : $\frac{102-2}{5} + 1 = 21$ termes, donc $S = \frac{21 \times (2+102)}{2} = 1092$.

FACULTÉ DE MÉDECINE ET DE PHARMACIE D'OUJDA · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès · Faculté de Médecine et de Pharmacie d'Oujda

Session 2008–2009

2008 Énoncé

Q1 Le domaine de définition de la fonction $f(x)=\dfrac{\ln x}{\ln\left(x^2-8\right)}$ est :

A $\left]\sqrt{8},+\infty\right[$

B $\left]0,\sqrt{8}\right[$

C $\left]\sqrt{8},+\infty\right[\setminus\{3\}$

D $\left]-\sqrt{8},\sqrt{8}\right[$

E $]0,+\infty[$

Q2 La dérivée de la fonction $f(x)=e^{\frac{1}{1+x}}-\cos x+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ est :

A $\dfrac{1}{(1+x)^2}e^{\frac{1}{1+x}}-\sin x-\dfrac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$

B $-\dfrac{1}{(1+x)^2}e^{\frac{1}{1+x}}+\sin x-\dfrac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$

C $e^{\frac{1}{1+x}}+\sin x-\dfrac{x}{2\sqrt{(1+x^2)^3}}$

D $-\dfrac{1}{(1+x)^2}e^{\frac{1}{1+x}}+\sin x-\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

E $-\dfrac{1}{(1+x)^2}e^{\frac{1}{1+x}}+\sin x+\dfrac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$

Q3 L'ensemble des solutions de l'inéquation $\sqrt{x^2-9}\geq 4$ est :

A $[5,+\infty[$

B $[-5,5]$

C $]-\infty,-3]\cup[3,+\infty[$

D $]-\infty,-5]\cup[5,+\infty[$

E $[3,+\infty[$

Q4 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)=$

A 1 B $+\infty$ C $\dfrac{1}{2}$ D 0

E n'existe pas

Q5 Une primitive de la fonction $2x\left(1+\ln\left(1+x^2\right)\right)$ est :

A $x^2\ln\left(1+x^2\right)$

B $x^2+2x\ln\left(1+x^2\right)$

C $\left(1+x^2\right)\ln\left(1+x^2\right)$

D $2x\ln\left(1+x^2\right)+1$

E $x^2\left(x+\dfrac{1}{2}\ln^2\left(1+x^2\right)\right)$

Q6 Une solution de l'équation $z\in\mathbb{C}$, $z=\dfrac{2iz-1}{z+i}$, est :

A $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ B $\dfrac{i\left(-1+\sqrt{5}\right)}{2}$

C $\dfrac{1+i\sqrt{5}}{2}$ D $\dfrac{i\left(1+\sqrt{5}\right)}{2}$

E $\dfrac{-1+i\sqrt{5}}{2}$

Q7 On considère la suite numérique définie par : $u_0=1$; $u_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(u_n+\dfrac{1}{u_n}\right)$. $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=$

A -1 B $+\infty$ C $\dfrac{1}{2}$ D 1

E n'existe pas

Q8 $I=\displaystyle\int_1^2\frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$:

A $\dfrac{\ln 2}{2}$ B $\dfrac{1}{2}$ C $\dfrac{\ln^2 2}{2}$ D $\ln^2 2$

E $2\ln^2 2$

Q9 $S_n=1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2+n^2$:

A $S_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

B $S_n=\dfrac{n(n+1)(3n-1)}{6}$

C $S_n=\dfrac{n^2(n^2+1)}{2}$

D $S_n=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

E $S_n=n^2\left(n^2+1\right)$

Q10 $\tan\left(x-\dfrac{3\pi}{2}\right)=$

A $\tan x$ B $\dfrac{1}{\tan x}$

C $\dfrac{1}{\sin x}$ D $-\dfrac{1}{\tan x}$

E $\dfrac{1}{\cos^2 x}$

FACULTÉ DE MÉDECINE ET DE PHARMACIE D'OUJDA · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès · Faculté de Médecine et de Pharmacie d'Oujda

Session 2008–2009

2008

Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10
C	B	D	C	C	D	D	C	D	D

Q1 ✔ Réponse C

Il faut $x > 0$, $x^2 - 8 > 0$ (donc $x > \sqrt{8}$) et $\ln(x^2-8) \neq 0$, c'est-à-dire $x^2 \neq 9$, soit $x \neq 3$.

Q2 ✔ Réponse B

$\left(e^{\frac{1}{1+x}}\right)' = -\dfrac{1}{(1+x)^2} e^{\frac{1}{1+x}}$, $(-\cos x)' = \sin x$ et $\left((x^2+1)^{-1/2}\right)' = -\dfrac{1}{2} \cdot 2x\,(x^2+1)^{-3/2} = -\dfrac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$.

Q3 ✔ Réponse D

Les deux membres étant positifs, l'inéquation équivaut à $x^2 - 9 \geq 16$, soit $x^2 \geq 25$: $x \leq -5$ ou $x \geq 5$.

Q4 ✔ Réponse C

$\tan x - \sin x = \tan x\,(1 - \cos x)$ avec $\tan x \sim x$ et $1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$. Le quotient tend vers $\dfrac{1}{2}$.

Q5 ✔ Réponse C

Avec $u = 1 + x^2$: $(u \ln u)' = u'(\ln u + 1) = 2x\left(1 + \ln(1+x^2)\right)$. Donc $(1+x^2)\ln(1+x^2)$ convient.

Q6 ✔ Réponse D

Pour $z \neq -i$: $z(z+i) = 2iz - 1 \iff z^2 - iz + 1 = 0$.

Discriminant $-5 = (i\sqrt{5})^2$, d'où $z = \dfrac{i(1+\sqrt{5})}{2}$ ou $z = \dfrac{i(1-\sqrt{5})}{2}$.

Seule D est solution (B est l'opposée de la seconde racine).

Q7 ✔ Réponse D

$u_1 = \dfrac{1}{2}(1+1) = 1$: la suite est constante égale à 1, donc sa limite est 1.

Q8 ✔ Réponse C

Une primitive de $\dfrac{\ln x}{x}$ est $\dfrac{(\ln x)^2}{2}$, donc $I = \dfrac{\ln^2 2}{2}$.

Q9 ✔ Réponse D

C'est la formule classique de la somme des carrés (vérification pour $n = 2$: $1 + 4 = 5 = \frac{2\times3\times5}{6}$).

Q10 ✔ Réponse D

$\tan$ est π-périodique : $\tan\left(x - \dfrac{3\pi}{2}\right) = \tan\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\sin(x+\frac{\pi}{2})}{\cos(x+\frac{\pi}{2})} = \dfrac{\cos x}{-\sin x} = -\dfrac{1}{\tan x}$.

FACULTÉ DE MÉDECINE ET DE PHARMACIE DE MARRAKECH · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès · Faculté de Médecine et de Pharmacie de Marrakech

Session de juillet 2019

2019 Énoncé

Q1 (1 pt) f_1 est la fonction définie par :

$$f_1(x) = \ln\left(2 - \sqrt{x-3}\right)$$

Le domaine de définition de f_1 est :

A $]-\infty, 7[$ B $[3, +\infty[$
C $[3, 7[$ D $[3, 7]$
E $]3, 7[$

Q2 (2 pts) (u_n) est la suite définie par : $u_0 = 0{,}01$ et $u_{n+1} = (u_n)^{2019}$ pour tout entier naturel n.
La limite de la suite (u_n) est :

A -1 B 0 C $-\infty$ D $+\infty$
E 1

Q3 (2 pts) f_2 est la fonction définie par : $f_2(x) = \dfrac{e^{x^2} - 1}{1 - \sqrt{1+x^2}}$. La limite de la fonction f_2 au point 0 est :

A 0 B $-\infty$ C -2 D 2
E -1

Q4 (1 pt) f^{-1} désigne la fonction réciproque d'une fonction numérique f dérivable sur $\mathbb{R}$.
Si $f\left(\dfrac{3}{5}\right) = \dfrac{3}{2}$ et $(f^{-1})'\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{3}{5}$, alors la valeur de $f'\left(\dfrac{3}{5}\right)$ est :

A $\dfrac{5}{3}$ B $\dfrac{3}{5}$ C $\dfrac{3}{2}$ D $\dfrac{2}{3}$ E $\dfrac{5}{2}$

Q5 (3 pts) On considère les deux intégrales : $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^5}{2+x^3}\,dx$ et $K = \displaystyle\int_0^1 \frac{2x^2}{2+x^3}\,dx$
La valeur de l'intégrale I est :

A $\dfrac{1}{3} - \sqrt[3]{\dfrac{9}{4}}$ B $\dfrac{1}{3}\left(\ln\dfrac{9}{4} - 1\right)$
C $\sqrt[3]{\dfrac{9}{4}} - 1$ D $1 - \ln\sqrt[3]{\dfrac{9}{4}}$
E $\dfrac{1}{3}\left(1 - \ln\dfrac{9}{4}\right)$

Q6 (2 pts) L'ensemble de solutions de l'équation : $e^{\frac{1}{x}}\left(e^{\frac{1}{x}} - 7\right) = -12$ est :

A $\varnothing$ B $\{\ln 3, \ln 4\}$
C $\{e^3, e^4\}$ D $\left\{\dfrac{1}{\ln 3}, \dfrac{1}{\ln 4}\right\}$
E $\{-\ln 3, -\ln 4\}$

Q7 (2 pts) On munit le plan complexe d'un repère orthonormé.
L'ensemble des points M d'affixe z tel que $\left|\dfrac{1+iz}{\bar{z}-i}\right| = 1$ est :

A une droite
B un segment
C réduit à un point
D un cercle
E un demi-cercle

Q8 (2 pts) On considère le nombre complexe $z = \sin 2\alpha + 2i\cos^2\alpha$ avec $0 \leq \alpha < \dfrac{\pi}{2}$
L'écriture trigonométrique du nombre z est :

A $[\cos\alpha, \alpha]$ B $[1, 2\alpha]$
C $[2, \alpha]$ D $[2\cos\alpha, -\alpha]$
E $\left[2\cos\alpha, \dfrac{\pi}{2} - \alpha\right]$

Q9 (2 pts) Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé on considère un triangle ABC.
L'ensemble des points M de l'espace tels que : $\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right).\left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right) = 0$ est :

A une droite B une sphère
C un plan D un cercle
E vide

Q10 (3 pts) Pour détecter une maladie qui affecte 10% d'une population, on procède à un test sanguin.
Le test sanguin est dit positif lorsqu'il confirme que la personne examinée est affectée, sinon, il est dit négatif.
Des recherches ont prouvé que la probabilité de l'erreur du test sanguin est de :
- $\dfrac{8}{100}$ pour une personne effectivement affectée ;
- $\dfrac{2}{100}$ pour une personne effectivement saine.
La probabilité que le test d'une personne de la population soit positif est :

A $\dfrac{8}{100}$ B $\dfrac{9}{100}$ C $\dfrac{10}{100}$ D $\dfrac{11}{100}$
E $\dfrac{18}{100}$

FACULTÉ DE MÉDECINE ET DE PHARMACIE DE MARRAKECH · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès · Faculté de Médecine et de Pharmacie de Marrakech

Session de juillet 2019

2019

Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10
C	B	C	A	E	D	A	E	B	D

Q1 ✔ Réponse C

Il faut $x-3\geq 0$ et $2-\sqrt{x-3}>0$, c'est-à-dire $x\geq 3$ et $x-3<4$: $D=[3,7[$.

Q2 ✔ Réponse B

$u_n=(0{,}01)^{2019^n}$ avec $0<0{,}01<1$ et $2019^n\to+\infty$: $u_n\to 0$.
(Par récurrence $0<u_n\leq 0{,}01$, et $u_{n+1}\leq 0{,}01\,u_n$.)

Q3 ✔ Réponse C

Quand $x\to 0$: $e^{x^2}-1\sim x^2$ et $1-\sqrt{1+x^2}=\dfrac{-x^2}{1+\sqrt{1+x^2}}\sim -\dfrac{x^2}{2}$. Le quotient tend vers $\dfrac{x^2}{-x^2/2}=-2$.

Q4 ✔ Réponse A

$(f^{-1})'\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{1}{f'\left(f^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)\right)}=\dfrac{1}{f'\left(\frac{3}{5}\right)}=\dfrac{3}{5}$, donc $f'\left(\dfrac{3}{5}\right)=\dfrac{5}{3}$.

Q5 ✔ Réponse E

$K=\dfrac{2}{3}\left[\ln(2+x^3)\right]_0^1=\dfrac{2}{3}\ln\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{9}{4}$.

$I+K=\displaystyle\int_0^1\frac{x^2(x^3+2)}{2+x^3}\,dx=\int_0^1 x^2\,dx=\frac{1}{3}$, donc

$I=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{9}{4}=\dfrac{1}{3}\left(1-\ln\dfrac{9}{4}\right)$.

Q6 ✔ Réponse D

Avec $t=e^{1/x}>0$: $t^2-7t+12=0\iff t=3$ ou $t=4$. Donc $\dfrac{1}{x}=\ln 3$ ou $\dfrac{1}{x}=\ln 4$, soit $x=\dfrac{1}{\ln 3}$ ou $x=\dfrac{1}{\ln 4}$.

Q7 ✔ Réponse A

$|1+iz|=|i(z-i)|=|z-i|$ et $|\bar{z}-i|=|\overline{z+i}|=|z+i|$. La condition $|z-i|=|z+i|$ (avec $z\neq -i$) définit la médiatrice des points d'affixes i et $-i$: l'axe des réels, une droite.

Q8 ✔ Réponse E

$z=2\sin\alpha\cos\alpha+2i\cos^2\alpha=2\cos\alpha\,(\sin\alpha+i\cos\alpha)=2\cos\alpha\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)$.
Comme $2\cos\alpha>0$ sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$, c'est l'écriture trigonométrique $\left[2\cos\alpha,\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right]$.

Q9 ✔ Réponse B

Avec I milieu de $[AB]$ et J milieu de $[BC]$: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$ et $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MJ}$. La condition devient $\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{MJ}=0$: c'est la sphère de diamètre $[IJ]$ ($I\neq J$ car $A\neq C$).

Q10 ✔ Réponse D

Une personne affectée a un test positif avec la probabilité $0{,}92$; une personne saine, par erreur, avec la probabilité $0{,}02$.
Probabilités totales :

$$P(+)=0{,}1\times 0{,}92+0{,}9\times 0{,}02=0{,}092+0{,}018=0{,}11=\frac{11}{100}.$$

FACULTÉ DE MÉDECINE ET DE PHARMACIE DE MARRAKECH · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès · Faculté de Médecine et de Pharmacie de Marrakech

Session du 27 juillet 2016

2016

Énoncé

Q1 (u_n) est une suite arithmétique décroissante. Son premier terme $u_0 = 2$, sa raison r tel que : $4(u_1)^2 + (u_2)^2 = 164$. La valeur de r est :

A 3 B -6 C 6 D -3 E 4

Q2 (u_n) est une suite géométrique. Son premier terme $u_1 = 5$, sa raison est $q > 0$ tel que : $u_9 = 1280$. La valeur de q est :

A $\frac{1}{3}$ B $\frac{1}{2}$ C 3 D 2 E $\frac{1}{4}$

Q3 Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n}$. Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$

A $\frac{1}{3}$ B $\frac{1}{2}$ C 2 D 3 E 1

Q4 Combien de nombre,composé de 3 chiffres, peut-on composé à partir des chiffres 6, 7, 8, 9 ?

A C_4^3 B 9 C 4^3 D 3^4 E 4×3

Q5 Un sac contient deux boules blanches et trois boules noires, qu'on ne peut pas distinguer par le touché.On tire au hasard et en même temps deux boules du sac. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules de la même couleur ?

A $\frac{1}{4}$ B $\frac{2}{5}$ C $\frac{3}{5}$ D $\frac{1}{10}$ E $\frac{3}{10}$

Q6 $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1 - \ln x}$ est égale à :

A $+\infty$ B $-\infty$ C 1 D -1 E 0

Q7 Le nombre complexe $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{16}$ est égale à :

A -1 B 1 C $\frac{1}{2}$ D 2 E -2

Q8 Le domaine de définition de la fonction $g(x) = \frac{x}{\sqrt{4 - (\ln(x))^2}}$ est :

A $]-\infty, e^2[$ B $]e^2, +\infty[$
C $]e^{-2}, e^2[$ D $]0, e^2[$
E $\mathbb{R}^+$

Q9 Dans le plan orthonormé (unité de mesure est cm)
On considère les graphes des deux fonctions f et g définies par $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = x^2$ (pour tout $x > 0$).
La surface limitée par les graphes respectifs de f et g,et les deux droites horizontales d'équations $x = 2$ et $x = 0$ est :

A $\frac{2 + 5\sqrt{2}}{-2}$ cm^2
B $\frac{1}{2}$ cm^2
C $\frac{2(5 - 2\sqrt{2})}{3}$ cm^2
D $\frac{5}{2}$ cm^2
E $\frac{2(2 - 5\sqrt{2})}{3}$ cm^2

Q10 On considère la fonction f définie par : $f(x) = \cos(e^x)$ et C le graphe de la fonction f dans le plan orthonormé. L'équation de la tangente au graphe de f au point 0 est :

A $y = \cos 1$
B $y = -\sin 1$
C $y = -(\sin 1)x + \cos 1$
D $y = -(\cos 1)x + \sin 1$
E $y = 1$

FACULTÉ DE MÉDECINE ET DE PHARMACIE DE MARRAKECH · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès · Faculté de Médecine et de Pharmacie de Marrakech

Session du 27 juillet 2016

2016

Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10
B	D	C	C	B	D	B	C	C	C

Q1 ✔ Réponse B

$u_1 = 2 + r$ et $u_2 = 2 + 2r$:
$4(2 + r)^2 + (2 + 2r)^2 = 8r^2 + 24r + 20 = 164$, soit $r^2 + 3r - 18 = 0$, d'où $r = 3$ ou $r = -6$. La suite étant décroissante, $r = -6$.

Q2 ✔ Réponse D

$u_9 = u_1 q^8 = 5q^8 = 1280$, donc $q^8 = 256 = 2^8$ et, avec $q > 0$, $q = 2$.

Q3 ✔ Réponse C

$$S_n = \frac{1 - (1/2)^{n+1}}{1 - 1/2} = 2\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) \to 2.$$

Q4 ✔ Réponse C

Chacun des trois chiffres (centaines, dizaines, unités) peut être choisi parmi les 4 chiffres proposés, avec répétition possible : $4 \times 4 \times 4 = 4^3 = 64$ nombres.
(Sans répétition, on trouverait $4 \times 3 \times 2 = 24$, qui n'est pas proposé.)

Q5 ✔ Réponse B

$\binom{5}{2} = 10$ tirages ; deux blanches : 1, deux noires : $\binom{3}{2} = 3$.
$p = \dfrac{1 + 3}{10} = \dfrac{2}{5}$.

Q6 ✔ Réponse D

Avec $t = \ln x \to -\infty$: $\dfrac{t}{1 - t} = \dfrac{1}{\frac{1}{t} - 1} \to -1$.

Q7 ✔ Réponse B

$\dfrac{1 - i}{1 + i} = \dfrac{(1 - i)^2}{2} = -i$, et $(-i)^{16} = \big((-i)^4\big)^4 = 1$.

Q8 ✔ Réponse C

Il faut $x > 0$ et $4 - (\ln x)^2 > 0$, c'est-à-dire $-2 < \ln x < 2$, soit $e^{-2} < x < e^2$.

Q9 ✔ Réponse C

Les courbes se coupent en $x = 1$: $\sqrt{x} \geq x^2$ sur $[0, 1]$ et $x^2 \geq \sqrt{x}$ sur $[1, 2]$. L'aire vaut

$$\int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\,dx + \int_1^2 (x^2 - \sqrt{x})\,dx = \frac{1}{3} + \left(\frac{7}{3} - \frac{4\sqrt{2} - 2}{3}\right)$$
$$= \frac{10 - 4\sqrt{2}}{3}$$
$$= \frac{2(5 - 2\sqrt{2})}{3} \text{ cm}^2.$$

Q10 ✔ Réponse C

$f(0) = \cos 1$ et $f'(x) = -e^x \sin(e^x)$, donc $f'(0) = -\sin 1$.
Tangente : $y = -(\sin 1)x + \cos 1$.

FACULTÉ DE MÉDECINE ET DE PHARMACIE DE MARRAKECH · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès · Faculté de Médecine et de Pharmacie de Marrakech

Session 2015–2016

2015

Énoncé

Q1 Soient m une constante de $\mathbb{R}$ et h la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $h(x) = x^m - (\ln x)^2$.

- **A** Si $m > 0$ $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$
- **B** Si $m < 0$ $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = 0$
- **C** Si $m < 0$ $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = -\infty$
- **D** Si $m \leq 0$ $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$
- **E** Si $m > 0$ $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$

Q2 Soit U_n la suite définie par $U_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2}$; $n \in \mathbb{N}$ et $n \neq 0$.
La suite $(U_n)_{n\geq 1}$ est

- **A** Monotone.
- **B** Convergente.
- **C** Négative.
- **D** Décroissante et minorée.
- **E** Croissante et Majorée.

Q3 Une seule des affirmations suivantes est exacte :

- **A** La partie réelle de $(1-i)^5$ est $\sqrt{2}$.
- **B** La partie imaginaire de $(1+i)^{20}$ est 42.
- **C** $(1+i)^{20}$ est réel.
- **D** L'équation $z^4 - 1 = 0$ possède une et une seule solution dans $\mathbb{C}$.
- **E** L'équation $z^4 - 1 = 0$ possède trois solutions distinctes dans $\mathbb{R}$.

Q4 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{, si } x < 0 \\ \cos x & \text{, si } x \geq 0 \end{cases}$

- **A** L'équation $f(x) = 0$ possède trois solutions dans l'intervalle $]-\infty; 2\pi]$.
- **B** f n'est pas continue en 0.
- **C** f est dérivable en 0.
- **D** L'équation $f(x) = 0$ possède deux solutions dans l'intervalle $]-\infty; \pi]$.
- **E** L'équation $f(x) = 0$ possède une et une seule solution dans l'intervalle $]-\infty; \pi]$.

Q5 Une seule des affirmations suivantes est exacte :

- **A** $\displaystyle\int_2^e \frac{1}{x\ln x}\,dx = -2.$
- **B** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx = -\frac{1}{2}\ln 2.$
- **C** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx = \ln 2.$
- **D** $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx = 4 + 2\sqrt{e}.$
- **E** $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx = 4 - 2\sqrt{e}.$

Q6 Soient f et g les fonctions définies respectivement sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

et

$$g(x) = \int_x^{x+1} f(t)\,dt.$$

- **A** L'image de $\mathbb{R}$ par f est $]0; 1]$.
- **B** L'image de $\mathbb{R}$ par f est $]0; +\infty]$.
- **C** La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = f(x) - f(x+1)$.
- **D** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) < 0$.
- **E** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq g(x) < \dfrac{1}{2}$.

Q7 Soient n et p deux entiers naturels strictement positifs.

- **A** Si $n^2 + np + p^2$ est pair, alors n est impair et p est pair.
- **B** Si $n^2 + np + p^2$ est pair, alors n est pair et p est impair.
- **C** Si $n^2 + np + p^2$ est pair, alors np est impair.
- **D** Si $n^2 + np + p^2$ est pair, alors n et p sont pairs.
- **E** Si $n^2 + np + p^2$ est pair, alors n et p sont impairs.

Q8 Une seule des affirmations suivantes est exacte :

- **A** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{2\,dx}{\cos^2(x)} = 1 - \sqrt{2}.$
- **B** $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}} \frac{2\,dx}{\cos^2(x)} = 2(1 - \sqrt{2}).$
- **C** $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\,dx}{\cos^2(x)} = 4(\sqrt{2} - 1).$
- **D** $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\,dx}{\cos^2(x)} = 4.$
- **E** $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}} \frac{2\,dx}{\cos^2(x)} = 4(1 - \sqrt{2}).$

Q9 Soient (u_n) et (v_n) deux suites définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par $u_n = \dfrac{e^n}{n^n}$ et $v_n = \ln(u_n)$.

- **A** la suite (v_n) et la suite (u_n) ont la même limite.
- **B** la suite (v_n) est strictement croissante.
- **C** la suite (u_n) est strictement croissante.
- **D** La suite (u_n) est bornée.
- **E** la suite (u_n) admet une limite et cette limite est non nulle.

Q10 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et pour $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + n - 2$.
On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = -2u_n + 3n - \dfrac{21}{2}$.

- **A** Pour tout entier naturel $n \geq 5$, $u_n \leq n - 3$.
- **B** Pour tout entier naturel $n \geq 5$, $u_n \geq n - 3$.
- **C** La limite de la suite (u_n) est finie.
- **D** La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$ et de premier terme $\dfrac{25}{2}$.
- **E** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{25}{4}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n + \dfrac{3}{2}n + \dfrac{21}{4}$.

FACULTÉ DE MÉDECINE ET DE PHARMACIE DE MARRAKECH · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès · Faculté de Médecine et de Pharmacie de Marrakech

Session 2015–2016

2015

Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10
E	B	C	E	E	A	D	D	D	B

Q1 ✔ Réponse **E**

- $m > 0$, $x \to +\infty$: $h(x) = x^m\left(1 - \dfrac{(\ln x)^2}{x^m}\right)$ et $\dfrac{(\ln x)^2}{x^m} \to 0$, donc $h \to +\infty$: E (A fausse).
- $m < 0$, $x \to 0^+$: avec $t = -\ln x \to +\infty$, $h = e^{|m|t} - t^2 \to +\infty$: B et C fausses.
- $m \leq 0$, $x \to +\infty$: x^m reste borné et $-(\ln x)^2 \to -\infty$: D fausse.

Q2 ✔ Réponse **B**

$|U_n| = \dfrac{1}{n^2} \to 0$: la suite converge vers 0. Ses termes changent de signe ($U_1 = -1$, $U_2 = \frac{1}{4}$, $U_3 = -\frac{1}{9}$) : elle n'est ni monotone ni négative.

Q3 ✔ Réponse **C**

$(1+i)^2 = 2i$, donc $(1+i)^{20} = (2i)^{10} = 2^{10}i^{10} = -1024$: réel (C), de partie imaginaire 0 (B fausse).
- A : $(1-i)^5 = (1-i)(-2i)^2 = -4(1-i) = -4+4i$, de partie réelle -4.
- D et E : $z^4 = 1$ a quatre solutions dans $\mathbb{C}$ (± 1, $\pm i$), dont deux réelles.

Q4 ✔ Réponse **E**

Pour $x < 0$, $e^x > 0$; pour $x \geq 0$, $\cos x = 0$ en $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}\ldots$ Sur $]-\infty;\pi]$ la seule solution est $\frac{\pi}{2}$ (E, D fausse) ; sur $]-\infty;2\pi]$ il y en a deux (A fausse).
f est continue en 0 ($e^0 = \cos 0 = 1$), mais ses dérivées à gauche (1) et à droite ($-\sin 0 = 0$) diffèrent : B et C fausses.

Q5 ✔ Réponse **E**

Par parties avec $u = \ln x$ et $v = 2\sqrt{x}$:

$$\begin{aligned}\int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx &= \left[2\sqrt{x}\ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{2}{\sqrt{x}}\,dx \\ &= 2\sqrt{e} - \left(4\sqrt{e} - 4\right) \\ &= 4 - 2\sqrt{e}.\end{aligned}$$

- A : $\displaystyle\int_2^e \frac{dx}{x\ln x} = \left[\ln(\ln x)\right]_2^e = -\ln(\ln 2) \approx 0{,}37$.
- B et C : $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan x\,dx = \left[-\ln\cos x\right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{2}\ln 2$.

Q6 ✔ Réponse **A**

$1 + x^2$ prend toutes les valeurs de $[1, +\infty[$, donc f prend toutes les valeurs de $]0;1]$: A.
- C : $g(x) = F(x+1) - F(x)$ avec $F' = f$, donc $g'(x) = f(x+1) - f(x)$ (signe inversé).
- D : $f > 0$, donc $g > 0$.
- E : $g\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\arctan\frac{1}{2} \approx 0{,}93 > \frac{1}{2}$.

Q7 ✔ Réponse **D**

On raisonne sur les parités :
- n et p impairs : impair + impair + impair = impair ;
- l'un pair, l'autre impair : un seul des trois termes est impair, la somme est impaire ;
- n et p pairs : la somme est paire.

Donc la somme n'est paire que si n et p sont pairs.

Q8 ✔ Réponse **D**

Une primitive de $\dfrac{2}{\cos^2 x}$ est $2\tan x$, et $\tan\dfrac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$.
- D : $2\left(\tan\frac{\pi}{4} - \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = 4$: **vraie** (et C fausse).
- A : $2(\sqrt{2}-1) > 0$, alors que $1 - \sqrt{2} < 0$.
- B et E : l'intégrale vaut $4(\sqrt{2}-1) > 0$.

Q9 ✔ Réponse **D**

$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{e}{n+1}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n \leq \dfrac{e}{2} \times \dfrac{1}{2} < 1$: (u_n) est strictement décroissante (C fausse), positive et majorée par $u_1 = e$: elle est bornée (D).
$u_n = \left(\dfrac{e}{n}\right)^n \to 0$ (E fausse), tandis que $v_n = n(1 - \ln n) \to -\infty$ (A fausse) ; $(v_n) = (\ln u_n)$ est strictement décroissante (B fausse).

Q10 ✔ Réponse **B**

$v_{n+1} = -\dfrac{2}{3}u_n - 2n + 4 + 3n + 3 - \dfrac{21}{2} = -\dfrac{2}{3}u_n + n - \dfrac{7}{2} = \dfrac{1}{3}v_n$: (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{3}$, mais de premier terme $v_0 = -2 - \frac{21}{2} = -\dfrac{25}{2}$ (D fausse).
Donc $u_n = \dfrac{3n - \frac{21}{2} - v_n}{2} = \dfrac{25}{4}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n + \dfrac{3}{2}n - \dfrac{21}{4}$ (E a le mauvais signe), et $u_n \to +\infty$ (C fausse).
$u_n - (n-3) = \dfrac{25}{4}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n + \dfrac{n}{2} - \dfrac{9}{4} > 0$ dès que $n \geq 5$: B (A fausse).

FACULTÉ DE MÉDECINE ET DE PHARMACIE DE MARRAKECH · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès · Faculté de Médecine et de Pharmacie de Marrakech

Session du 3 août 2011

2011 Énoncé

Q1 Le domaine de définition de la fonction $f(x)=\sqrt{\ln(x^2+3x-4)}$ est :

A $\left]-\infty,\dfrac{-3-\sqrt{29}}{2}\right]$

B $\left]\dfrac{-3-\sqrt{29}}{2},\dfrac{-3+\sqrt{29}}{2}\right[$

C $\left]-\infty,\dfrac{-3-\sqrt{29}}{2}\right]\cup\left[\dfrac{-3+\sqrt{29}}{2},+\infty\right[$

D $\left]-\infty,\dfrac{-3-\sqrt{29}}{2}\right[\cup\left]\dfrac{-3+\sqrt{29}}{2},+\infty\right[$

E $\left]\dfrac{-3+\sqrt{29}}{2},+\infty\right[$

Q2 La valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n-\sqrt{n^2+1}}{n+\sqrt{n^2-1}}$ est :

A 1 B 0 C $-\infty$ D $+\infty$ E n'existe pas

Q3 On considère la fonction g définie par : $g(x)=\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$ pour $x\neq 0$ et $g(0)=\mu$.
La valeur de μ pour que g soit continue en 0 est :

A 0 B $-\dfrac{1}{2}$ C $\dfrac{1}{4}$ D $\dfrac{1}{2}$ E $-\dfrac{1}{4}$

Q4 Soit $z=x+iy$ un nombre complexe. Le nombre z^2+2z-3 est réel si et seulement si

A $x=1$ et $y=0$
B $x=1$ ou $y=-1$
C $x=-1$ et $y=0$
D $y=0$ ou $x=-1$
E $y=0$ et $x=1$

Q5 Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite arithmétique. Si $u_3+u_4+\cdots+u_{10}=672$ et $u_7=81$ alors $u_3=$

A 103 B 213 C 123 D 105 E 107

Q6 La somme $S=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}-\cdots+\dfrac{1}{512}$ est égal à :

A $\dfrac{172}{521}$ B $\dfrac{171}{512}$ C $\dfrac{571}{723}$ D $\dfrac{571}{732}$ E $\dfrac{513}{824}$

Q7 La valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{+1}\frac{1}{x^2-4}\,dx$ est :

A $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ B $\dfrac{\ln 5}{2}$ C $\dfrac{\ln 3}{2}$ D $-\dfrac{\ln 3}{2}$ E $-\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

Q8 La primitive de la fonction $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^3}$ qui vaut 0 au point 1 est :

A $\dfrac{\ln x}{x^2}-\dfrac{1}{3x^2}+\dfrac{1}{3}$
B $\dfrac{\ln x}{2x^2}-\dfrac{1}{4x^2}+\dfrac{1}{4}$
C $\dfrac{\ln x}{4x^2}+\dfrac{1}{2x^2}-\dfrac{1}{2}$
D $-\dfrac{\ln x}{2x^2}-\dfrac{1}{4x^2}+\dfrac{1}{4}$
E $-\dfrac{\ln x}{2x^2}+\dfrac{1}{4x^2}-\dfrac{1}{4}$

Q9 La courbe représentative de la fonction $f(x)=\cos(e^x)$ admet une tangente au point d'abscisse 0 dont l'équation est :

A $y=\cos 1$
B $y=-\sin 1$
C $y=-(\sin 1)x+\cos 1$
D $y=-(\cos 1)x+\sin 1$
E $y=1$

Q10 Un argument du nombre complexe $z=\dfrac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}$ est :

A $-\dfrac{5\pi}{12}$ B $\dfrac{7\pi}{12}$ C $\dfrac{5\pi}{12}$ D $-\dfrac{7\pi}{12}$ E $\dfrac{3\pi}{4}$

FACULTÉ DE MÉDECINE ET DE PHARMACIE DE MARRAKECH · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès · Faculté de Médecine et de Pharmacie de Marrakech

Session du 3 août 2011

2011

Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10
C	B	D	D	D	B	D	D	C	C

Q1 ✔ Réponse C

Il faut $\ln(x^2+3x-4) \geq 0$, c'est-à-dire $x^2+3x-4 \geq 1$, soit $x^2+3x-5 \geq 0$ (cette condition assure aussi que le logarithme est défini). Les racines sont $\dfrac{-3 \pm \sqrt{29}}{2}$, d'où C (bornes comprises).

Q2 ✔ Réponse B

$n - \sqrt{n^2+1} = \dfrac{-1}{n+\sqrt{n^2+1}} \to 0$ et le dénominateur tend vers $+\infty$: la limite est 0.

Q3 ✔ Réponse D

$\tan x - \sin x = \tan x(1-\cos x)$ avec $\tan x \sim x$ et $1-\cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$: $g(x) \to \dfrac{1}{2}$. Il faut $\mu = \dfrac{1}{2}$.

Q4 ✔ Réponse D

$z^2+2z-3 = (x^2-y^2+2x-3)+i(2xy+2y)$. Sa partie imaginaire $2y(x+1)$ est nulle si et seulement si $y=0$ ou $x=-1$.

Q5 ✔ Réponse D

La somme compte 8 termes : $\dfrac{8(u_3+u_{10})}{2} = 672$, donc $u_3+u_{10} = 2u_3+7r = 168$. Avec $u_7 = u_3+4r = 81$: $2(81-4r)+7r = 168$, d'où $r=-6$ et $u_3 = 81+24 = 105$.

Q6 ✔ Réponse B

Somme géométrique de 9 termes ($\frac{1}{512} = \frac{1}{2^9}$), de premier terme $\frac{1}{2}$ et de raison $-\frac{1}{2}$:

$$S = \frac{1}{2}\cdot\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^9}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{512}\right) = \frac{513}{1536} = \frac{171}{512}.$$

Q7 ✔ Réponse D

$\dfrac{1}{x^2-4} = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x+2}\right)$, donc

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2-4} = \frac{1}{4}\left[\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{4}\left(\ln\frac{1}{3} - \ln 3\right) = -\frac{\ln 3}{2}.$$

(Le résultat est négatif, ce qui est cohérent : $x^2-4<0$ sur $[-1,1]$.)

Q8 ✔ Réponse D

Par parties ($u=\ln x$, $v=-\frac{1}{2x^2}$) :

$$\int \frac{\ln x}{x^3}\,dx = -\frac{\ln x}{2x^2} + \int \frac{dx}{2x^3} = -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + c.$$

En 1 : $-\dfrac{1}{4}+c=0$, donc $c=\dfrac{1}{4}$: D.

Q9 ✔ Réponse C

$f(0) = \cos 1$ et $f'(x) = -e^x\sin(e^x)$, donc $f'(0) = -\sin 1$.
Tangente : $y = -(\sin 1)x + \cos 1$.

Q10 ✔ Réponse C

$\sqrt{3}+i = 2e^{i\pi/6}$ et $\sqrt{2}-i\sqrt{2} = 2e^{-i\pi/4}$, donc $z = e^{i(\pi/6+\pi/4)} = e^{5i\pi/12}$.

FACULTÉ DE MÉDECINE ET DE PHARMACIE DE MARRAKECH · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès · Faculté de Médecine et de Pharmacie de Marrakech

Session de juillet 2008

2008

Énoncé

Q1 Le module du nombre complexe $z = 1 + i(3 + 5i)$ est :

A $\sqrt{45}$ B 7 C $\sqrt{5}$ D 4 E 5

Q2 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique telles que : $u_4 = 0$ et $u_6 = -1$.
Alors la valeur du terme u_1 est :

A $\dfrac{-3}{2}$ B 0 C $\dfrac{2}{3}$ D 1 E $\dfrac{3}{2}$

Q3 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $q = \dfrac{1}{4}$.
Alors la raison r de la suite arithmétique (v_n) définie par $v_n = \ln(u_n)$ est :

A $\dfrac{1}{\ln(4)}$ B $\ln(4)$ C $2\ln(4)$ D $-2\ln(2)$ E $\dfrac{-1}{\ln(4)}$

Q4 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = a + \dfrac{1 - \sqrt{1 + \sin(x)}}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(x) = 0$ pour $x = 0$
La valeur de a pour que la fonction f soit continue au point zéro est :

A $\dfrac{-1}{2}$ B 0 C $\dfrac{1}{2}$ D 2 E -1

Q5 Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par :

$$w_0 = 3 \text{ et } w_{n+1} = \sqrt{\frac{2}{3}w_n^2 + 2}$$

Alors la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers :

A $\sqrt{2}$ B $\sqrt{6}$ C 0 D $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ E -1

Q6 Soit g la fonction définie sur $\left[\dfrac{-1}{2}, +\infty\right[$ par :

$$g(x) = \frac{\sqrt{1+2x} - 1}{x} \text{ si } x \neq 0$$
$$g(x) = 1 \text{ pour } x = 0$$

Alors $g'(0)$ est :

A $\dfrac{-1}{2}$ B 1 C $\dfrac{1}{2}$ D $\sqrt{2}$ E n'est pas dérivable au point 0

Q7 La primitive de la fonction $h(x) = \dfrac{4}{4 - x^2}$ $(-2 < x < 2)$ qui prend la valeur zéro au point zéro est :

A $\ln\left(\dfrac{2+x}{2-x}\right)$ B $\ln\left(\dfrac{2-x}{2+x}\right)$ C $2\arctan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ D $\ln\left(\dfrac{4-x^2}{4}\right)$ E $\ln\left(\dfrac{4}{4-x^2}\right)$

Q8 L'ensemble les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $e^{2x} - 2e^x - 3 = 0$ est :

A $\{0, \ln(3)\}$
B $\{\ln(3)\}$
C $\{-\ln(3), \ln(3)\}$
D $\varnothing$
E $\left\{\dfrac{1}{\ln(3)}\right\}$

Q9 Dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité de mesure est le cm) les courbes (C_1) et (C_2) représentent les fonctions f et g définies sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et $g(x) = \dfrac{1}{2x}$.
Alors l'aire de la partie limitée par (C_1) et (C_2), les droites d'équations $x = \dfrac{1}{3}$ et $x = \dfrac{4}{3}$ est :

A $\ln(3)$ cm^2 B $\dfrac{4}{3}$ cm^2 C $\ln(2)$ cm^2 D $\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$ cm^2 E $2\ln(2)$ cm^2

Q10 La courbe représentative de la fonction g définie par $g(x) = 2x - \sqrt{1 + x^2}$ admet, au voisinage de $+\infty$, une asymptote d'équation :

A $y = 2x + 1$ B $y = 1$ C $y = x - 1$ D $y = x$ E $y = 2x - 1$

Q11 Soit h une fonction définie sur l'ensemble des réels, dont la courbe représentative dans un repère orthonormé, est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \dfrac{3}{2}$.
Alors h vérifie :

A $h(-x) = h(x)$
B $h(x) = h\left(\dfrac{3}{2} - x\right)$
C $h\left(\dfrac{3}{2} - x\right) = h\left(x - \dfrac{3}{2}\right)$
D $h\left(\dfrac{3}{2} + x\right) = h\left(-x - \dfrac{3}{2}\right)$
E $h(x) = h(3 - x)$

Q12 On lance un dé à 6 faces déséquilibré.
Les probabilités p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6 d'obtenir les numéros 1, 2, 3, 4, 5, 6 sont, dans cet ordre, les termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison $r = \dfrac{-1}{45}$.
Alors la valeur du premier terme p_1 est :

A 0 B $\dfrac{-2}{9}$ C $\dfrac{1}{3}$ D $\dfrac{1}{6}$ E $\dfrac{2}{9}$

FACULTÉ DE MÉDECINE ET DE PHARMACIE DE MARRAKECH · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès · Faculté de Médecine et de Pharmacie de Marrakech

Session de juillet 2008

2008 — Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12
E	E	D	C	B	A	A	B	C	D	E	E

Q1 ✔ Réponse E

$z = 1 + 3i - 5 = -4 + 3i$, donc $|z| = \sqrt{16 + 9} = 5$.

Q2 ✔ Réponse E

$u_6 - u_4 = 2r = -1$, donc $r = -\dfrac{1}{2}$ et $u_1 = u_4 - 3r = 0 + \dfrac{3}{2} = \dfrac{3}{2}$.

Q3 ✔ Réponse D

$v_{n+1} - v_n = \ln \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ln \dfrac{1}{4} = -\ln 4 = -2 \ln 2$.

Q4 ✔ Réponse C

$\dfrac{1 - \sqrt{1 + \sin x}}{x} = \dfrac{-\sin x}{x\left(1 + \sqrt{1 + \sin x}\right)} \to -\dfrac{1}{2}$. La continuité en 0 exige $a - \dfrac{1}{2} = 0$, soit $a = \dfrac{1}{2}$.

Q5 ✔ Réponse B

Avec $t_n = w_n^2$: $t_{n+1} = \dfrac{2}{3} t_n + 2$, donc $t_{n+1} - 6 = \dfrac{2}{3}(t_n - 6)$ et $t_n = 6 + 3\left(\dfrac{2}{3}\right)^n \to 6$. Comme $w_n > 0$, $w_n \to \sqrt{6}$.

Q6 ✔ Réponse A

Pour $x \neq 0$: $g(x) = \dfrac{2}{\sqrt{1 + 2x} + 1}$, formule qui donne aussi $g(0) = 1$. Donc $g'(x) = -\dfrac{2}{\left(\sqrt{1 + 2x} + 1\right)^2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1 + 2x}}$ et $g'(0) = -\dfrac{2}{4} = -\dfrac{1}{2}$.

Q7 ✔ Réponse A

$\dfrac{4}{4 - x^2} = \dfrac{1}{2 - x} + \dfrac{1}{2 + x}$, dont une primitive sur $]-2, 2[$ est $-\ln(2 - x) + \ln(2 + x) = \ln \dfrac{2 + x}{2 - x}$, qui vaut bien 0 en 0.

Q8 ✔ Réponse B

Avec $t = e^x > 0$: $t^2 - 2t - 3 = (t - 3)(t + 1) = 0$. Seul $t = 3$ convient, donc $x = \ln 3$.

Q9 ✔ Réponse C

Sur $]0, +\infty[$, $f - g = \dfrac{1}{2x} > 0$. L'aire vaut $\displaystyle\int_{1/3}^{4/3} \frac{dx}{2x} = \frac{1}{2} \ln \frac{4/3}{1/3} = \frac{1}{2} \ln 4 = \ln 2$ cm^2.

Q10 ✔ Réponse D

$g(x) - x = x - \sqrt{1 + x^2} = \dfrac{-1}{x + \sqrt{1 + x^2}} \to 0$ en $+\infty$: la droite $y = x$ est asymptote.

Q11 ✔ Réponse E

La symétrie par rapport à la droite $x = a$ envoie le point d'abscisse x sur celui d'abscisse $2a - x$: la condition est $h(2a - x) = h(x)$, ici $h(3 - x) = h(x)$. (C et D traduisent une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.)

Q12 ✔ Réponse E

$p_1 + \cdots + p_6 = 6p_1 + 15r = 1$, soit $6p_1 - \dfrac{1}{3} = 1$ et $p_1 = \dfrac{4/3}{6} = \dfrac{2}{9}$. (Vérification : $p_6 = \frac{2}{9} - \frac{5}{45} = \frac{1}{9} > 0$.)

FACULTÉ DE MÉDECINE ET DE PHARMACIE DE TANGER · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès · Faculté de Médecine et de Pharmacie de Tanger

Session 2019–2020

2019 Énoncé

Q1 Soit f une fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ avec $(a \neq 0)$
(C_1) est sa courbe représentative dans un repère orthonormé,

- A f admet une fonction réciproque définie sur $\mathbb{R}$
- B (C_1) admet un axe de symétrie.
- C (C_1) coupe l'axe des abscisses en trois points différents
- D f admet une valeur maximale
- E L'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution réelle

Q2 Autour des nombres et leurs ensembles

- A $0^0 = 1$
- B $e^{i\pi}$ est un nombre entier relatif
- C Pour tout réel x strictement positif, $\sqrt{x}$ est un nombre irrationnel.
- D $\left]\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right[\cap \mathbb{Q} = \varnothing$
- E π^2 est un nombre rationnel.

Q3 Dans une urne, on dispose de 12 boules indiscernables au taucher, 8 d'entre elles portent chacune le numéro 1 et les 4 autres boules portent chacune le numéro 2.
On tire au hasard et simultanément deux boules de cette urne.
On note X la variable aléatoire qui associe à chaque tirage le plus petit des numéros des boules tirées.

- A $\text{Card}(\Omega) = 132$
- B $E[X] = \frac{12}{11}$
- C $P[X = 1] = \frac{2}{3}$
- D $[X \geq 2]$ est un évènement impossible
- E $[X = 1]$ et $[X = 2]$ sont indépendants

Q4 On considère la fonction g définie par $g(x) = \frac{e^x}{e^{2x} - 1}$
(C_2) est sa courbe représentative dans un repère orthonormé,

- A g est définie sur $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$
- B g est une fonction impaire
- C $\ln \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$ est l'expression d'une primitive de g
- D g est strictement positive sur son ensemble de définition
- E (C_2) admet une asymptote parallèle à l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$

Q5 La somme $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \cdots + \frac{1}{4096}$ est égale :

- A $\frac{2731}{8192}$
- B $2\left(1 - \frac{1}{2^{13}}\right)$
- C $2\left(1 + \frac{1}{2^{13}}\right)$
- D $\frac{2731}{4096}$
- E Autre valeur

Q6 Dans le plan complexe, l'ensemble $E = \{M(z)/z \in \mathbb{C}\ |z - 3| = |z + i|$ et $|z - i| = 2\}$ est :

- A Un segment
- B $E = \varnothing$
- C Un demi-cercle
- D Une demi-droite
- E Autre

Q7 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, M' est le symétrique du point $M\left(4; \frac{11}{2}; \frac{-1}{2}\right)$ par rapport au plan (P) d'équation : $2x + 3y - z = 4$.
Les coordonnées du point M' sont :

- A $\left(-2; \frac{-7}{2}; \frac{5}{2}\right)$
- B $\left(-8; \frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)$
- C $(2; 1; 3)$
- D $\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; \frac{11}{2}\right)$
- E Autre

Q8

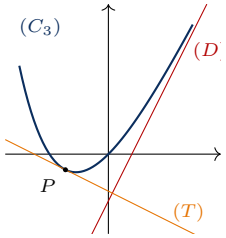
$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos(4x)}{\cos(2x) - \sin(2x)}\, dx =$$

- A $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{4}$
- B $\frac{\sqrt{3}}{4}$
- C $\frac{\sqrt{3} + 1}{2}$
- D $\frac{\sqrt{3} - 1}{4}$
- E Autre valeur

Q9 La valeur moyenne de la fonction u définie par : $u(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{2x + 1}}$ sur l'intervalle $\left[0; \frac{7}{2}\right]$ est égale :

- A $\sqrt[3]{\frac{9}{4}}$
- B $\frac{9}{14}$
- C $\frac{\sqrt[3]{9}}{4}$
- D $\frac{9}{4}$
- E Autre valeur

Q10 Sur la figure ci-contre, (C_3) est la courbe représentative dans un repère orthonormé de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :
$h(x) = e^{-x} + 2x - 1$



La droite (D) est son asymptote oblique au voisinage de $+\infty$.
(T) est la droite tangente à (C_3) en un point P
Si on sait que les droites (T) et (D) sont perpendiculaires, alors l'ordonné y_P du point P est :

- A $y_P = \frac{3}{2} + 2\ln\left(\frac{5}{2}\right)$
- B $y_P = \ln(4) - \ln(25)$
- C $y_P = \frac{-2}{5}$
- D $y_P = \frac{3}{2} + 2\ln\left(\frac{2}{5}\right)$
- E Autre valeur

FACULTÉ DE MÉDECINE ET DE PHARMACIE DE TANGER · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès · Faculté de Médecine et de Pharmacie de Tanger

Session 2019–2020

2019 — Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10
E	B	B	B	D	E	A	D	B	D

Q1 ✔ Réponse E

f est continue et ses limites en $-\infty$ et $+\infty$ sont infinies de signes contraires (car $a \neq 0$) : par le théorème des valeurs intermédiaires, f s'annule au moins une fois (E).
Les autres dépendent des coefficients ou sont fausses : $f(x) = x^3 - x$ n'est pas injective (A fausse en général) ; x^3 ne coupe l'axe qu'en un point (C) ; f n'est pas majorée (D) ; la courbe d'un polynôme de degré 3 a un centre de symétrie, pas un axe (B).

Q2 ✔ Réponse B

$e^{i\pi} = -1 \in \mathbb{Z}$: B est vraie.
- C : $\sqrt{4} = 2$ est rationnel.
- D : $\frac{2}{5} \in \left]\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right[\cap \mathbb{Q}$.
- E : π^2 est irrationnel.
- A : 0^0 n'est pas défini dans le cadre du programme (c'est une forme indéterminée) ; certaines conventions posent toutefois $0^0 = 1$.

Remarque : B est vraie. A (0^0 = 1) dépend de la convention : indéfini dans le programme du lycée, mais posé égal à 1 dans beaucoup de contextes (combinatoire, polynômes). À trancher par le professeur (garder B ou retirer la question).

Q3 ✔ Réponse B

$\text{Card}(\Omega) = \binom{12}{2} = 66$ (A fausse). $X = 2$ si les deux boules portent le 2 : $P[X=2] = \dfrac{\binom{4}{2}}{66} = \dfrac{1}{11}$ (D fausse), et $P[X=1] = \dfrac{10}{11}$ (C fausse).
$E[X] = 1 \times \dfrac{10}{11} + 2 \times \dfrac{1}{11} = \dfrac{12}{11}$: B. Enfin $[X=1]$ et $[X=2]$ sont incompatibles et de probabilités non nulles, donc pas indépendants.

Q4 ✔ Réponse B

g est définie sur $\mathbb{R}^*$ (A fausse).
$g(-x) = \dfrac{e^{-x}}{e^{-2x}-1} = \dfrac{e^x}{1-e^{2x}} = -g(x)$: g est impaire (B), donc négative pour $x < 0$ (D fausse).
C : la dérivée de $\ln\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$ vaut $\dfrac{e^x}{e^x+1} - \dfrac{e^x}{e^x-1} = -2g(x)$, pas $g(x)$.
Remarque : $g(x) \to 0$ en $+\infty$, donc (C_2) admet l'asymptote $y = 0$, c'est-à-dire l'axe des abscisses lui-même ; E est vraie elle aussi si l'on considère qu'une droite confondue avec l'axe lui est parallèle.

Remarque : B (g impaire) est vraie, mais E l'est aussi : l'asymptote en $+\infty$ est y = 0, confondue avec l'axe des abscisses, donc parallèle à lui au sens large. À trancher par le professeur.

Q5 ✔ Réponse D

Somme géométrique de raison $-\frac{1}{2}$, de $k=0$ à $k=12$ ($\frac{1}{4096} = \frac{1}{2^{12}}$) :

$$S = \frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{13}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{8192}\right) = \frac{2\times 8193}{3\times 8192} = \frac{2731}{4096}.$$

Q6 ✔ Réponse E

$|z-3| = |z+i|$ définit la médiatrice des points d'affixes 3 et $-i$; avec $z = x+iy$:
$(x-3)^2 + y^2 = x^2 + (y+1)^2 \iff 3x + y - 4 = 0$.
$|z-i| = 2$ est le cercle de centre $\Omega(0,1)$ et de rayon 2. La distance de Ω à la droite vaut $\dfrac{|0+1-4|}{\sqrt{10}} = \dfrac{3}{\sqrt{10}} < 2$: E est formé de **deux points**, cas non proposé dans A à D.

Q7 ✔ Réponse A

Avec $\vec{n}(2;3;-1)$ et $\|\vec{n}\|^2 = 14$: $2\times 4 + 3\times\frac{11}{2} + \frac{1}{2} - 4 = 21$. Le symétrique est

$$\begin{aligned} M' &= M - \frac{2\times 21}{14}\vec{n} \\ &= M - 3\vec{n} \\ &= \left(4-6;\ \frac{11}{2}-9;\ -\frac{1}{2}+3\right) \\ &= \left(-2;\ -\frac{7}{2};\ \frac{5}{2}\right). \end{aligned}$$

Q8 ✔ Réponse D

$\cos 4x = \cos^2 2x - \sin^2 2x = (\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x)$ (le dénominateur ne s'annule pas sur l'intervalle). L'intégrale vaut

$$\begin{aligned} \int_{\pi/4}^{\pi/3} (\cos 2x + \sin 2x)\,dx &= \left[\frac{\sin 2x - \cos 2x}{2}\right]_{\pi/4}^{\pi/3} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}}{2} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3}-1}{4}. \end{aligned}$$

Q9 ✔ Réponse B

Une primitive de $(2x+1)^{-1/3}$ est $\dfrac{3}{4}(2x+1)^{2/3}$. Valeur moyenne :

$$\frac{2}{7}\cdot\frac{3}{4}\left(8^{2/3}-1\right) = \frac{2}{7}\cdot\frac{3}{4}\cdot 3 = \frac{9}{14}.$$

Q10 ✔ Réponse D

$(D) : y = 2x - 1$, de pente 2 ; (T) a donc la pente $-\dfrac{1}{2}$.
$h'(x) = 2 - e^{-x} = -\dfrac{1}{2} \iff e^{-x} = \dfrac{5}{2} \iff x = \ln\dfrac{2}{5}$.
Alors $y_P = \dfrac{5}{2} + 2\ln\dfrac{2}{5} - 1 = \dfrac{3}{2} + 2\ln\dfrac{2}{5}$.

FACULTÉ DE MÉDECINE ET DE PHARMACIE DE TANGER · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès · Faculté de Médecine et de Pharmacie de Tanger

Session 2018–2019

2018 Énoncé

Q1 L'équation

$$x\log(1+x^2)-1=0;\ x\in\mathbb{R},$$

A admet deux solutions.
B n'admet pas de solutions.
C admet trois solutions.
D admet quatre solutions.
E admet une solution unique.

Q2 Soit f la fonction définie par $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$.
A La courbe de f admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$.
B $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$.
C La droite d'équation $x=-\dfrac{1}{2}$, est un axe de symétrie de la courbe de f.
D Le point $\Omega(-1;2)$ est un centre de symétrie de la courbe de f.
E La courbe de f admet une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$, d'équation $y=x$.

Q3 Soit f la fonction définie par $f(x)=|x^2-3x+2|$.
A f est une fonction paire.
B La courbe de f admet un axe de symétrie.
C La courbe de f admet un centre de symétrie.
D La courbe de f admet une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$.
E $f'(x)=2x-3,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Q4 Soit $I=\displaystyle\int_0^1 x^2e^x\,dx$. On a
A $I=1-e$.
B $I=\log 2$.
C $I=0$.
D $I=e-2$.
E $I=e+1$.

Q5 Soit f la solution de l'équation différentielle $y''-2y'+2y=0$, qui admet en $x=0$ une tangente à sa courbe, d'équation $y=-x+3$; f est définie par :
A $f(x)=e^x+2e^{-x}$
B $f(x)=4e^x-e^{-2x}$
C $f(x)=(x+3)e^{-x}$
D $f(x)=e^x(3\cos x-4\sin x)$
E $f(x)=3e^x\cos x$

Q6 Soit $(u_n)_{n\geq1}$ une suite définie par $u_1=\dfrac{1}{2}$, $u_{n+1}=\dfrac{1-u_n}{1+u_n}$, $\forall n\geq1$.
On a :
A La suite $(u_n)_{n\geq1}$ n'a pas de limite.
B $u_n=\dfrac{1}{-n^2+5n-2},\ \forall n\geq1$.
C La suite $(u_n)_{n\geq1}$ est strictement croissante.
D $u_n=\dfrac{1}{n+1},\ \forall n\geq1$.
E $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\sqrt{2}-1$.

Q7 Soit $u_n=\left(\dfrac{1}{n}+1\right)^n$, $n\geq1$. On a :
A $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$.
B $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$
C $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=e$
D La suite $(u_n)_{n\geq1}$ n'admet pas de limite.
E La suite $(u_n)_{n\geq1}$ est décroissante.

Q8 Soit $Z=\dfrac{(1-i\sqrt{3})^5}{(-\sqrt{3}+i)^6}$. On a :
A $Z=\sqrt{3}+i$.
B $Z=\dfrac{1}{3}\left(1+i\sqrt{3}\right)$
C $Z=-3-i3\sqrt{3}$.
D $Z=-\dfrac{1}{4}\left(1+i\sqrt{3}\right)$
E $Z=-4-i4\sqrt{3}$.

Q9 Le module du nombre complexe $\dfrac{1-e^{i\frac{6\pi}{5}}}{1-e^{i\frac{4\pi}{5}}}$, est égale à :
A $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$
B 1
C $\tan\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$
D $\dfrac{1}{2}$
E $\sin\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)$

Q10 L'espace est rapporté à un repère orthonormé. On considère la sphère S : $x^2+y^2+z^2-2y-2z-2=0$, et le plan P d'équation $x=-2$. Alors :
A P passe par le centre de S.
B $P\cap S$ est constitué de deux points.
C $P\cap S=\varnothing$
D $P\cap S$ est une droite.
E $P\cap S$ est constitué d'un point.

Q11 L'espace est rapporté à un repère orthonormé. On considère les deux sphères S_1 : $x^2+y^2+z^2-2y-8=0$, et S_2 : $x^2+y^2+z^2-4y+3=0$. Alors
A $S_1\cap S_2=\varnothing$.
B $S_1\cap S_2$ est un cercle.
C S_1 coupe S_2 en un point unique.
D $S_1\cap S_2$ est une droite.
E S_1 coupe S_2 en deux points.

Q12 L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$.
L'ensemble des points $M(x;y;z)$ vérifiant l'équation :
$x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+14=0$, est
A Une droite
B Une sphère
C L'ensemble vide
D Un point
E Un plan

Q13 Dans une usine, 50% des ouvriers parlent le français, 20% parlent l'anglais, 45% ne parlent ni francais ni l'anglais. Alors, le pourcentage des ouvriers qui parlent à la fois le français et l'anglais est :
A 10%
B 15%
C 20%
D 25%
E 30%

Q14 La probabilité pour qu'un étudiant soit admis dans l'école A est 0.5, et la probabilité pour que le même étudiant soit admis dans l'école B est 0.2. On suppose que l'admission dans l'école A et l'admission dans l'école B sont deux événements indépendants. La probabilité pour que cet étudiant ne soit admis dans aucune des deux écoles est :
A 0.1
B 0.28
C 0.31
D 0.4
E 0.42

Q15 Une urne contient cinq boules rouges et trois boules vertes. On tire successivement sans remise, trois boules de cette urne. La probabilité d'avoir trois boules de même couleur est :
A $\dfrac{8}{56}$
B $\dfrac{9}{56}$
C $\dfrac{10}{56}$
D $\dfrac{11}{56}$
E $\dfrac{12}{56}$

Q16 Une village dispose de deux hôpitaux $H1$ et $H2$. $H1$ reçoit 70% des malades, $H2$ reçoit le reste des malades ; 5% des malades reçus par $H1$ sont des étrangers ; 1% des malades reçus par $H2$ sont des étrangers. La probabilité qu'un malade, choisi au hasard, soit reçu par $H2$, sachant qu'il est étranger, est égale à :
A $\dfrac{1}{38}$.
B $\dfrac{2}{38}$.
C $\dfrac{3}{38}$.
D $\dfrac{4}{38}$.
E $\dfrac{5}{38}$.

FACULTÉ DE MÉDECINE ET DE PHARMACIE DE TANGER · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès · Faculté de Médecine et de Pharmacie de Tanger

Session 2018–2019

2018 Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14
E	C	B	D	D	A	C	D	B	E	A	D	B	D

Q15	Q16
D	C

Q1 ✔ Réponse E

Soit $g(x) = x\ln(1+x^2) - 1$. Pour $x \leq 0$, $x\ln(1+x^2) \leq 0$ donc $g(x) < 0$: pas de solution.
Sur $]0, +\infty[$, x et $\ln(1+x^2)$ sont positifs et croissants, donc g est strictement croissante, de -1 (en 0) à $+\infty$: elle s'annule exactement une fois.

Q2 ✔ Réponse C

$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ ne dépend que de $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$: $f(-1-x) = f(x)$, la droite $x = -\frac{1}{2}$ est axe de symétrie (C).
En $+\infty$: $\dfrac{f(x)}{x} \to 1$ (B fausse) et $f(x) - \left(x + \frac{1}{2}\right) \to 0$: l'asymptote est $y = x + \frac{1}{2}$ (A et E fausses). D est fausse ($f > 0$ partout, alors qu'un centre $(-1; 2)$ imposerait $f(-1-t) + f(-1+t) = 4$; pour $t = 0$, $2f(-1) = 2 \neq 4$).

Q3 ✔ Réponse B

$x^2 - 3x + 2 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$, donc $f(3-x) = f(x)$: la droite $x = \frac{3}{2}$ est axe de symétrie (B).
$f(-1) = 6 \neq f(1) = 0$ (A fausse) ; $f \to +\infty$ comme x^2 (pas d'asymptote oblique, pas de centre) ; f n'est pas dérivable en 1 et 2, et vaut $-(2x-3)$ sur $]1, 2[$ (E fausse).

Q4 ✔ Réponse D

Deux intégrations par parties donnent la primitive $(x^2 - 2x + 2)e^x$. Donc $I = (1 - 2 + 2)e - 2 = e - 2$.

Q5 ✔ Réponse D

$r^2 - 2r + 2 = 0$ a pour racines $1 \pm i$: $f(x) = e^x(a\cos x + b\sin x)$.
La tangente en 0 donne $f(0) = 3$ et $f'(0) = -1$.
$f(0) = a = 3$ et $f'(x) = e^x\left((a+b)\cos x + (b-a)\sin x\right)$, donc $f'(0) = a + b = -1$ et $b = -4$: $f(x) = e^x(3\cos x - 4\sin x)$.

Q6 ✔ Réponse A

$u_2 = \dfrac{1/2}{3/2} = \dfrac{1}{3}$, puis $u_3 = \dfrac{2/3}{4/3} = \dfrac{1}{2} = u_1$: la suite alterne $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ et n'a pas de limite (A).
B donne $u_2 = \frac{1}{4}$ et D donne $u_3 = \frac{1}{4}$: fausses. C et E sont fausses aussi.

Q7 ✔ Réponse C

$n\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \to 1$, donc $u_n \to e$. (La suite est d'ailleurs croissante : $u_1 = 2$, $u_2 = 2{,}25\ldots$)

Q8 ✔ Réponse D

$1 - i\sqrt{3} = 2e^{-i\pi/3}$, donc $(1 - i\sqrt{3})^5 = 32e^{-5i\pi/3} = 32e^{i\pi/3}$.
$-\sqrt{3} + i = 2e^{5i\pi/6}$, donc $(-\sqrt{3} + i)^6 = 64e^{5i\pi} = -64$.
$Z = -\dfrac{1}{2}e^{i\pi/3} = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\dfrac{1}{4}\left(1 + i\sqrt{3}\right)$.

Q9 ✔ Réponse B

$|1 - e^{i\theta}| = 2\left|\sin\dfrac{\theta}{2}\right|$. Le module vaut $\dfrac{\sin\frac{3\pi}{5}}{\sin\frac{2\pi}{5}} = 1$, car $\sin\dfrac{3\pi}{5} = \sin\left(\pi - \dfrac{2\pi}{5}\right) = \sin\dfrac{2\pi}{5}$.

Q10 ✔ Réponse E

$S : x^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 4$, centre $(0, 1, 1)$, rayon 2. La distance du centre au plan $x = -2$ vaut 2 : le plan est tangent, l'intersection est un point, $(-2, 1, 1)$.

Q11 ✔ Réponse A

S_1 : centre $(0, 1, 0)$, rayon 3 ; S_2 : centre $(0, 2, 0)$, rayon 1. La distance des centres vaut $1 < 3 - 1 = 2$: S_2 est strictement à l'intérieur de S_1, elles ne se coupent pas.
(En soustrayant les équations : $2y - 11 = 0$, soit $y = \frac{11}{2}$, plan qui ne rencontre pas S_2.)

Q12 ✔ Réponse D

$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 1 + 4 + 9 - 14 = 0$: seul le point $(1; 2; 3)$ convient.

Q13 ✔ Réponse B

55 % parlent au moins une des deux langues.
$P(F \cap A) = P(F) + P(A) - P(F \cup A) = 50 + 20 - 55 = 15$ %.

Q14 ✔ Réponse D

Les contraires d'événements indépendants sont indépendants : $P = (1 - 0{,}5)(1 - 0{,}2) = 0{,}5 \times 0{,}8 = 0{,}4$.

Q15 ✔ Réponse D

$P = \dfrac{5 \times 4 \times 3 + 3 \times 2 \times 1}{8 \times 7 \times 6} = \dfrac{66}{336} = \dfrac{11}{56}$.

Q16 ✔ Réponse C

$P(E) = 0{,}7 \times 0{,}05 + 0{,}3 \times 0{,}01 = 0{,}038$. Formule de Bayes : $P_E(H2) = \dfrac{0{,}003}{0{,}038} = \dfrac{3}{38}$.

FACULTÉ DE MÉDECINE ET DE PHARMACIE DE TANGER · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès · Faculté de Médecine et de Pharmacie de Tanger

Session 2017–2018

2017 Énoncé

Q1 (2 pts) Une urne contient quatre boules rouges et deux boules vertes. On tire successivement avec remise, trois boules de cette urne. La probabilité d'avoir trois boules de même couleur est :

A $\frac{1}{4}$ B $\frac{2}{5}$ C $\frac{8}{27}$ D $\frac{1}{3}$ E $\frac{1}{27}$

Q2 (2 pts) Une urne contient six boules blanches et deux boules noires indiscernables au toucher. On tire de l'urne deux boules, successivement et sans remise. Soit X la variable aléatoire qui associe chaque tirage au nombre de boules blanches tirées.
L'espérance mathématique $E(X)$ est :

A 1 B 1,2 C 1,5 D 2 E 1,7

Q3 (2 pts) Une usine produit des ampoules électriques à l'aide de deux machines A et B. La machine A garantit 70% de la production, et 5% d'ampoules fabriquées par A sont non valides, 1% d'ampoules fabriquées par B sont non valides. La probabilité qu'une ampoule, tirée au hasard, soit fabriquée par B, sachant qu'elle est non valide, est égale à :

A $\frac{3}{38}$ B $\frac{5}{38}$ C $\frac{7}{38}$ D 0,05 E 0,01

Q4 (2 pts) L'espace est rapporté à un repère orthonormé. La distance du point $A(2;1;3)$ à la droite définie par la représentation paramétrique : $x = t+1$; $y = -3t+2$; $z = -t-1$ $(t \in \mathbb{R})$, est égale :

A $2\sqrt{3}$ B $3\sqrt{2}$ C $\sqrt{6}$ D $2\sqrt{2}$ E $3\sqrt{3}$

Q5 (2 pts) Soit $I = \int_0^3 |x^2 - x - 2|\, dx$.
On a

A $I = \frac{20}{31}$. B $I = \frac{31}{11}$. C $I = \frac{5}{31}$. D $I = \frac{31}{6}$. E $I = \frac{11}{20}$.

Q6 (2 pts) Soit $h(x) = \cos x\,(\sin x)^3$. On a

A $h(x) = \frac{1}{4}\sin(2x) - \frac{1}{8}\sin(4x)$.
B $h(x) = \frac{1}{4}\sin(2x) - \frac{1}{6}\sin(3x)$.
C $h(x) = \frac{1}{4}\sin(4x) - \frac{1}{8}\sin(x)$.
D $h(x) = \frac{1}{4}\sin(x) - \frac{1}{8}\sin(3x)$.
E $h(x) = \frac{1}{4}\sin(4x) - \frac{1}{8}\sin(x)$.

Q7 (2 pts) Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2+4x}{x+1}$.

A La courbe de f admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$.
B $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.
C La droite d'équation $x = -1$, est un axe de symétrie de la courbe de f.
D Le point $\Omega(-1;2)$ est un centre de symétrie de la courbe de f.
E $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = +\infty$.

Q8 (0,75 pt) La fonction $f : x \longmapsto e^x \cos x$ est une solution de l'équation différentielle :

A $y'' + 2y' - y = 0$
B $y'' - 2y' + 2y = 0$
C $y'' - 2y' - 2y = 0$
D $y'' + 2y' + y = 0$
E $y'' + y' + y = 0$

Q9 (0,75 pt) Une primitive F sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \longmapsto \frac{e^{2x}+e^x-1}{e^x+1}$, est définie par :

A $F(x) = \ln\left(\frac{1}{2}e^{2x} + e^x - x\right)$.
B $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - x + \ln(e^x+1)$.
C $F(x) = e^x - x + \ln(e^x+1)$.
D $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + e^x + \ln(e^x+x)$.
E $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - x + \ln(e^x+x)$.

Q10 (0,75 pt) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé, on considère H l'ensemble des points M d'affixe z tels que : $|z-i| = |z-1|$. On a :

A $H = \varnothing$.
B H est un cercle.
C H est une droite.
D H est constitué d'un point unique.
E H est constitué de deux points.

Q11 (0,75 pt) Soit $Z = \frac{(1-i\sqrt{3})^5}{(1+i)^4}$. On a :

A $Z = 1$.
B $Z = 2 + i2\sqrt{2}$.
C $Z = -3 - i3\sqrt{3}$.
D $Z = 4 + i3\sqrt{3}$.
E $Z = -4 - i4\sqrt{3}$.

Q12 (0,75 pt) Soit $(u_n)_{n\geq1}$ une suite définie par :

$$u_1 = 1,\ u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n+1},\ n \geq 1$$

On a :

A La suite $(u_n)_{n\geq1}$ n'a pas de limite.
B $u_n = \frac{1}{4n - n^2 - 2}$, $\forall n \geq 1$.
C La suite $(u_n)_{n\geq1}$ est strictement croissante.
D $u_n = \frac{1}{n}$, $\forall n \geq 1$.
E $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Q13 (0,75 pt) L'équation $xe^x - 1 = 0$,

A admet deux solutions dans $\mathbb{R}$.
B n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}$.
C admet une solution unique dans $\mathbb{R}$.
D n'admet pas de solutions dans $]0;1[$.
E admet une solution unique dans $]1;+\infty[$.

Q14 (0,5 pt) L'espace est rapporté à un repère orthonormé. La distance du point $A(3;-2;-1)$ au plan défini par l'équation : $x - 4y + 6 = 0$, est égale à :

A $\frac{17}{\sqrt{53}}$ B $\sqrt{53}$ C $\sqrt{17}$ D $\frac{1}{\sqrt{53}}$ E $\frac{1}{\sqrt{17}}$

Q15 (0,5 pt) L'espace est rapporté à un repère orthonormé. On considère la sphère $S : x^2+y^2+z^2-2y+2z-6 = 0$, et la droite D définie par : $x = t$; $y = t-1$; $z = t+1$ $(t \in \mathbb{R})$.

A D passe par le centre de S.
B D coupe S en deux points.
C $D \cap S = \varnothing$
D D coupe S en trois points.
E D coupe S en un point.

Q16 (0,5 pt) Soit $u_n = (n+1)^{\frac{1}{n}}$, $n \geq 1$.
On a :

A $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
B $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.
C $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
D La suite $(u_n)_{n\geq1}$ n'admet pas de limite.
E La suite $(u_n)_{n\geq1}$ est croissante.

FACULTÉ DE MÉDECINE ET DE PHARMACIE DE TANGER · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès · Faculté de Médecine et de Pharmacie de Tanger

Session 2017–2018

2017 Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14
D	C	A	B	D	A	D	B	C	C	E	D	C	C

Q15	Q16
E	B

Q1 ✔ Réponse D

Avec remise, les tirages sont indépendants :
$P = \left(\frac{4}{6}\right)^3 + \left(\frac{2}{6}\right)^3 = \frac{8}{27} + \frac{1}{27} = \frac{1}{3}$.

Q2 ✔ Réponse C

$P(X=0) = \frac{2}{8} \times \frac{1}{7} = \frac{1}{28}$, $P(X=2) = \frac{6}{8} \times \frac{5}{7} = \frac{15}{28}$,
$P(X=1) = \frac{12}{28}$.
$E(X) = \frac{12+30}{28} = \frac{42}{28} = 1{,}5$. (C'est aussi $2 \times \frac{6}{8}$.)

Q3 ✔ Réponse A

$P(NV) = 0{,}7 \times 0{,}05 + 0{,}3 \times 0{,}01 = 0{,}038$ et
$P_{NV}(B) = \frac{0{,}003}{0{,}038} = \frac{3}{38}$.

Q4 ✔ Réponse B

La droite passe par $B(1;2;-1)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u}(1;-3;-1)$. $\overrightarrow{BA}(1;-1;4)$ et $\overrightarrow{BA} \wedge \vec{u} = (13;5;-2)$, de norme $\sqrt{198}$.
$d = \frac{\sqrt{198}}{\sqrt{11}} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

Q5 ✔ Réponse D

$x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$ est négatif sur $[0,2]$ et positif sur $[2,3]$. Avec $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x$: $F(0) = 0$, $F(2) = -\frac{10}{3}$,
$F(3) = -\frac{3}{2}$.
$I = -(F(2) - F(0)) + (F(3) - F(2)) = \frac{10}{3} + \frac{11}{6} = \frac{31}{6}$.

Q6 ✔ Réponse A

$\cos x \sin^3 x = \sin x \cos x \cdot \sin^2 x = \frac{\sin 2x}{2} \cdot \frac{1-\cos 2x}{2} =$
$\frac{\sin 2x}{4} - \frac{\sin 2x \cos 2x}{4} = \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{8}\sin 4x$.

Q7 ✔ Réponse D

$f(x) = x + 3 - \frac{3}{x+1}$. Avec $x = -1+t$: $f(-1+t) = 2 + t - \frac{3}{t}$, et $f(-1+t) + f(-1-t) = 4$: $\Omega(-1;2)$ est centre de symétrie (D), pas un axe (C fausse).
La courbe a l'asymptote oblique $y = x+3$ (A fausse), $f \to -\infty$ en $-\infty$ (B fausse) et $-\frac{3}{x+1} \to -\infty$ quand $x \to -1^+$ (E fausse).

Q8 ✔ Réponse B

$e^x \cos x$ correspond aux racines caractéristiques $1 \pm i$, de somme 2 et de produit 2 : $r^2 - 2r + 2 = 0$, d'où $y'' - 2y' + 2y = 0$.
Vérification : $f' = e^x(\cos x - \sin x)$, $f'' = -2e^x \sin x$, et $f'' - 2f' + 2f = e^x(-2\sin x - 2\cos x + 2\sin x + 2\cos x) = 0$.

Q9 ✔ Réponse C

$e^{2x} + e^x - 1 = e^x(e^x+1) - 1$, donc
$f(x) = e^x - \frac{1}{e^x+1} = e^x - 1 + \frac{e^x}{e^x+1}$.
Une primitive est $e^x - x + \ln(e^x+1)$: C.

Q10 ✔ Réponse C

M est équidistant des points d'affixes i et 1 : H est la médiatrice de ces deux points, une droite (la droite $y = x$).

Q11 ✔ Réponse E

$(1 - i\sqrt{3})^5 = \left(2e^{-i\pi/3}\right)^5 = 32e^{-5i\pi/3} = 32e^{i\pi/3}$ et
$(1+i)^4 = (2i)^2 = -4$.
$Z = -8e^{i\pi/3} = -8\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -4 - 4i\sqrt{3}$.

Q12 ✔ Réponse D

$\frac{1}{u_{n+1}} = \frac{u_n+1}{u_n} = 1 + \frac{1}{u_n}$: la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ est arithmétique de raison 1 et de premier terme 1, donc $\frac{1}{u_n} = n$ et $u_n = \frac{1}{n}$ (D).
Elle est strictement décroissante et tend vers 0 (A, C, E fausses). B coïncide pour $n=1$ et $n=2$ mais donne $u_3 = 1$.

Q13 ✔ Réponse C

Pour $x \leq 0$, $xe^x \leq 0 < 1$. Sur $]0,+\infty[$, $x \mapsto xe^x$ est strictement croissante, de 0 à $+\infty$: elle prend la valeur 1 exactement une fois. Comme $1 \cdot e^1 = e > 1$, cette solution est dans $]0;1[$ (D et E fausses).

Q14 ✔ Réponse C

$d = \frac{|3+8+6|}{\sqrt{1+16}} = \frac{17}{\sqrt{17}} = \sqrt{17}$.

Q15 ✔ Réponse E

$S : x^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 8$. En reportant :
$t^2 + (t-2)^2 + (t+2)^2 = 8 \iff 3t^2 + 8 = 8 \iff t = 0$. La droite est tangente à la sphère au seul point $(0;-1;1)$; elle ne passe pas par le centre $(0;1;-1)$.

Q16 ✔ Réponse B

$u_n = e^{\frac{\ln(n+1)}{n}}$ et $\frac{\ln(n+1)}{n} \to 0$, donc $u_n \to 1$. (Elle est décroissante : $u_1 = 2$, $u_2 = \sqrt{3}$…)

FACULTÉ DE MÉDECINE ET DE PHARMACIE D'AGADIR · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès · Faculté de Médecine et de Pharmacie d'Agadir

Session du 21 juillet 2018

2018

Énoncé

Soit la suite réelle (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$ par : $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{3}{2}$
On pose : $v_n = u_n - 3$ et $s_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Q1.1 (v_n) une suite géométrique de raison :

A $\frac{1}{2}$ B $\frac{3}{2}$ C $\frac{2}{3}$ D $-\frac{3}{2}$

Q1.2 Expression de u_n en fonction de n :

A $2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$ B $-\left(\frac{1}{2}\right)^n + 3$
C $\left(\frac{3}{2}\right)^n + n$ D $-\left(\frac{3}{2}\right)^n + 3$

Q1.3 La valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n$:

A 2 B 6 C 8 D -3

Soient les deux fonctions f et g définies sur $]0,+\infty[$ par :

$$f(x) = x^2 \ln\left(\frac{1}{x} + 1\right)$$

et

$$g(x) = \frac{-1}{x+1} + 2\ln\left(\frac{1}{x} + 1\right)$$

Q2.1 La valeur de $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

A 0 B 1 C $-\infty$ D $+\infty$

Q2.2 Expression de $f'(x)$:

A $xg(x)$ B $x^2g(x)$
C $\frac{g(x)}{x^3}$ D $\frac{g(x)}{x^4}$

Q2.3 α un nombre réel appartenant à $]0,+\infty[$. Si $g(\alpha) = 0$ alors $f(\alpha)$ égale :

A $\frac{2}{\alpha(\alpha+1)}$ B $\frac{1}{2\alpha(\alpha+1)}$
C $\frac{\alpha^2}{2(\alpha+1)}$ D $\frac{\alpha^2}{\alpha+1}$

Q2.4 La valeur de l'intégrale $\int_1^2 x^2 \ln x\, dx$:

A $-\frac{3}{2}\ln 2 + \frac{3}{2}$ B $\frac{8}{2}\ln 2 - \frac{7}{9}$
C $-\frac{8}{3}\ln 2 + 2$ D $\frac{3}{2}\ln 2 + \frac{7}{5}$

On dispose de deux urnes U_1 et U_2.
- L'urne U_1 contient une boule blanche et une noire
- L'urne U_2 contient 3 boules blanches et une noire
Les boules sont indiscernables au toucher. On choisit au hasard une urne et on tire au hasard une boule

Q3.1 La probabilité de tirer une boule blanche :

A $\frac{3}{8}$ B $\frac{1}{3}$ C $\frac{3}{4}$ D $\frac{5}{8}$

Q3.2 Sachant que la boule tirée est blanche, la probabilité qu'elle provienne de U_1 :

A $\frac{5}{8}$ B $\frac{3}{8}$ C $\frac{2}{5}$ D $\frac{1}{5}$

Q3.3 Les boules dans U_1 et U_2 sont rassemblées dans une seule urne U_3. La probabilité de tirer au hasard et simultanément 2 boules de l'urne U_3 de même couleur :

A $\frac{5}{12}$ B $\frac{3}{15}$ C $\frac{7}{15}$ D $\frac{9}{12}$

FACULTÉ DE MÉDECINE ET DE PHARMACIE D'AGADIR · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès · Faculté de Médecine et de Pharmacie d'Agadir

Session du 21 juillet 2018

2018

Correction

Q1.1	Q1.2	Q1.3	Q2.1	Q2.2	Q2.3	Q2.4	Q3.1	Q3.2	Q3.3
A	B	–	D	A	C	B	D	C	C

Q1.1 ✔ Réponse A

$v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = \frac{1}{2}u_n - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}(u_n - 3) = \frac{1}{2}v_n$: la raison est $\frac{1}{2}$.

Q1.2 ✔ Réponse B

$v_0 = u_0 - 3 = -1$, donc $v_n = -\left(\frac{1}{2}\right)^n$ et

$u_n = v_n + 3 = -\left(\frac{1}{2}\right)^n + 3$.

Q1.3 ✔ Réponse –

(v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et $v_0 = -1$, donc $s_n = -\frac{1-(1/2)^{n+1}}{1-1/2} \to -2$. Aucune des réponses proposées n'est juste (limite -2).

Q2.1 ✔ Réponse D

Avec $h = \frac{1}{x} \to 0^+$: $f(x) = \frac{\ln(1+h)}{h^2} = \frac{\ln(1+h)}{h} \cdot \frac{1}{h}$. Le premier facteur tend vers 1 et le second vers $+\infty$: $f(x) \to +\infty$.

Q2.2 ✔ Réponse A

$\ln\left(\frac{1}{x}+1\right) = \ln(x+1) - \ln x$ a pour dérivée $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} = -\frac{1}{x(x+1)}$. Donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x\ln\left(\frac{1}{x}+1\right) - \frac{x^2}{x(x+1)} \\ &= x\left(2\ln\left(\frac{1}{x}+1\right) - \frac{1}{x+1}\right) \\ &= xg(x). \end{aligned}$$

Q2.3 ✔ Réponse C

$g(\alpha) = 0$ donne $\ln\left(\frac{1}{\alpha}+1\right) = \frac{1}{2(\alpha+1)}$, donc $f(\alpha) = \alpha^2 \times \frac{1}{2(\alpha+1)} = \frac{\alpha^2}{2(\alpha+1)}$.

Q2.4 ✔ Réponse B

Par parties ($u = \ln x$, $v = \frac{x^3}{3}$) :

$$\begin{aligned} \int_1^2 x^2 \ln x\, dx &= \left[\frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9}\right]_1^2 \\ &= \frac{8}{3}\ln 2 - \frac{8}{9} + \frac{1}{9} \\ &= \frac{8}{3}\ln 2 - \frac{7}{9} \approx 1{,}07. \end{aligned}$$

La proposition B, imprimée $\frac{8}{2}\ln 2 - \frac{7}{9}$, correspond à ce résultat avec une coquille ($\frac{8}{2}$ au lieu de $\frac{8}{3}$).

Remarque : Le résultat exact est (8/3) ln 2 − 7/9 ; la proposition B est imprimée « 8/2 ln 2 − 7/9 », ce qui est faux tel quel (coquille probable). À trancher par le professeur (corriger B en 8/3 ou retirer la question).

Q3.1 ✔ Réponse D

Probabilités totales : $P(B) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\times\frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$.

Q3.2 ✔ Réponse C

Formule de Bayes : $P_B(U_1) = \frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}{\frac{5}{8}} = \frac{1/4}{5/8} = \frac{2}{5}$.

Q3.3 ✔ Réponse C

U_3 contient 4 boules blanches et 2 noires.

$P = \frac{\binom{4}{2} + \binom{2}{2}}{\binom{6}{2}} = \frac{6+1}{15} = \frac{7}{15}$.

FACULTÉ DE MÉDECINE ET DE PHARMACIE DE RABAT · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année de Médecine · Rabat

Session du mercredi 27 juillet 2016

2016

Énoncé

Q1 si x est un nombre réel, $(e^{ix}-e^{-ix})^4$ vaut :

A $-16\sin^4 x$ B $16\sin^4 x$
C $16\cos^4 x$ D $-16\cos^4 x$

Q2 si x est un nombre réel avec $x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$, $\frac{e^{2ix}-1}{e^{2ix}+1}$ vaut :

A $\frac{i}{\tan(x)}$ B $\tan(x)$
C $i\tan(x)$ D $-i\tan(x)$

On considère les suites numériques $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :

$$u_n=\frac{e^n-2^n}{3^n-5^n},\quad v_n=\frac{\ln(5n)}{\ln(3n)},$$

$$w_n=\int_0^1 t^n e^{-t}\,dt$$

Q3 Choisir la bonne réponse :

A $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\frac{-2}{3}$
B $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\frac{e}{5}$
C $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$
D $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$

Q4 Choisir la bonne réponse :

A $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=0$
B $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=\frac{5}{3}$
C $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=\frac{\ln(5)}{\ln(3)}$
D $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=1$

Q5 Choisir la bonne réponse :

A $w_{n+1}+(n+1)w_n=\frac{1}{e}$
B $w_{n+1}-(n+1)w_n=-\frac{1}{e}$
C $w_n\leq 0$
D $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante

On considère la fonction numérique f à variable réelle x définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x)=\frac{1}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}$ et l'intégrale

$$I=\int_1^2 f(x)\,dx$$

Q6

A $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=+\infty$
B $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=1$
C $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=0$
D $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-\infty$

Q7 Pour tout réel x de D_f, $f'(x)$ vérifie :

A $f'(x)=\frac{1}{x^3}f(x)$
B $f'(x)=\frac{3x^2-1}{x^3}f(x)$
C $f'(x)=\frac{-1}{x^3}f(x)$
D $f'(x)=\frac{-3x^2+2}{x^2}f(x)$

Q8

A $I=\frac{1}{2}\left(e^{-\frac{1}{4}}+e^{-1}\right)$
B $I=\frac{e^{-\frac{1}{4}}}{2}$
C $I=\frac{1}{2}\left(e^{-\frac{1}{4}}-e^{-1}\right)$
D $I=\frac{e^{-1}}{2}$

Une urne contient 9 boules : 5 boules rouges numérotées de 1 à 5 et 4 boules noires numérotées de 1 à 4. On suppose que les boules sont indiscernables au toucher. On tire simultanément deux boules de l'urne. On considère les deux évènements A : «les deux boules tirées sont de même couleur» et B : «les deux boules tirées portant un numéro pair»

Q9 Choisir la bonne réponse :

A $p(A\cap B)=\frac{2}{9}$
B $p(A\cap B)=\frac{1}{18}$
C $p(A\cap B)=\frac{1}{36}$
D $p(A\cap B)=\frac{4}{9}$

Q10 Choisir la bonne réponse :

A $p_{\bar{A}}(B)=\frac{1}{18}$ B $p_{\bar{A}}(B)=\frac{17}{18}$
C $p_{\bar{A}}(B)=\frac{1}{4}$ D $p_{\bar{A}}(B)=\frac{1}{5}$

FACULTÉ DE MÉDECINE ET DE PHARMACIE DE RABAT · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année de Médecine · Rabat

Session du mercredi 27 juillet 2016

2016

Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10
B	C	C	D	B	C	D	C	B	D

Q1 ✔ Réponse B

$e^{ix} - e^{-ix} = 2i\sin x$, donc $(2i\sin x)^4 = 16i^4\sin^4 x = 16\sin^4 x$.

Q2 ✔ Réponse C

En divisant par e^{ix} : $\dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{e^{ix} + e^{-ix}} = \dfrac{2i\sin x}{2\cos x} = i\tan x$.

Q3 ✔ Réponse C

En divisant par 5^n : $u_n = \dfrac{\left(\frac{e}{5}\right)^n - \left(\frac{2}{5}\right)^n}{\left(\frac{3}{5}\right)^n - 1} \to \dfrac{0}{-1} = 0$.

Q4 ✔ Réponse D

$v_n = \dfrac{\ln 5 + \ln n}{\ln 3 + \ln n} = \dfrac{1 + \frac{\ln 5}{\ln n}}{1 + \frac{\ln 3}{\ln n}} \to 1$.

Q5 ✔ Réponse B

Par parties ($u = t^{n+1}$, $v = -e^{-t}$) :
$w_{n+1} = \left[-t^{n+1}e^{-t}\right]_0^1 + (n+1)w_n = -\dfrac{1}{e} + (n+1)w_n$: B.
$w_n > 0$ (C fausse) et, sur $[0,1]$, $t^{n+1} \le t^n$, donc (w_n) est décroissante (D fausse).

Q6 ✔ Réponse C

Avec $t = \dfrac{1}{x} \to +\infty$: $f(x) = t^3 e^{-t^2} = \dfrac{t^3}{e^{t^2}} \to 0$ (croissances comparées).

Q7 ✔ Réponse D

$f(x) = x^{-3}e^{-1/x^2}$, donc
$f'(x) = \left(-\dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{x^3}\right) f(x) = \dfrac{-3x^2 + 2}{x^3} f(x)$ (le sujet imprime x^2 au dénominateur : c'est la réponse D).

Q8 ✔ Réponse C

$\left(e^{-1/x^2}\right)' = \dfrac{2}{x^3}e^{-1/x^2} = 2f(x)$, donc
$I = \dfrac{1}{2}\left[e^{-1/x^2}\right]_1^2 = \dfrac{1}{2}\left(e^{-1/4} - e^{-1}\right)$.

Q9 ✔ Réponse B

$\binom{9}{2} = 36$ tirages. $A \cap B$: deux rouges paires ($\{2,4\}$, 1 tirage) ou deux noires paires ($\{2,4\}$, 1 tirage). $p(A \cap B) = \dfrac{2}{36} = \dfrac{1}{18}$.

Q10 ✔ Réponse D

$\bar{A}$ (une rouge et une noire) : $5 \times 4 = 20$ tirages. $\bar{A} \cap B$: une rouge paire (2 choix) et une noire paire (2 choix), soit 4 tirages.
$p_{\bar{A}}(B) = \dfrac{4}{20} = \dfrac{1}{5}$.

FACULTÉ DE MÉDECINE ET DE PHARMACIE DE RABAT · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année de Médecine · Rabat

Session du lundi 27 juillet 2015

2015

Énoncé

On considère le nombre complexe j tel que : $j = \dfrac{-1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

Q1 l'écriture exponentielle de j est :

A $e^{-i2\frac{\pi}{3}}$ B $e^{i\frac{\pi}{3}}$
C $e^{-i\frac{\pi}{3}}$ D $e^{i2\frac{\pi}{3}}$

Q2 j^3 vaut

A -1 B 1 C $-i$ D i

Q3 j^{2015} vaut

A -1 B 1 C $\bar{j}$ D j

Q4 la somme $1 + j + j^2 + \cdots + j^{2014}$ vaut :
($\bar{j}$ étant le conjugué de j)

A $\dfrac{1+j}{1-j}$ B $\dfrac{2}{1-j}$
C $\dfrac{1-\bar{j}}{1-j}$ D $\dfrac{1+\bar{j}}{1-j}$

On considère la fonction numérique f à variable réelle x définie par : $f(x) = e^{-x}\ln\left(|1-e^x|\right)$

Q5 l'ensemble de définition D_f de f est :

A $D_f = \mathbb{R}^*$ B $D_f =]-\infty, 0]$
C $D_f =]-\infty, 0[$ D $D_f =]1, +\infty[$

Q6 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ est égale :

A $+\infty$ B -1 C $-\infty$ D 1

Q7 pour tout x de D_f, $f'(x)$ vérifie :

A $f'(x) + f(x) = -\ln\left(|1-e^x|\right)$
B $f'(x) + f(x) = -e^{-x}$
C $f'(x) + f(x) = 0$
D $f'(x) + f(x) = \dfrac{-1}{1-e^x}$

Q8 l'équation $f(x) = 0$ dans D_f admet :

A une infinité de solutions
B deux solutions distinctes
C une seule solution
D aucune solution

On considère les deux suites numériques $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$u_n = (\ln(2))^n$$

et

$$v_n = \int_1^2 \frac{(\ln(t))^n}{t}\,dt$$

Q9 Choisir la bonne réponse :

A $v_n = \dfrac{1}{n}u_n$
B $v_n = \dfrac{1}{n}u_{n+1}$
C $v_n = \dfrac{1}{n+1}u_n$
D $v_n = \dfrac{1}{n+1}u_{n+1}$

Q10 Choisir la bonne réponse :

A $\forall n \in \mathbb{N};\ v_n \leq u_n$
B $\forall n \in \mathbb{N};\ u_n \geq 1$
C $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante
D $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

On considère une variable aléatoire X. Sa loi de probabilité est binomiale de paramètres : $n = 10$ et $p = 0{,}4$.

Q11 L'espérance E et la variance V d'une telle loi sont :

A $(E = 4\ ;\ V = 2{,}4)$
B $(E = 10{,}4\ ;\ V = 0{,}24)$
C $(E = 4\ ;\ V = 0{,}24)$
D $(E = 10{,}4\ ;\ V = 2{,}4)$

Q12 La probabilité $p(X = 2)$ est :

A $\binom{8}{2} \times 0{,}4^2 \times 0{,}6^8$
B $\binom{10}{2} \times 0{,}4^8 \times 0{,}6^2$
C $\binom{10}{2} \times 0{,}4^2 \times 0{,}6^8$
D $2 \times 0{,}4^2 \times 0{,}6^8$

FACULTÉ DE MÉDECINE ET DE PHARMACIE DE RABAT · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année de Médecine · Rabat

Session du lundi 27 juillet 2015

2015

Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12
D	B	C	C	A	B	D	C	D	A	A	C

Q1 ✔ Réponse D

$|j| = 1$, $\cos\theta = -\frac{1}{2}$ et $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$: $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$, donc $j = e^{2i\pi/3}$.

Q2 ✔ Réponse B

$j^3 = e^{2i\pi} = 1$.

Q3 ✔ Réponse C

$2015 = 3 \times 671 + 2$, donc $j^{2015} = j^2 = e^{4i\pi/3} = e^{-2i\pi/3} = \bar{j}$.

Q4 ✔ Réponse C

Somme géométrique de 2015 termes : $\dfrac{1 - j^{2015}}{1 - j} = \dfrac{1 - \bar{j}}{1 - j}$.

Q5 ✔ Réponse A

Il faut $|1 - e^x| > 0$, c'est-à-dire $e^x \neq 1$, soit $x \neq 0$: $D_f = \mathbb{R}^*$.

Q6 ✔ Réponse B

Quand $x \to -\infty$, $e^x \to 0$ et $\ln(1 - e^x) \sim -e^x$. Donc $f(x) \sim e^{-x} \cdot (-e^x) = -1$.

Q7 ✔ Réponse D

$(\ln|1 - e^x|)' = \dfrac{-e^x}{1 - e^x}$, donc

$f'(x) = -f(x) + e^{-x} \cdot \dfrac{-e^x}{1 - e^x} = -f(x) - \dfrac{1}{1 - e^x}$, soit

$f'(x) + f(x) = \dfrac{-1}{1 - e^x}$.

Q8 ✔ Réponse C

$f(x) = 0 \iff |1 - e^x| = 1 \iff e^x = 2$ ou $e^x = 0$. Seul $e^x = 2$ est possible : $x = \ln 2$, une seule solution.

Q9 ✔ Réponse D

Une primitive de $\dfrac{(\ln t)^n}{t}$ est $\dfrac{(\ln t)^{n+1}}{n+1}$, donc

$v_n = \dfrac{(\ln 2)^{n+1}}{n+1} = \dfrac{u_{n+1}}{n+1}$.

Q10 ✔ Réponse A

$0 < \ln 2 < 1$, donc (u_n) est décroissante et tend vers 0 (B pour $n \geq 1$, C et D fausses). Alors $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{n+1} \leq u_{n+1} \leq u_n$: A.

Q11 ✔ Réponse A

$E = np = 4$ et $V = np(1-p) = 10 \times 0{,}4 \times 0{,}6 = 2{,}4$.

Q12 ✔ Réponse C

Loi binomiale : $p(X = k) = \dbinom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, d'où

$p(X = 2) = \dbinom{10}{2} \times 0{,}4^2 \times 0{,}6^8$.

FACULTÉ DE MÉDECINE ET DE PHARMACIE DE RABAT · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année de Pharmacie · Rabat

Session du vendredi 29 juillet 2016

2016 Énoncé

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2 - 2}{2u_n + 3}$$

On pose pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$v_n = \ln\left(\frac{1+u_n}{2+u_n}\right)$$

Q1 $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est suite géométrique de raison

A 2 B $\frac{1}{2}$ C $-\frac{1}{2}$ D -2

Q2 Valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

A $+\infty$ B 0 C 1 D $-\infty$

Q3 Expression de u_n en fonction de v_n

A $\frac{1+2e^{v_n}}{1+e^{v_n}}$ B $\frac{1-2e^{v_n}}{-1+e^{v_n}}$

C $\frac{1-e^{v_n}}{1+2e^{v_n}}$ D $\frac{1+e^{v_n}}{-1+2e^{v_n}}$

Q4 Valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

A 2 B 1 C -1 D -2

On considère deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^x \ln(1+e^{-x})$$

et

$$g(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$$

Q5 Valeur de $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

A $-\infty$ B $+\infty$ C 0 D 1

Q6 Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x)$ est égale

A $-f'(x) - g(x)$
B $f'(x) + g(x)$
C $-f'(x) + g(x)$
D $f'(x) - g(x)$

Q7 Valeur de l'intégrale $\int_0^{\ln 2} f(x)\,dx$

A $\ln 3 - 2\ln 2$ B $\ln 3 + 2\ln 2$
C $3\ln 3 - 4\ln 2$ D $4\ln 3 + 2\ln 2$

Une urne contient des boules, chacune de ces boules porte un des numéros suivants : 1 ; 2 ; 3.
On tire une boule de l'urne et soit X la variable aléatoire qui désigne le numéro de la boule tirée. Le tableau suivant donne la loi de probabilité de X

x_i	1	2	3
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{3}$	p	$\frac{1}{6}$

Q8 Valeur de p

A $\frac{2}{3}$ B $\frac{5}{6}$ C $\frac{1}{2}$ D $\frac{1}{6}$

Q9 La probabilité pour que X soit impaire

A $\frac{1}{6}$ B $\frac{5}{6}$ C $\frac{1}{2}$ D $\frac{1}{3}$

Q10 On tire de la même urne successivement et avec remise quatre boules.
La probabilité d'obtenir au moins une boule portant le numéro 2 parmi les quatre boules tirées

A $\frac{11}{16}$ B $\frac{5}{12}$ C $\frac{15}{16}$ D $\frac{7}{12}$

FACULTÉ DE MÉDECINE ET DE PHARMACIE DE RABAT · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année de Pharmacie · Rabat

Session du vendredi 29 juillet 2016

2016

Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10
A	D	B	C	C	B	C	C	C	C

Q1 ✔ Réponse A

$1+u_{n+1}=\dfrac{u_n^2+2u_n+1}{2u_n+3}=\dfrac{(u_n+1)^2}{2u_n+3}$ et
$2+u_{n+1}=\dfrac{u_n^2+4u_n+4}{2u_n+3}=\dfrac{(u_n+2)^2}{2u_n+3}$.
Donc $\dfrac{1+u_{n+1}}{2+u_{n+1}}=\left(\dfrac{1+u_n}{2+u_n}\right)^2$ et $v_{n+1}=2v_n$: raison 2.

Q2 ✔ Réponse D

$v_0=\ln\dfrac{1}{2}<0$ et $v_n=2^n\ln\dfrac{1}{2}\to-\infty$.

Q3 ✔ Réponse B

$e^{v_n}(2+u_n)=1+u_n \iff u_n\left(e^{v_n}-1\right)=1-2e^{v_n} \iff u_n=\dfrac{1-2e^{v_n}}{-1+e^{v_n}}$.

Q4 ✔ Réponse C

$v_n\to-\infty$, donc $e^{v_n}\to0$ et $u_n\to\dfrac{1-0}{-1+0}=-1$.

Q5 ✔ Réponse C

Avec $t=-x\to+\infty$: $\ln(1+e^t)=t+\ln(1+e^{-t})$, donc
$f(x)=e^{-t}\left(t+\ln(1+e^{-t})\right)\to0$ (car $te^{-t}\to0$).

Q6 ✔ Réponse B

$f'(x)=e^x\ln(1+e^{-x})+e^x\cdot\dfrac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}=f(x)-\dfrac{1}{1+e^{-x}}=$
$f(x)-g(x)$. Donc $f(x)=f'(x)+g(x)$.

Q7 ✔ Réponse C

$f=f'+g$, et une primitive de g est $\ln(1+e^x)$:
$\displaystyle\int_0^{\ln 2}f=\left[f(x)+\ln(1+e^x)\right]_0^{\ln 2}$.
$f(\ln 2)=2\ln\dfrac{3}{2}$ et $f(0)=\ln 2$, donc l'intégrale vaut
$2\ln3-2\ln2-\ln2+\ln3-\ln2=3\ln3-4\ln2$.

Q8 ✔ Réponse C

La somme des probabilités vaut 1 : $p=1-\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{2}$.

Q9 ✔ Réponse C

$P(X=1)+P(X=3)=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{2}$.

Q10 ✔ Réponse C

Événement contraire : aucune boule n°2, de probabilité
$\left(\dfrac{1}{2}\right)^4=\dfrac{1}{16}$. Donc $P=1-\dfrac{1}{16}=\dfrac{15}{16}$.

FACULTÉ DE MÉDECINE DENTAIRE DE CASABLANCA · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès · Faculté de Médecine Dentaire de Casablanca

Session de juillet 2018

2018

Énoncé

Q1 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \dfrac{2n+(-1)^n\sqrt{n}}{n+1}$, alors :

A $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

B $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$

C $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

D $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

E la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de limite

Q2 Soit $z = e^{\frac{2i\pi}{5}}$. On pose $\alpha = z + z^4$ et $\beta = z^2 + z^3$, alors :

A $\alpha+\beta = 1$ B $\alpha+\beta = 0$

C $\alpha\beta = 2$ D $\alpha\beta = -1$

E $\alpha\beta = 1$

Q3 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct d'origine O. On donne les points A et B d'affixes respectifs 3 et $4i$. Pour tout nombre complexe z $(z \neq 4i)$, on pose $Z = \dfrac{z-3}{z-4i}$
L'ensemble (C) des points d'affixe z tels que Z soit un imaginaire pur non nul est :

A Un demi-cercle contenant O

B Le cercle de diamètre $[AB]$

C le cercle de diamètre $[AB]$ privé du point B

D le segment $[AB]$ privé du point B

E Autre résultat

Q4 L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
Le projeté orthogonal du point $A(1;6;0)$ sur le plan d'équation : $-x+3y-z+5=0$ a pour coordonnées :

A $(3;1;5)$ B $(2;3;1)$

C $(3;0;2)$ D $(-2;3;-6)$

E autre résultat

Q5 Une urne contient 8 boules indiscernables au toucher, 5 sont rouges et 3 sont noires.
On tire successivement et sans remise deux boules de cette urne. La probabilité de tirer une boule rouge au premier tirage sachant qu'on a obtenu une boule noire au second tirage est :

A $\dfrac{15}{56}$ B $\dfrac{3}{8}$ C $\dfrac{5}{7}$ D $\dfrac{3}{24}$

E Autre résultat

Q6 Pour tout entier naturel non nul n, on pose : $u_n = \sum\limits_{k=1}^{k=n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{5^k}$, alors :

A $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{6}$

B $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{2}{6}$

C $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{2}$

D $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{2}{3}$

E la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'admet pas de limite

Q7 L'intégrale $\displaystyle\int_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}\,dt$ est égale à :

A $\ln\left(\dfrac{5}{2}\right)$ B $2\ln 2$ C 0 D 2

E autre résultat

Q8 Une solution de l'équation différentielle $y'' + 4y = 0$ telle que $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$ est la fonction f définie par :

A $f(x) = \cos(2x)$

B $f(x) = \sin(2x)$

C $f(x) = \cos(2x) + \sin(2x)$

D $f(x) = \cos(2x) - \sin(2x)$

E Autre résultat

Q9 On pose : $I = \displaystyle\int_1^e \frac{\ln t}{t^2}\,dt$, alors :

A $I = \dfrac{1}{e^2}$ B $I = 1 - \dfrac{2}{e}$

C $I = -\dfrac{1}{e}$ D $I = 1 - \dfrac{2}{e^3}$

E Autre résultat

Q10 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 - \dfrac{4e^x}{e^{2x}+1}$, alors :

A $(\forall x \in [0,+\infty[) \quad f(x) \geq 0$

B $(\forall x \in [0,+\infty[) \quad f'(x) < 0$

C la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$

D $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

E $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

FACULTÉ DE MÉDECINE DENTAIRE DE CASABLANCA · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès · Faculté de Médecine Dentaire de Casablanca

Session de juillet 2018

2018

Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10
B	D	E	C	C	A	C	A	B	E

Q1 ✔ Réponse B

$u_n = \dfrac{2n}{n+1} + \dfrac{(-1)^n\sqrt{n}}{n+1}$; le premier terme tend vers 2 et le second est majoré en valeur absolue par $\dfrac{\sqrt{n}}{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \to 0$. Donc $u_n \to 2$.

Q2 ✔ Réponse D

$z^5 = 1$ et $z \neq 1$, donc $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0$: $\alpha + \beta = -1$ (A et B fausses).
$\alpha\beta = z^3 + z^4 + z^6 + z^7 = z^3 + z^4 + z + z^2 = -1$: D.

Q3 ✔ Réponse E

Pour $M \neq A, B$: $Z = \dfrac{z - z_A}{z - z_B}$ est imaginaire pur non nul si et seulement si $(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) = \pm\dfrac{\pi}{2}$, c'est-à-dire M sur le cercle de diamètre $[AB]$.
Le point B est exclu ($z \neq 4i$), mais le point A aussi, puisqu'il donne $Z = 0$. L'ensemble est le cercle de diamètre $[AB]$ privé de A **et** de B : aucune des propositions A à D, d'où E.

Remarque : L'ensemble exact est le cercle de diamètre [AB] privé de A et de B (A donne Z = 0, exclu par « non nul »). C n'enlève que B ; la réponse rigoureuse est donc E (« Autre résultat »), mais le sujet visait probablement C. À trancher par le professeur.

Q4 ✔ Réponse C

$\vec{n}(-1; 3; -1)$, $\|\vec{n}\|^2 = 11$ et $-1 + 18 - 0 + 5 = 22$. Le projeté est $H = A - \dfrac{22}{11}\vec{n} = (1 + 2;\ 6 - 6;\ 0 + 2) = (3; 0; 2)$. (Vérification : $-3 + 0 - 2 + 5 = 0$.)

Q5 ✔ Réponse C

$P(R_1 \cap N_2) = \dfrac{5}{8} \times \dfrac{3}{7} = \dfrac{15}{56}$ et $P(N_2) = \dfrac{3}{8}$ (même loi que le premier tirage). Donc $P_{N_2}(R_1) = \dfrac{15/56}{3/8} = \dfrac{5}{7}$.

Q6 ✔ Réponse A

Somme géométrique de premier terme $\frac{1}{5}$ et de raison $-\frac{1}{5}$: $u_n \to \dfrac{1/5}{1 + 1/5} = \dfrac{1}{6}$.

Q7 ✔ Réponse C

La fonction intégrée est impaire (changer t en $-t$ change son signe) et l'intervalle est symétrique : l'intégrale est nulle.

Q8 ✔ Réponse A

$y = a\cos 2x + b\sin 2x$; $y(0) = a = 1$ et $y'(0) = 2b = 0$: $f(x) = \cos 2x$.

Q9 ✔ Réponse B

Par parties ($u = \ln t$, $v = -\frac{1}{t}$) :
$I = \left[-\dfrac{\ln t}{t}\right]_1^e + \displaystyle\int_1^e \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{e} + 1 - \frac{1}{e} = 1 - \frac{2}{e}$.

Q10 ✔ Réponse E

$\dfrac{4e^x}{e^{2x} + 1} = \dfrac{4}{e^x + e^{-x}}$ tend vers 0 en $\pm\infty$: les deux limites valent 1 (E, D fausse).
$f(0) = 1 - 2 = -1 < 0$ (A fausse). $f'(x) = \dfrac{4(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2}$ est positive pour $x > 0$ (B et C fausses).

FACULTÉ DE MÉDECINE DENTAIRE DE CASABLANCA · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès · Faculté de Médecine Dentaire de Casablanca

Session 2017–2018

2017 Énoncé

Q1 Soit g la fonction numérique définie par : $g(x) = \sqrt{\dfrac{-2x^2+5x-3}{x^2+6x-7}}$
On a $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$ est égale à :

A $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ B $+\infty$ C 0 D $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$
E $-\infty$

Q2 Soit h la fonction numérique définie par : $h(x) = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}$
Sa fonction dérivée première $h'(x)$ est définie par :

A $\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}$ B $\dfrac{x-1}{x^2}e^{-\frac{1}{x^2}}$
C $-\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$ D $\dfrac{(-2x-1)}{x^3}e^{\frac{1}{x}}$
E Autre résultat

Q3 Le plan est rapporté à un repère orthonormé. On considère la courbe (C) d'équation : $y = xe^x + \cos x$
On note Δ l'aire de la partie de plan délimité par la courbe (C), les deux axes du repère et la droite d'équation $x = \dfrac{\pi}{2}$.
La valeur de Δ, en unités d'aires, est :

A $\left(\dfrac{\pi}{2}-1\right)e^{\frac{\pi}{2}}$
B $\dfrac{\pi}{2}-1$
C $\left(\dfrac{\pi}{2}-1\right)e^{\frac{\pi}{2}}+2$
D $\left(\dfrac{\pi}{2}-1\right)e^{\frac{\pi}{2}}-1$
E Autre résultat

Q4 La limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \dfrac{5^n-3^n}{5^n+3^n}$ est égale à :

A $+\infty$ B 1 C 0 D -1
E Autre résultat

Q5 On considère la suite numérique $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :
$I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n e^{2t}\,dt$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$
Par une intégration par partie, on obtient la relation suivante entre I_n et I_{n-1} :

A $I_n = \dfrac{e^2}{2} + \dfrac{n}{2}I_{n-1}$
B $I_n = \dfrac{e^2}{2} - \dfrac{n}{2}I_{n-1}$
C $I_n = 2e^2 - 2nI_{n-1}$
D $I_n = \dfrac{e^2}{4} - \dfrac{n-1}{2}I_{n-1}$
E Autre résultat

Q6 L'ensemble S des réels appartenant à $[0, 2\pi[$ est vérifiant l'équation : $\sin^2 x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x = 0$ est :

A $S = \left\{0; \pi; \dfrac{4\pi}{3}; -\dfrac{\pi}{3}\right\}$
B $S = \left\{0; \dfrac{4\pi}{3}\right\}$
C $S = \left\{0; \pi; \dfrac{4\pi}{3}; \dfrac{5\pi}{3}\right\}$
D $S = \left\{0; \pi; \dfrac{7\pi}{6}; \dfrac{11\pi}{6}\right\}$
E Autre résultat

Q7 On considère dans l'ensemble des nombres complexes l'équation : $z + |z|^2 = 7 + i$
Cette équation admet :

A Deux solutions distinctes qui ont pour partie imaginaire 1
B Une solution réelle
C Deux solutions imaginaires pures
D Une solution qui a pour partie imaginaire 2
E Deux solutions conjuguées

Q8 On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, les points M et N d'affixes respectives : $z_M = 1+2i$ et $z_N = 3+2i$
Le milieu I du segment $[MN]$ a pour image, par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$, le point J dont l'affixe est :

A $z = e^{\frac{7i\pi}{12}}$
B $z = 2\sqrt{2}e^{\frac{11i\pi}{12}}$
C $z = 4\sqrt{2}e^{-\frac{5i\pi}{12}}$
D $z = 2\sqrt{2}e^{\frac{7i\pi}{12}}$
E Autre résultat

Q9 On considère dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, les deux plans suivants : $(P) : 2x + y - 3z + 1 = 0$ et $(Q) : x - y + 2 = 0$
L'équation du plan passant par le point O et contenant la droite (D) intersection des deux plans (P) et (Q) est :

A $x + y - 2z = 0$
B $x + y = 0$
C $2x + y - 3z = 0$
D $x + y + z + 3 = 0$
E Autre résultat

Q10 Une urne contient 8 boules indiscernables au toucher, 5 sont rouges et 3 sont noires.
On tire successivement et sans remise deux boules de cette urne.
La probabilité de tirer une boule rouge au deuxième tirage est :

A $\dfrac{5}{8}$ B $\dfrac{5}{7}$ C $\dfrac{3}{28}$ D $\dfrac{3}{7}$
E Autre résultat

FACULTÉ DE MÉDECINE DENTAIRE DE CASABLANCA · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès · Faculté de Médecine Dentaire de Casablanca

Session 2017–2018

2017 — Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10
D	D	C	B	B	C	A	D	A	A

Q1 ✔ Réponse D

$-2x^2+5x-3=-(2x-3)(x-1)$ et $x^2+6x-7=(x+7)(x-1)$. Pour $x\neq 1$, la fraction vaut $\dfrac{-(2x-3)}{x+7}\to\dfrac{1}{8}$, donc $g(x)\to\sqrt{\dfrac{1}{8}}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

Q2 ✔ Réponse D

$$h'(x)=-\frac{1}{x^2}e^{1/x}+\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{1/x}=-\frac{1}{x^2}\left(2+\frac{1}{x}\right)e^{1/x}=\frac{-2x-1}{x^3}e^{1/x}.$$

Q3 ✔ Réponse C

Sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $xe^x+\cos x\geq 0$. Une primitive est $(x-1)e^x+\sin x$, donc

$$\Delta=\left(\frac{\pi}{2}-1\right)e^{\pi/2}+1-(-1+0)=\left(\frac{\pi}{2}-1\right)e^{\pi/2}+2.$$

Q4 ✔ Réponse B

$$u_n=\frac{1-\left(\frac{3}{5}\right)^n}{1+\left(\frac{3}{5}\right)^n}\to 1.$$

Q5 ✔ Réponse B

Avec $u=t^n$ et $v=\frac{e^{2t}}{2}$:

$$I_n=\left[\frac{t^n e^{2t}}{2}\right]_0^1-\frac{n}{2}\int_0^1 t^{n-1}e^{2t}\,dt=\frac{e^2}{2}-\frac{n}{2}I_{n-1}.$$

Q6 ✔ Réponse C

$\sin x\left(\sin x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=0$: $\sin x=0$ donne 0 et π ; $\sin x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ donne $\dfrac{4\pi}{3}$ et $\dfrac{5\pi}{3}$ dans $[0,2\pi[$. (A contient $-\frac{\pi}{3}\notin[0,2\pi[$.)

Q7 ✔ Réponse A

Avec $z=x+iy$: la partie imaginaire donne $y=1$, la partie réelle $x+x^2+1=7$, soit $x^2+x-6=0$: $x=2$ ou $x=-3$. Les solutions $2+i$ et $-3+i$ ont toutes deux pour partie imaginaire 1.

Q8 ✔ Réponse D

$z_I=2+2i=2\sqrt{2}\,e^{i\pi/4}$. La rotation multiplie par $e^{i\pi/3}$: $z_J=2\sqrt{2}\,e^{i(\pi/4+\pi/3)}=2\sqrt{2}\,e^{7i\pi/12}$.

Q9 ✔ Réponse A

Les plans contenant (D) ont pour équation $(2x+y-3z+1)+\lambda(x-y+2)=0$ (ou (Q) lui-même, qui ne passe pas par O). Passer par O impose $1+2\lambda=0$, soit $\lambda=-\frac{1}{2}$:

$$\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}y-3z=0\iff x+y-2z=0.$$

Q10 ✔ Réponse A

Probabilités totales : $P(R_2)=\dfrac{5}{8}\times\dfrac{4}{7}+\dfrac{3}{8}\times\dfrac{5}{7}=\dfrac{20+15}{56}=\dfrac{35}{56}=\dfrac{5}{8}$. (Par symétrie, chaque tirage a la même loi que le premier.)

FACULTÉ DE MÉDECINE DENTAIRE DE CASABLANCA · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès · Faculté de Médecine Dentaire de Casablanca

Session 2015–2016

2015 Énoncé

Q1 Si g est la fonction numérique définie par $g(x) = x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ est égale à :

A e B $+\infty$ C 1 D 0 E $-\infty$

Q2 L'intégrale $I = \displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}\,dx$ est égale à :

A e B $2(\sqrt{2}-1)$ C $2(\sqrt{2}+1)$ D e^2 E $2\sqrt{2}$

Q3 Pour $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ on pose $z = \dfrac{1+i\tan\theta}{1-\tan\theta}$ alors :

A $z = e^{\frac{i\theta}{2}}$ B $z = e^{i\theta}$ C $z = e^{-i\theta}$ D $z = -1$ E $z = e^{2i\theta}$

Q4 Si f est la fonction numérique définie par : $f(x) = \dfrac{\ln(-x^2-2x+3)}{\ln\left(-x+\frac{1}{2}\right)}$ alors son ensemble de définition est :

A $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$

B $\left]-3, -\frac{1}{2}\right[\cup \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$

C $\left]-3, -\frac{1}{2}\right[$

D $]-\infty, -3[\cup]1, +\infty[$

E $\left]-3, \frac{1}{2}\right[$

Q5 Si h est la fonction numérique définie par $h(x) = \dfrac{e^{x^2+3}}{x}$ alors sa fonction dérivée première $h'(x)$ est :

A $\left(2 - \frac{1}{x^2}\right)e^{x^2+3}$

B $\dfrac{x-1}{x^2}e^{x^2+3}$

C e^{x^2+3}

D $\dfrac{(2x-1)e^{x^2+3}}{x^2}$

E Autre résultat

Q6 La limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = n^2\left(\frac{1}{2}\right)^n$ est égale à :

A $+\infty$ B 1 C 0 D $\ln 2$ E $\dfrac{\ln 2}{2}$

Q7 Soit S le point d'affixe 3 et T le point d'affixe $4i$. On considère l'ensemble $(E) = \{M(z)/|z-3| = |3-4i|\}$

A (E) est la médiatrice du segment $[ST]$

B (E) est la droite (ST)

C (E) est le cercle de centre le point Ω d'affixe $3-4i$ et de rayon 3

D (E) est le cercle de centre S et de rayon 5

E (E) est le milieu du segment $[ST]$

Q8 L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les deux points $A(3,1,3)$ et $B(-6,2,1)$.
L'ensemble des points équidistants des deux points A et B est :

A La droite d'équation : $\begin{cases} 9x - y + 2z + 11 = 0 \\ x + 7y - z - 7 = 0 \end{cases}$

B Le plan d'équation : $9x - y + 2z + 11 = 0$

C Le plan d'équation : $x + 7y - z - 7 = 0$

D Le plan d'équation : $9x - y + 2z + 10 = 0$

E Le point $\Omega(1,2,1)$

Q9 On considère la suite numérique $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n e^t\,dt$ pour tout n de $\mathbb{N}$

A $I_{n+1} = e - nI_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$

B $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante

C $I_n \leq \dfrac{1}{n+2}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

D $I_n \leq \dfrac{e}{n+1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

E $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite divergente

Q10 Une urne contient des boules numérotées de 1 à n, réparties de la façon suivante : pour tout entier k compris entre 1 et n, l'urne contient k boules portant le numéro k. On tire au hasard une boule de l'urne et on note X le numéro obtenu. La probabilité de l'évènement $(X = k)$ est :

A $\dfrac{k}{2n(n+1)}$ B $\dfrac{2k}{n(n+1)}$ C $\dfrac{k}{n(n+1)}$ D $\dfrac{k}{2n}$ E $\dfrac{k}{2(n+1)}$

FACULTÉ DE MÉDECINE DENTAIRE DE CASABLANCA · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès · Faculté de Médecine Dentaire de Casablanca

Session 2015–2016

2015

Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10
C	B	E	B	A	C	D	B	D	B

Q1 ✔ Réponse C

Avec $h = \frac{1}{x} \to 0^+$: $g(x) = \frac{e^h - 1}{h} \to 1$.

Q2 ✔ Réponse B

Une primitive de $\frac{1}{x\sqrt{\ln x}}$ est $2\sqrt{\ln x}$. Donc $I = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{1} = 2(\sqrt{2} - 1)$.

Q3 ✔ Réponse E

Avec le dénominateur $1 - i\tan\theta$ (le « i » manque sur le sujet) : $1 + i\tan\theta = \frac{e^{i\theta}}{\cos\theta}$ et $1 - i\tan\theta = \frac{e^{-i\theta}}{\cos\theta}$, donc $z = \frac{e^{i\theta}}{e^{-i\theta}} = e^{2i\theta}$: E.

Tel qu'imprimé ($1 - \tan\theta$, réel), $z = \frac{e^{i\theta}}{\cos\theta - \sin\theta}$, dont le module n'est pas 1 en général : aucune proposition ne conviendrait.

Remarque : Tel qu'imprimé, le dénominateur est « 1 − tan θ » (réel) et aucune proposition n'est juste ; avec « 1 − i tan θ » (coquille probable), z = e^{2iθ} (E). À trancher par le professeur (corriger l'énoncé ou retirer la question).

Q4 ✔ Réponse B

Il faut :
- $-x^2 - 2x + 3 = -(x+3)(x-1) > 0$, soit $-3 < x < 1$;
- $-x + \frac{1}{2} > 0$, soit $x < \frac{1}{2}$;
- $\ln\left(-x + \frac{1}{2}\right) \neq 0$, soit $x \neq -\frac{1}{2}$.

D'où $D_f =]-3, -\frac{1}{2}[\cup]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$.

Q5 ✔ Réponse A

$h'(x) = \frac{2x \cdot x\, e^{x^2+3} - e^{x^2+3}}{x^2} = \frac{2x^2 - 1}{x^2} e^{x^2+3} = \left(2 - \frac{1}{x^2}\right) e^{x^2+3}$.

Q6 ✔ Réponse C

$u_n = \frac{n^2}{2^n} = e^{2\ln n - n\ln 2}$ et l'exposant tend vers $-\infty$: $u_n \to 0$.

Q7 ✔ Réponse D

$|3 - 4i| = 5$ est une constante : (E) est l'ensemble des points à distance 5 de S, le cercle de centre S et de rayon 5 (il passe d'ailleurs par T).

Q8 ✔ Réponse B

C'est le plan médiateur de $[AB]$, de vecteur normal $\vec{AB}(-9; 1; -2)$, passant par le milieu $I\left(-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; 2\right)$:

$-9\left(x + \frac{3}{2}\right) + \left(y - \frac{3}{2}\right) - 2(z - 2) = 0 \iff 9x - y + 2z + 11 = 0$.

Q9 ✔ Réponse D

Sur $[0, 1]$, $1 \leq e^t \leq e$, donc $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$: D (C fausse, et $I_n \to 0$, E fausse).
Par parties, $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$ (A fausse) ; $t^{n+1} \leq t^n$ donne une suite décroissante (B fausse).

Q10 ✔ Réponse B

L'urne contient $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ boules, dont k portent le numéro k : $P(X = k) = \frac{k}{n(n+1)/2} = \frac{2k}{n(n+1)}$.

FACULTÉ DE MÉDECINE DENTAIRE DE CASABLANCA · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès · Faculté de Médecine Dentaire de Casablanca

Session 2011–2012

2011 Énoncé

Q1 Soit la suite définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 2n + 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$. On a $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite

A arithmétique B géométrique
C croissante D décroissante
E autre

Q2 Soit la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ définie par : $v_n = \dfrac{e^n - 2^n}{2e^n + 3^n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$
La limite de la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est :

A 1 B $+\infty$ C 0 D $\dfrac{1}{2}$
E autre

Soit f la fonction de la variable réelle x définie par : $f(x) = \dfrac{x-2}{\ln(x-1)}$

Q3.1 L'ensemble de définition de la fonction f est :

A $]0, +\infty[$
B $]1, +\infty[$
C $]1, e[\cup]e, +\infty[$
D $]1, 2[\cup]2, +\infty[$
E autre

Q3.2 La limite $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ est égale à :

A 0 B $+\infty$ C 1 D -1
E autre

Q4 Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{(x^2)} + \sqrt{1+x^2}$ et g' sa fonction dérivée pour tout x de $\mathbb{R}$ on a :

A $g'(x) = 2xe^{(x^2)} + \dfrac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$
B $g'(x) = e^{(x^2)} + \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
C $g'(x) = 2xe^{(x^2)} + \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
D $g'(x) = 2e^{(x^2)} + \dfrac{x}{2\sqrt{1+x^2}}$
E autre

Q5 L'intégrale $\displaystyle\int_{0,25}^{1,5} \frac{dx}{\sqrt{4x+3}}$ est égale à :

A $\dfrac{1}{2}$ B $\dfrac{-1}{6}$ C $\dfrac{1}{12}$ D 1
E autre

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct on considère les points A, B et C d'affixe respectifs $a = 2 - i$; $b = -2 + 2i$ et $c = -2 - 2i$

Q6.1 quelle est la nature du triangle ABC ?

A isocèle B rectangle
C équilatérale D autre

Q6.2 sachant que 2 est une solution de l'équation (E) $z^3 + 2z^2 - 16 = 0$, quelles sont les deux autres solutions de (E) ?

A a et b B a et c
C b et c D autre

Q7 On considère la sphère (S) d'équation :
$x^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 - 4 = 0$
L'équation du plan tangent à la sphère (S) au point $A(0, 4, -1)$ est :

A $2x + y - z - 5 = 0$
B $y - 4 = 0$
C $3x + 4y + 2 = 0$
D autre

Q8 On lance deux fois de suite un dé parfait dont les six faces sont numérotées de 1 à 6.
Sachant que la somme des deux nombres obtenus est 10, quelle est la probabilité d'avoir «un double 5» ?

A $\dfrac{1}{432}$ B $\dfrac{1}{3}$ C $\dfrac{1}{12}$ D $\dfrac{1}{36}$
E autre

FACULTÉ DE MÉDECINE DENTAIRE DE CASABLANCA · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès · Faculté de Médecine Dentaire de Casablanca

Session 2011–2012

2011

Correction

Q1	Q2	Q3.1	Q3.2	Q4	Q5	Q6.1	Q6.2	Q7	Q8
C	C	D	C	C	A	D	C	B	B

Q1 ✔ Réponse C

$u_{n+1} - u_n = 2n + 1 > 0$: la suite est croissante. Elle n'est ni arithmétique (la différence varie) ni géométrique ($u_0 = 1$, $u_1 = 2$, $u_2 = 5$). En fait $u_n = n^2 + 1$.

Q2 ✔ Réponse C

Comme $e < 3$, on divise par 3^n : $v_n = \dfrac{\left(\frac{e}{3}\right)^n - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{2\left(\frac{e}{3}\right)^n + 1} \to \dfrac{0}{1} = 0$.

Q3.1 ✔ Réponse D

Il faut $x - 1 > 0$ et $\ln(x-1) \neq 0$, c'est-à-dire $x > 1$ et $x \neq 2$.

Q3.2 ✔ Réponse C

Avec $t = x - 1 \to 1$: $f(x) = \dfrac{t-1}{\ln t}$, inverse du taux d'accroissement de $\ln$ en 1, qui tend vers $\ln'(1) = 1$. La limite vaut 1.

Q4 ✔ Réponse C

$\left(e^{x^2}\right)' = 2xe^{x^2}$ et $\left(\sqrt{1+x^2}\right)' = \dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Q5 ✔ Réponse A

Une primitive est $\frac{1}{2}\sqrt{4x+3}$. L'intégrale vaut $\frac{1}{2}\left(\sqrt{9} - \sqrt{4}\right) = \frac{1}{2}$.

Q6.1 ✔ Réponse D

$AB = |b-a| = |-4+3i| = 5$, $AC = |c-a| = |-4-i| = \sqrt{17}$, $BC = |c-b| = |-4i| = 4$.
Les trois côtés sont différents (ni isocèle ni équilatéral) et $25 \neq 17 + 16$, $17 \neq 25 + 16$, $16 \neq 25 + 17$: il n'est pas rectangle.
Réponse : autre.

Q6.2 ✔ Réponse C

$z^3 + 2z^2 - 16 = (z-2)(z^2+4z+8)$, et $z^2 + 4z + 8 = 0$ a pour solutions $-2 \pm 2i$, c'est-à-dire b et c.

Q7 ✔ Réponse B

Centre $\Omega(0, 2, -1)$; le plan tangent en A est normal à $\overrightarrow{\Omega A}(0, 2, 0)$: il a pour équation $y = 4$, soit $y - 4 = 0$.

Q8 ✔ Réponse B

La somme 10 est obtenue par $(4,6)$, $(5,5)$ et $(6,4)$, issues équiprobables. Sachant la somme 10, la probabilité du double 5 est $\frac{1}{3}$.

FACULTÉ DE MÉDECINE DENTAIRE DE CASABLANCA · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès · Faculté de Médecine Dentaire de Casablanca

Session 2010–2011

2010 — Énoncé

Q1 Dans l'ensemble $\mathbb{R}$, la solution de l'équation $3\ln(x+1) - 2\ln x = \ln(x+7)$ est :

A 2 B 4 C 5 D 3 E autre

Q2 Le domaine de définition de la fonction f de la variable réelle x définie par : $f(x) = \ln\left|1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right|$ est :

A $]0,1[$ B $]1,+\infty[$
C $\mathbb{R} - \{1\}$ D $]0,+\infty[$
E $]0,1[\cup]1,+\infty[$

Q3 Pour tout réel x du domaine de définition de la fonction f définie par $f(x) = \ln\left|1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right|$ on a : $f'(x)$ est égale à :

A $\frac{\sqrt{x}}{|\sqrt{x}-1|}$ B $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$
C $\frac{1}{2(1-\sqrt{x})}$ D $\frac{1}{2x(\sqrt{x}-1)}$
E $\frac{1}{2x\,|\sqrt{x}-1|}$

Q4 La limite de la suite $\left(\frac{3}{2^{n+1}}\right)_{n\geq 0}$ est :

A 0 B $\frac{3}{2}$
C n'existe pas D $+\infty$
E autre

Q5 Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ on pose : $S_n = \frac{3}{2^2} + \frac{3}{2^4} + \cdots + \frac{3}{2^{2n}}$
La limite de la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ est :

A $0{,}5$ B 1 C 0 D $\frac{1}{3}$
E autre

Q6 L'intégrale $\int_1^2 (x + \ln x)\,dx$ est égale à :

A 2 B $1 + 2\ln 2$
C $-1 + \ln 2$ D $0{,}5 + 2\ln 2$
E autre

Q7 La forme algébrique du nombre complexe de module 2 et dont $\frac{5\pi}{6}$ est un argument est :

A $\sqrt{3} - i$ B $-\sqrt{3} - i$
C $-\sqrt{3} + i$ D $1 - i\sqrt{3}$
E autre

Q8 Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé on considère le point A d'affixe $1+i$ et le point B d'affixe $1-i$
L'ensemble des points $M(z)$ tels que $|z-1-i| = 2$ est :

A L'ensemble vide
B le cercle de diamètre $[AB]$
C la droite (AB)
D le cercle de centre B et de rayon 2
E le cercle de centre A et de rayon 2

Q9 g désigne la solution de l'équation $y'' + 3y' = 0$ vérifiant $g(0) = 0$ et $g'(0) = 3$ on a :

A $g(x) = 1 + e^{-3x}$
B $g(x) = 1 - e^{-3x}$
C $g(x) = -1 + e^{3x}$
D $g(x) = -1 + e^{-3x}$
E autre

Q10 Un étudiant a passé deux concours indépendants (C_1) et (C_2) Si la probabilité de réussir le concours (C_1) est égale à $\frac{1}{3}$ et la probabilité de réussir le concours (C_2) est égale à $\frac{1}{3}$ alors la probabilité de réussir L'un au moins des deux concours est égale à :

A $\frac{2}{3}$ B $\frac{5}{9}$ C $\frac{2}{9}$ D $\frac{4}{9}$ E $\frac{1}{9}$

FACULTÉ DE MÉDECINE DENTAIRE DE CASABLANCA · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès · Faculté de Médecine Dentaire de Casablanca

Session 2010–2011

2010

Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10
E	E	D	A	B	D	C	E	B	B

Q1 ✔ Réponse E

Pour $x > 0$, l'équation s'écrit $\ln \dfrac{(x+1)^3}{x^2} = \ln(x+7)$, soit $(x+1)^3 = x^2(x+7)$:

$$\begin{aligned} & x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = x^3 + 7x^2 \\ \iff & 4x^2 - 3x - 1 = 0 \\ \iff & x = 1 \text{ ou } x = -\tfrac{1}{4}. \end{aligned}$$

Seul $x = 1$ convient (vérification : $3\ln 2 = \ln 8$). Il n'est pas proposé : réponse « autre ».

Q2 ✔ Réponse E

Il faut $x > 0$ (pour $\sqrt{x}$ au dénominateur) et $1 - \dfrac{1}{\sqrt{x}} \neq 0$, soit $x \neq 1$.

Q3 ✔ Réponse D

$f(x) = \ln|\sqrt{x} - 1| - \dfrac{1}{2}\ln x$, donc

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} - \frac{1}{2x} = \frac{\sqrt{x} - (\sqrt{x}-1)}{2x(\sqrt{x}-1)} = \frac{1}{2x(\sqrt{x}-1)}.$$

Q4 ✔ Réponse A

$2^{n+1} \to +\infty$, donc $\dfrac{3}{2^{n+1}} \to 0$.

Q5 ✔ Réponse B

$$S_n = 3\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{4}\right)^k \to 3 \times \frac{1/4}{1 - 1/4} = 3 \times \frac{1}{3} = 1.$$

Q6 ✔ Réponse D

Une primitive est $\dfrac{x^2}{2} + x\ln x - x$. L'intégrale vaut $(2 + 2\ln 2 - 2) - \left(\dfrac{1}{2} - 1\right) = 2\ln 2 + 0{,}5$.

Q7 ✔ Réponse C

$$2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = -\sqrt{3} + i.$$

Q8 ✔ Réponse E

$|z - (1+i)| = AM = 2$: c'est le cercle de centre A et de rayon 2. (Le cercle de diamètre $[AB]$, lui, a pour centre le point d'affixe 1 et pour rayon 1.)

Q9 ✔ Réponse B

Racines caractéristiques 0 et -3 : $g(x) = a + be^{-3x}$.
$g'(0) = -3b = 3$ donne $b = -1$, et $g(0) = a - 1 = 0$ donne $a = 1$: $g(x) = 1 - e^{-3x}$.

Q10 ✔ Réponse B

Événement contraire : échouer aux deux, de probabilité $\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{4}{9}$ (indépendance). Donc $P = 1 - \dfrac{4}{9} = \dfrac{5}{9}$.

FACULTÉ DE MÉDECINE DENTAIRE DE CASABLANCA · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès · Faculté de Médecine Dentaire de Casablanca

Session 2009–2010

2009

Énoncé

Q1 Le produit des deux nombres $\sqrt[3]{a^2}$ et $\sqrt[4]{a^3}$ est :

A $\sqrt[7]{a^2(a+1)}$ B $a\sqrt[7]{a^2(a+1)}$ C $\sqrt[7]{a^5}$ D $\sqrt[12]{a^5}$ E $a\sqrt[12]{a^5}$

Q2 Soit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3}(1-u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$

La limite de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est :

A 0 B $\frac{1}{3}$ C $\frac{1}{4}$ D $+\infty$ E $-\infty$

Q3 Soit $(v_n)_{n\geq 0}$ une suite strictement positive telle que $\frac{v_{n+1}}{v_n} \leq 0{,}1$ pour tout n de $\mathbb{N}$

La limite de la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est :

A $0{,}1$ B $+\infty$ C 0 D $-\infty$ E autre

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct on considère le point A d'affixe $1+i$ et le point B d'affixe $\sqrt{3}-i$

Q4.1 La distance AB est égale à :

A $2-\sqrt{2}$ B $\sqrt{3}+1$ C $\sqrt{8-2\sqrt{3}}$ D $\sqrt{3}-1$ E $\sqrt{6+2\sqrt{3}}$

Q4.2 Un argument du nombre $\left(\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}\right)^{10}$ est :

A $\frac{\pi}{4}$ B $\frac{\pi}{12}$ C $\frac{\pi}{6}$ D $\frac{5\pi}{12}$ E autre

Q5 L'intégrale $\int_0^1 xe^{(x^2)}\,dx$ est égale à :

A $\frac{1}{2}$ B $\frac{e-1}{2}$ C $\frac{e+1}{4}$ D e E autre

Q6 La solution de l'équation $e^x - 5e^{-x} = 4$ est :

A $\ln 2$ B $\ln 5$ C $-\ln 5$ D $2\ln 2$ E 0

Soit f la fonction de la variable réelle x définie par : $f(x) = \frac{\ln(x^2+1)}{\ln(x^2)}$

Q7.1 L'ensemble de définition de la fonction f est :

A $\mathbb{R}^*$ B $\mathbb{R}^{*+}$ C $\mathbb{R}^* - \{-1\}$ D $\mathbb{R}^* - \{1,-1\}$ E $\mathbb{R}^* - \{1,e\}$

Q7.2 La limite $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ est égale à :

A 0 B $+\infty$ C 1 D $-\infty$ E autre

Q8 m est un nombre strictement positif, soient le plan (P_m) : $x-y+2z-m=0$ et la sphère (S) : $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2=0$

La valeur de m pour laquelle le plan (P_m) est tangent à la sphère (S) est :

A $\sqrt{6}$ B $2\sqrt{6}$ C $6\sqrt{6}$ D $\frac{\sqrt{6}}{6}$ E $2\sqrt{3}$

FACULTÉ DE MÉDECINE DENTAIRE DE CASABLANCA · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès · Faculté de Médecine Dentaire de Casablanca

Session 2009–2010

2009

Correction

Q1	Q2	Q3	Q4.1	Q4.2	Q5	Q6	Q7.1	Q7.2	Q8
E	C	C	C	C	B	B	D	C	B

Q1 ✔ Réponse E

Pour $a \geq 0$: $a^{2/3} \times a^{3/4} = a^{\frac{8+9}{12}} = a^{\frac{17}{12}} = a \times a^{\frac{5}{12}} = a\sqrt[12]{a^5}$.

Q2 ✔ Réponse C

Le point fixe vérifie $\ell = \dfrac{1-\ell}{3}$, soit $\ell = \dfrac{1}{4}$. Alors $u_{n+1} - \dfrac{1}{4} = -\dfrac{1}{3}\left(u_n - \dfrac{1}{4}\right)$, donc $u_n - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n \to 0$: la limite est $\dfrac{1}{4}$.

Q3 ✔ Réponse C

Par récurrence, $0 < v_n \leq 0{,}1^n\, v_0$, et $0{,}1^n \to 0$: $v_n \to 0$.

Q4.1 ✔ Réponse C

$z_B - z_A = (\sqrt{3}-1) - 2i$, donc $AB^2 = (\sqrt{3}-1)^2 + 4 = 4 - 2\sqrt{3} + 4 = 8 - 2\sqrt{3}$.

Q4.2 ✔ Réponse C

$1 + i = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$ et $\sqrt{3} - i = 2e^{-i\pi/6}$: le quotient a pour argument $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{5\pi}{12}$. Sa puissance 10 a pour argument $\dfrac{50\pi}{12} = \dfrac{25\pi}{6} \equiv \dfrac{\pi}{6}\ [2\pi]$.

Q5 ✔ Réponse B

Une primitive de xe^{x^2} est $\dfrac{1}{2}e^{x^2}$, d'où $\dfrac{e-1}{2}$.

Q6 ✔ Réponse B

Avec $t = e^x > 0$: $t - \dfrac{5}{t} = 4 \iff t^2 - 4t - 5 = 0 \iff t = 5$ (la racine -1 est exclue). Donc $x = \ln 5$.

Q7.1 ✔ Réponse D

$\ln(x^2+1)$ est toujours défini ; $\ln(x^2)$ exige $x \neq 0$, et le dénominateur ne doit pas s'annuler : $x^2 \neq 1$, soit $x \neq \pm 1$.

Q7.2 ✔ Réponse C

$\ln(x^2+1) = \ln(x^2) + \ln\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)$, donc $f(x) = 1 + \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\ln(x^2)} \to 1$.

Q8 ✔ Réponse B

$(S) : (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 4$, centre $(1,1,0)$, rayon 2. La distance du centre au plan vaut $\dfrac{|1-1+0-m|}{\sqrt{6}} = \dfrac{m}{\sqrt{6}}$; elle égale 2 pour $m = 2\sqrt{6}$.

ÉCOLES NATIONALES DES SCIENCES APPLIQUÉES · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année des ENSA · Maroc

Session de juillet 2026 · Durée 1h30

2026 — Énoncé

Q1 Soit Z un nombre complexe tel que : $Z = \dfrac{(1+i)^4\left(1+i\sqrt{3}\right)^3}{(1-i)^5}$.
Un argument de Z est égale à :

A $\dfrac{2\pi}{3}$ B $\dfrac{5\pi}{4}$ C $\dfrac{\pi}{4}$ D $\dfrac{3\pi}{2}$

Q2 On note S l'ensemble des points M du plan complexe d'affixe z vérifiant : $|i\bar{z}+1-2i| = |z-1|$. Alors

A S est le cercle de centre $\Omega(1,2)$ et de rayon 1
B S est la droite d'équation $y = x-2$
C $S = \mathbb{C}$
D $S = \varnothing$

Q3 Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct, on considère les points $A(2)$, $B(-1+i)$ et $C(3+3i)$.
Le triangle ABC est :

A Équilatéral
B Rectangle en C
C Isocèle et rectangle en A
D Isocèle et rectangle en B

Q4 L'expression simplifiée de $\sum_{k=2}^{n} \ln\left(\dfrac{k^2-1}{k^2}\right)$, $n \geq 2$, est :

A $\ln\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)$ B $\ln\left(\dfrac{2n}{2n+1}\right)$
C $\ln\left(\dfrac{2n+1}{n}\right)$ D $\ln\left(\dfrac{n+1}{2n}\right)$

Q5 On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{k}{\sqrt{4n^2-k^2}}$.
Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ est égale à :

A $2+\sqrt{3}$ B $2-\sqrt{3}$ C $2\sqrt{3}$ D $3\sqrt{2}$

Q6 Soit n un entier naturel. On note a l'entier naturel tel que $0 \leq a \leq 6$ et $3^{2n+1} + 2^{4n+2} \equiv a\ [7]$.
La valeur de a est :

A $a=3$ B $a=2$ C $a=1$ D $a=0$

Q7 Le PGCD de $2^{445}+7$ et 15 est :

A 1 B 2 C 3 D 9

Q8 On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \geq 0$, $u_{n+1} = u_n + e^{u_n}$.
Alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$

A 0 B 1 C e D $+\infty$

Q9 Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 1 + \dfrac{2}{u_n}$, $\forall n \geq 0$.
Alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$

A -1 B $-\infty$ C 2 D $+\infty$

Q10 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\ln(\sin x)}{(\pi-2x)^2} =$

A $\dfrac{-1}{8}$ B $\dfrac{1}{8}$ C 0 D $\dfrac{1}{4}$

Q11 $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{\ln x}{x}\right)^{\frac{1}{x}} =$

A e B 1 C -1 D $\dfrac{1}{e}$

Q12 Soit f la fonction définie sur $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ par : $f(x) = x\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$.
On a : $f'(x) =$

A $\dfrac{x^2+x+1}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}$ B $\dfrac{x^2-x+1}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}$
C $\dfrac{x^2+x-1}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}$ D $\dfrac{x^2+2x-1}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}$

Q13 Soit f la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par $f(x) = \ln(1+x)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f^{(n)}$ la dérivée d'ordre n de f. Alors $f^{(n)}(x) =$

A $\dfrac{n!}{(x+1)^n}$
B $\dfrac{(-1)^n n!}{(x+1)^n}$
C $\dfrac{(n-1)!}{(x+1)^n}$
D $\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+1)^n}$

Q14 Soient $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}}\,dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}}\,dx$. Alors,

A $I = J = \dfrac{\pi}{4}$ B $I = J = \dfrac{\pi}{2}$
C $I = \dfrac{\pi}{4}$ et $J = \pi$ D $I = J = 0$

Q15 La valeur de l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{1}{1+\sin x}\,dx$ est :

A $1-\sqrt{2}$ B $1+\sqrt{2}$
C $2+\sqrt{2}$ D $2-\sqrt{2}$

Q16 Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{1+(\ln(x))^2}}$.
La primitive de f sur $]0,+\infty[$ qui s'annule en 1 est :

A $\ln\left(2x+\sqrt{1+(\ln x)^2}\right)$
B $\ln\left(\ln x+\sqrt{1+(\ln x)^2}\right)$
C $\ln\left(x\ln x+\sqrt{1+(\ln x)^2}\right)$
D $2\ln\left(\ln x+\sqrt{1+(\ln x)^2}\right)$

Q17 Soient $\mathcal{C}$ le cercle de centre $\Omega(2;-1)$ et de rayon $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$, et D la droite d'équation $2x+y=0$.
Une droite tangente à $\mathcal{C}$ et parallèle à D a pour équation :

A $2x+y-\dfrac{1}{2}=0$ B $2x+y-1=0$
C $2x+y-2=0$ D $2x+y+1=0$

Q18 On considère la droite $\mathcal{D}$ passant par $A(1,-2,0)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}(1,1,-1)$. Soit $B(0,1,-2)$ un point de l'espace. Les coordonnées du point H, projeté orthogonal de B sur $\mathcal{D}$ sont :

A $\left(\dfrac{7}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{4}{3}\right)$ B $\left(\dfrac{7}{3},-\dfrac{2}{3},-\dfrac{4}{3}\right)$
C $\left(\dfrac{7}{6},-\dfrac{5}{6},-\dfrac{4}{3}\right)$ D $\left(\dfrac{1}{3},-\dfrac{1}{3},-\dfrac{2}{3}\right)$

Q19 Un étudiant se rend à l'université pour passer un concours. Pour ce trajet, il a le choix entre quatre itinéraires possibles, notés A, B, C et D. Les probabilités qu'il choisisse les itinéraires A, B et C sont respectivement : $P(A) = \dfrac{1}{3}$, $P(B) = \dfrac{1}{4}$, $P(C) = \dfrac{1}{12}$.
Les probabilités d'arriver en retard en empruntant ces trois itinéraires sont données par : $P(R \mid A) = \dfrac{1}{20}$, $P(R \mid B) = \dfrac{1}{10}$, $P(R \mid C) = \dfrac{1}{5}$, où R désigne l'événement arriver en retard.
En revanche, l'itinéraire D présente une fiabilité totale : l'étudiant n'arrive jamais en retard lorsqu'il l'emprunte. Autrement dit : $P(R \mid D) = 0$. Sachant que l'étudiant arrive en retard, la probabilité p qu'il ait emprunté l'itinéraire C est

A $p = \dfrac{2}{7}$ B $p = \dfrac{1}{7}$
C $p = \dfrac{3}{7}$ D $p = \dfrac{1}{2}$

Q20 Une information de type *vrai/faux* est transmise à l'intérieur d'une population. À chaque transmission :

- avec une probabilité p $(0 < p < 1)$, l'information est transmise fidèlement à la personne suivante ;
- avec une probabilité $1-p$, l'information est transmise de manière contraire.

On note p_n la probabilité que l'information soit correcte après n transmissions, avec $p_0 = 1$.

A $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \dfrac{1}{5}$ B $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \dfrac{1}{4}$
C $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \dfrac{1}{3}$ D $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \dfrac{1}{2}$

ÉCOLES NATIONALES DES SCIENCES APPLIQUÉES · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année des ENSA · Maroc

Session de juillet 2026 · Durée 1h30

2026 — Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14
B	B	C	D	B	D	C	D	C	A	B	C	D	A

Q15	Q16	Q17	Q18	Q19	Q20
D	B	A	B	A	D

Q1 — ✔ Réponse B

$(1+i)^4 = (2i)^2 = -4$ et $\left(1+i\sqrt{3}\right)^3 = \left(2e^{i\pi/3}\right)^3 = -8$: le numérateur vaut 32, d'argument 0. Comme $(1-i)^5 = \left(\sqrt{2}\,e^{-i\pi/4}\right)^5$ a pour argument $-\dfrac{5\pi}{4}$, $\arg Z \equiv \dfrac{5\pi}{4}\ [2\pi]$.

Q2 — ✔ Réponse B

$i\overline{z}+1-2i = i\,(\overline{z}-2-i)$, donc $|i\overline{z}+1-2i| = |z-(2-i)|$. La condition $|z-(2-i)| = |z-1|$ décrit la médiatrice de $[PQ]$ avec $P(2,-1)$ et $Q(1,0)$: elle passe par $\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$ et est dirigée par $(1,1)$, d'où $y = x-2$.

Q3 — ✔ Réponse C

$\overrightarrow{AB}(-3,1)$ et $\overrightarrow{AC}(1,3)$: $AB = AC = \sqrt{10}$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -3+3 = 0$. Le triangle est isocèle et rectangle en A.

Q4 — ✔ Réponse D

$\dfrac{k^2-1}{k^2} = \dfrac{k-1}{k}\cdot\dfrac{k+1}{k}$, et les produits sont télescopiques :

$$\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k}\cdot\prod_{k=2}^{n}\frac{k+1}{k} = \frac{1}{n}\cdot\frac{n+1}{2} = \frac{n+1}{2n}.$$

Q5 — ✔ Réponse B

C'est une somme de Riemann : $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k/n}{\sqrt{4-(k/n)^2}} \to \int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{4-x^2}} = \Big[-\sqrt{4-x^2}\Big]_0^1 = 2-\sqrt{3}$.

Q6 — ✔ Réponse D

$3^{2n+1} = 3\times 9^n \equiv 3\times 2^n\ [7]$ et $2^{4n+2} = 4\times 16^n \equiv 4\times 2^n\ [7]$. La somme est $\equiv 7\times 2^n \equiv 0\ [7]$: $a = 0$.

Q7 — ✔ Réponse C

$2^4 = 16 \equiv 1\ [15]$ et $445 = 4\times 111+1$, donc $2^{445}+7 \equiv 2+7 = 9\ [15]$. Ce nombre est divisible par 3 mais pas par 5 : le PGCD vaut 3.

Q8 — ✔ Réponse D

$u_{n+1}-u_n = e^{u_n} > 0$: la suite est croissante, donc $u_n \geq 1$ et $u_{n+1}-u_n \geq e$. Ainsi $u_n \geq 1+ne \to +\infty$.

Q9 — ✔ Réponse C

$u_n > 0$ pour tout n, donc $u_{n+1}-2 = \dfrac{2-u_n}{u_n}$. On a $u_n \geq 1$, puis $u_n \geq \dfrac{3}{2}$ dès $n \geq 2$ ($u_n \leq 3$), d'où $|u_{n+1}-2| \leq \dfrac{2}{3}|u_n-2|$: $u_n \to 2$ (point fixe positif de $\ell = 1+\frac{2}{\ell}$).

Q10 — ✔ Réponse A

Avec $x = \dfrac{\pi}{2}+h$: $\sin x = \cos h$ et $\ln(\cos h) \sim -\dfrac{h^2}{2}$, tandis que $(\pi-2x)^2 = 4h^2$. La limite vaut $-\dfrac{1}{8}$.

Q11 — ✔ Réponse B

$\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)^{1/x} = \exp\left(\dfrac{\ln(\ln x)-\ln x}{x}\right)$ et l'exposant tend vers 0 : la limite vaut $e^0 = 1$.

Q12 — ✔ Réponse C

Pour $x > 1$:

$$f'(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\left(1+\frac{x}{x^2-1}\right) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x+1}\cdot\frac{x^2+x-1}{x^2-1} = \frac{x^2+x-1}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}.$$

Q13 — ✔ Réponse D

$f'(x) = (1+x)^{-1}$, $f''(x) = -(1+x)^{-2}$, $f'''(x) = 2(1+x)^{-3}\ldots$ Par récurrence, $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+1)^n}$.

Q14 — ✔ Réponse A

Le changement $x \mapsto \dfrac{\pi}{2}-x$ échange sin et cos : $I = J$. Et $I+J = \displaystyle\int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2}$, donc $I = J = \dfrac{\pi}{4}$.

Q15 — ✔ Réponse D

$\dfrac{1}{1+\sin x} = \dfrac{1-\sin x}{\cos^2 x}$ a pour primitive $\tan x - \dfrac{1}{\cos x}$. L'intégrale vaut $\left(1-\sqrt{2}\right)-(0-1) = 2-\sqrt{2}$.

Q16 — ✔ Réponse B

Avec $u = \ln x$: $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \ln\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)$. La primitive $\ln\left(\ln x+\sqrt{1+(\ln x)^2}\right)$ vaut $\ln 1 = 0$ en $x = 1$.

Q17 — ✔ Réponse A

Les parallèles à D ont pour équation $2x+y+c = 0$. Tangence : $\dfrac{|4-1+c|}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$, soit $|3+c| = \dfrac{5}{2}$, $c = -\dfrac{1}{2}$ ou $c = -\dfrac{11}{2}$. Seule $2x+y-\dfrac{1}{2} = 0$ est proposée.

Q18 — ✔ Réponse B

$H = A+t\,\vec{u}$ avec $t = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2} = \dfrac{-1+3+2}{3} = \dfrac{4}{3}$ ($\overrightarrow{AB}(-1,3,-2)$). Donc $H\left(\dfrac{7}{3},-\dfrac{2}{3},-\dfrac{4}{3}\right)$.

Q19 ✔ Réponse **A**

$P(R) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{20} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{10} + \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{5} + 0 = \frac{2+3+2}{120} = \frac{7}{120}$, et $P(C \cap R) = \frac{1}{60} = \frac{2}{120}$. Donc $p = \frac{2}{7}$.

Q20 ✔ Réponse **D**

$p_{n+1} = p\,p_n + (1-p)(1-p_n) = (2p-1)p_n + 1 - p$. Le point fixe est $\frac{1}{2}$ et $p_n - \frac{1}{2} = (2p-1)^n\left(p_0 - \frac{1}{2}\right) \to 0$ car $|2p-1| < 1$.

ÉCOLES NATIONALES DES SCIENCES APPLIQUÉES · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année des ENSA · Maroc

Session de juillet 2025 · Durée 1h30

2025 Énoncé

Q1 Le nombre complexe : $Z = \left(-1+i\sqrt{3}\right)^{2010} + \left(-1-i\sqrt{3}\right)^{2010}$.
La valeur de Z est :

A 2^{2009}

B $2i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\exp\left(\frac{i4\pi}{3}\right)$

C $2\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)\exp\left(\frac{i2\pi}{3}\right)$

D 2^{2011}

Q2 Dans $\mathbb{C}$, on considère l'équation (1) : $z^6 = (1-i)\bar{z}$.
On note z une solution non nulle quelconque de l'équation (1). Alors :

A $|z| = 1$ B $|z| = \sqrt{3}$
C $|z| = 2^{1/5}$ D $|z| = 2^{1/10}$

Q3 Dans $\mathbb{C}$, on considère l'équation (2) : $z^2 + z + 1 = \frac{1}{z+1}$.
On note z_1 et z_2 les solutions non réelles de l'équation (2). On a :

A $|z_1| = |z_2|$ B $|z_1| > |z_2|$
C $|z_1| < |z_2|$ D $|z_1| = 2|z_2|$

Q4 On note S l'ensemble des points du plan complexe M dont l'affixe z vérifie $|z-3| = \frac{\sqrt{2}}{2}|z-5|$. Alors :

A $S = \varnothing$
B $L = \mathbb{C}$
C S = le cercle de centre $(1,0)$ et de rayon $2\sqrt{2}$
D S = le cercle de centre $(0,1)$ et de rayon $\frac{1}{2}$

Q5 Dans le plan complexe, on considère les points A, B, C et D d'affixe respective 1, -1, i et $-i$. On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1. Si $M \in \mathbb{U}$, on note $p(M)$ le produit des distances de M aux points A, B, C, D : $p(M) = MA \times MB \times MC \times MD$.
On pose $m = \sup_{M\in\mathbb{U}} p(M)$. Alors la valeur de m est :

A $m = 1$ B $m = 2$
C $m = 3$ D $m = +\infty$

Q6 Soit a l'entier naturel défini par : $(2025)^{2025} \equiv a \bmod 7$.
La valeur de a est :

A $a = 3$ B $a = 2$ C $a = 5$ D $a = 1$

Q7 Le PGCD de $3^{123} - 5$ et 125 est :

A 1 B 5 C 25 D 125

Q8 On considère la suite (u_n) définie par : $u_n = \frac{\ln\left(1+\sqrt{n}\right)}{\ln\left(1+n^3\right)}$.
On note $L = \lim_{n\to+\infty} u_n$.

A $L = 1$ B $L = \sqrt{3}$
C $L = \frac{1}{6}$ D $L = \frac{1}{3}$

Q9 Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+2u_n}$, $\forall n \geq 0$.
En considérant la suite $v_n = \frac{1}{u_n}$, on trouve :

A $\lim_{n\to+\infty} nu_n = 0$ B $\lim_{n\to+\infty} nu_n = 1$
C $\lim_{n\to+\infty} nu_n = \frac{1}{2}$ D $\lim_{n\to+\infty} nu_n = \frac{1}{4}$

Q10 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $u_n = \sqrt{n+\sqrt{n-1+\sqrt{\cdots+\sqrt{1}}}}$.
La limite L de la suite (u_n) est :

A $L = 1$ B $L = \frac{\pi}{2}$
C $L = +\infty$ D $L = 0$

Q11 On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$.
La limite de S_n est :

A 0 B $\frac{1}{2}$ C 1 D 2

Q12 En admettant que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre réel $\left(3+\sqrt{5}\right)^n + \left(3-\sqrt{5}\right)^n$ est un entier pair, la limite $L = \lim_{n\to+\infty} \cos\left(\left(3+\sqrt{5}\right)^n \pi\right)$ vaut :

A $L = 0$ B $L = -1$
C $L = 1$ D $L = \frac{\pi}{4}$

Q13 Soit $a > 0$, alors $\lim_{x\to a^+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}-\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$ est :

A $-\frac{1}{\sqrt{2a}}$ B $-\frac{1}{\sqrt{a}}$ C $\frac{1}{\sqrt{a}}$ D $-\frac{2}{\sqrt{a}}$

Q14 On note I_n la suite définie par : $I_n = \int_0^1 \frac{x}{1+x^{2n}}\,dx$.
La limite L de I_n est :

A $L = \frac{1}{2}$ B $L = \frac{3}{2}$
C $L = 0$ D $L = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Q15 La valeur de l'intégrale $I = \int_0^{\sqrt{3}} x^2 \ln\left(x^2+1\right) dx$ est :

A $I = \sqrt{3}\ln(2) - \frac{\pi}{9}$
B $I = \sqrt{3}\ln(2) + \frac{\pi}{9}$
C $I = 2\left(\sqrt{3}\ln(2) - \frac{\pi}{9}\right)$
D $I = \sqrt{3}\ln(2)$

Q16 Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \frac{2\ln(x)}{x\left(1+(\ln(x))^2\right)}$.
La primitive de f sur $]0,+\infty[$ qui s'annule en 1 est :

A $\ln\left(1+(\ln(x))^2\right)$
B $(\ln(x))^2$
C $2\ln\left(1+(\ln(x))^2\right)$
D $\frac{x\ln(x)}{\ln(x)+1}$

Q17 Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère le plan (P) d'équation $2x-5y-6z+4=0$ et (S) la sphère de centre $\Omega(2;-2;3)$ et de rayon 3, alors :

A (P) coupe (S) suivant un cercle de rayon 3 et de centre Ω
B (P) coupe (S) suivant un cercle de rayon 3 et de centre le point de coordonnées $(2;2;3)$
C (P) est tangent à (S) au point de coordonnées $(2;2;3)$
D (P) est tangent à (S) au point de coordonnées $(2;0;-3)$

Q18 On jette deux fois de suite une pièce de monnaie non truquée et on note les arrivées de pile et de face. Soit p la probabilité d'avoir deux fois face sachant que le premier jet a donné face.

A $p = \frac{1}{2}$ B $p = \frac{1}{3}$
C $p = \frac{1}{4}$ D $p = \frac{3}{4}$

Q19 Une usine fabrique des composants électroniques et dispose d'une machine pour tester s'ils sont défectueux ou non. Les résultats sont comme suit :

- **Si le composant est défectueux :** la machine le détecte dans 90% des cas et dans 10% des cas elle échoue.
- **Si le composant n'est pas défectueux :** la machine l'indique correctement dans 99% des cas et elle échoue dans 1% des cas.

On tire au hasard un composant dans une large population où l'on sait que $0{,}1\%$ des composants sont défectueux, et on note p la probabilité qu'un composant tiré au hasard soit détecté défectueux par la machine. Alors $p =$

A $1{,}041\%$ B $1{,}089\%$
C $1{,}025\%$ D 1%

Q20 On jette n fois de suite un dé non truqué numéroté de 1 à 6, $n \geq 2$, et on note les numéros des faces obtenues. Soit p_n la probabilité d'avoir un nombre inférieur ou égal à 3 dans le second jet sachant que le premier jet a donné la face numéro 2. Soit $p = \lim_{n\to+\infty} p_n$.
La valeur de p est :

A $p = \frac{1}{2}$ B $p = \frac{1}{3}$ C $p = \frac{1}{6}$ D $p = 0$

ÉCOLES NATIONALES DES SCIENCES APPLIQUÉES · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année des ENSA · Maroc

Session de juillet 2025 · Durée 1h30

2025 — Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14
D	D	A	C	B	D	A	C	C	C	D	C	A	A

Q15	Q16	Q17	Q18	Q19	Q20
C	A	A	A	B	A

Q1 ✔ Réponse D

$-1+i\sqrt{3}=2e^{2i\pi/3}$, donc $\left(-1+i\sqrt{3}\right)^{2010}=2^{2010}e^{1340i\pi}=2^{2010}$. De même pour le conjugué, d'où $Z=2\times 2^{2010}=2^{2011}$.

Q2 ✔ Réponse D

En passant aux modules : $|z|^6=\sqrt{2}\,|z|$, et $z\neq 0$ donne $|z|^5=\sqrt{2}=2^{1/2}$, soit $|z|=2^{1/10}$.

Q3 ✔ Réponse A

Pour $z\neq -1$: $(z^2+z+1)(z+1)=1 \iff z^3+2z^2+2z=0 \iff z(z^2+2z+2)=0$. Les solutions non réelles sont $-1\pm i$, conjuguées : $|z_1|=|z_2|=\sqrt{2}$.

Q4 ✔ Réponse C

Avec $z=x+iy$: $2\left[(x-3)^2+y^2\right]=(x-5)^2+y^2 \iff x^2-2x+y^2-7=0 \iff (x-1)^2+y^2=8$: cercle de centre $(1,0)$ et de rayon $2\sqrt{2}$.

Q5 ✔ Réponse B

A,B,C,D ont pour affixes les racines de z^4-1, donc $p(M)=|z^4-1|\leq |z|^4+1=2$, avec égalité pour $z^4=-1$ (par exemple $z=e^{i\pi/4}$). Donc $m=2$.

Q6 ✔ Réponse D

$2025=7\times 289+2$, donc $2025^{2025}\equiv 2^{2025}\ [7]$. Or $2^3=8\equiv 1\ [7]$ et $2025=3\times 675$, d'où $2^{2025}\equiv 1\ [7]$: $a=1$.

Q7 ✔ Réponse A

$125=5^3$; il suffit de voir si 5 divise $3^{123}-5$, c'est-à-dire 3^{123}. Or $3^4\equiv 1\ [5]$ et $123=4\times 30+3$, donc $3^{123}\equiv 27\equiv 2\ [5]$: 5 ne divise pas $3^{123}-5$, le PGCD vaut 1.

Q8 ✔ Réponse C

$\ln\left(1+\sqrt{n}\right)\sim \ln\sqrt{n}=\dfrac{1}{2}\ln n$ et $\ln\left(1+n^3\right)\sim 3\ln n$, donc $u_n\to\dfrac{1/2}{3}=\dfrac{1}{6}$.

Q9 ✔ Réponse C

$v_{n+1}=\dfrac{1+2u_n}{u_n}=v_n+2$: (v_n) est arithmétique, $v_n=1+2n$.

Donc $nu_n=\dfrac{n}{1+2n}\to\dfrac{1}{2}$.

Q10 ✔ Réponse C

$u_n\geq\sqrt{n}\to+\infty$, donc $L=+\infty$.

Q11 ✔ Réponse D

Les $2n+1$ termes sont compris entre $\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2n+1}}=\dfrac{1}{n+1}$ et $\dfrac{1}{n}$:

$$\frac{2n+1}{n+1}\leq S_n\leq\frac{2n+1}{n},$$

et les deux bornes tendent vers 2.

Q12 ✔ Réponse C

Avec $(3+\sqrt{5})^n=2K_n-(3-\sqrt{5})^n$ (K_n entier) : $\cos\left((3+\sqrt{5})^n\pi\right)=\cos\left((3-\sqrt{5})^n\pi\right)$. Comme $0<3-\sqrt{5}<1$, $(3-\sqrt{5})^n\to 0$ et $L=\cos 0=1$.

Q13 ✔ Réponse A

On pose $x=a+h$, $h\to 0^+$. $\sqrt{x}-\sqrt{a}\sim\dfrac{h}{2\sqrt{a}}$ est négligeable devant $\sqrt{h}$, donc le numérateur est équivalent à $-\sqrt{h}$, et le dénominateur $\sqrt{h(2a+h)}\sim\sqrt{2a}\sqrt{h}$. La limite vaut $-\dfrac{1}{\sqrt{2a}}$.

Q14 ✔ Réponse A

$0\leq\dfrac{x}{1}-\dfrac{x}{1+x^{2n}}=\dfrac{x^{2n+1}}{1+x^{2n}}\leq x^{2n+1}$, donc $0\leq\dfrac{1}{2}-I_n\leq\dfrac{1}{2n+2}\to 0$: $L=\dfrac{1}{2}$.

Q15 ✔ Réponse C

Par parties :

$$I=\left[\frac{x^3}{3}\ln(x^2+1)\right]_0^{\sqrt{3}}-\frac{2}{3}\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x^4}{x^2+1}\,dx.$$

Le crochet vaut $\sqrt{3}\ln 4=2\sqrt{3}\ln 2$, et $\dfrac{x^4}{x^2+1}=x^2-1+\dfrac{1}{x^2+1}$ donne $\dfrac{2}{3}\left[\dfrac{x^3}{3}-x+\arctan x\right]_0^{\sqrt{3}}=\dfrac{2\pi}{9}$. Donc $I=2\left(\sqrt{3}\ln 2-\dfrac{\pi}{9}\right)$.

Q16 ✔ Réponse A

Avec $u=\ln x$, $f(x)=\dfrac{2u'u}{1+u^2}$: une primitive est $\ln\left(1+(\ln x)^2\right)$, qui vaut 0 en $x=1$.

Q17 ✔ Réponse A

$d(\Omega,P)=\dfrac{|4+10-18+4|}{\sqrt{65}}=0$: le plan passe par le centre, il coupe (S) suivant un grand cercle de centre Ω et de rayon 3.

Q18 ✔ Réponse A

Les deux jets sont indépendants : $p=P(F_2)=\dfrac{1}{2}$.

Q19 ✔ Réponse **B**

Probabilités totales :

$$p = 0{,}001 \times 0{,}9 + 0{,}999 \times 0{,}01 = 0{,}0009 + 0{,}00999 = 0{,}01089,$$

soit $p = 1{,}089\%$.

Q20 ✔ Réponse **A**

Les jets sont indépendants : $p_n = P(\text{second jet} \leq 3) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$ pour tout $n \geq 2$, donc $p = \dfrac{1}{2}$.

ÉCOLES NATIONALES DES SCIENCES APPLIQUÉES · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année des ENSA · Maroc

Session de juillet 2024

2024 Énoncé

Q1 Dans une salle d'examen où les places sont numérotées, 100 candidats passent un concours d'accès aux ENSA. On dispose des feuilles de brouillon de trois couleurs différentes ordonnées ainsi : bleu, vert, jaune.
Une feuille sur quatre, en commençant par la quatrième, contient le logo des ENSA.
Les feuilles sont distribuées, en respectant l'ordre des numéros des places ainsi que celui des couleurs mentionnées ci-dessus.
Le nombre de candidats ayant reçu une feuille de brouillon jaune contenant le logo est :

A 8 B 10 C 12 D 15

Q2 $\frac{1}{5}\cdot\sqrt{(101\times102\times103\times104)+1}=$

A 2101 B 2102 C 2103 D 2104

Q3 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(-1)^n\,n+1}{n+\sqrt{n}}=$

A 0
B 1
C -1
D n'a pas de limite

Q4 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos\left(\frac{2}{3}x\right)-\sqrt{3}\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)}{\cos(2x)}=$

A $\frac{11}{3}$ B $\frac{10}{6}$ C $\frac{10}{3}$ D $\frac{11}{6}$

Q5 Soit (u_n) une suite de réels éléments de $]0,1[$ telle que
$\forall n\in\mathbb{N},\ (1-u_n)u_{n+1}>\frac{1}{4}$.

A u_n est croissante et converge vers $\frac{1}{4}$
B u_n est décroissante et converge vers $\frac{1}{4}$
C u_n est croissante et converge vers $\frac{1}{2}$
D u_n est divergente

Q6 Dans l'ensemble $\mathbb{R}$, l'équation :

$$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=1$$

A admet une solution
B admet deux solutions
C admet trois solutions
D n'admet pas de solution

Q7 Soit $m\in\mathbb{R}$ et (E_m) l'équation d'inconnue réelle x :

$$(E_m):e^{2x}-2me^x+1=0$$

A Si $m\in]1,+\infty[$, (E_m) admet deux solutions de signe contraire
B Si $m\in]-1,1[$, (E_m) admet au moins une solution
C Si $m\in]-\infty,-1]$, (E_m) admet deux solutions négatives
D Si $m\in[1,+\infty[$, (E_m) admet deux solutions positives

Q8 Soit une fonction $f:[0,+\infty[\to[0,+\infty[$ dérivable telle que $f(0)=0$.
On suppose que :
$\forall x\geq0,\ f'(x)\leq af(x)\quad(a>0)$

A f est strictement croissante
B f est strictement décroissante
C f est une constante nulle
D f est une constante non nulle

Q9 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\begin{cases}e^{\frac{-1}{x^2}} & \text{si } x>0\\ 0 & \text{si } x\leq0\end{cases},\quad f' \text{ sa dérivée}$$

$$\lim_{x\to0}f'(x)=$$

A 0 B 1 C e D $+\infty$

Q10 $\displaystyle\int_1^2\frac{\ln(1+x)-\ln(x)}{x^2}\,dx=$

A $\frac{5}{2}\ln2+\frac{1}{2}\ln3$
B $\frac{7}{2}\ln2+\frac{3}{2}\ln3$
C $\frac{7}{2}\ln2-\frac{3}{2}\ln3-\frac{1}{2}$
D $\frac{7}{2}\ln2$

Q11 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x)e^x\,dx=$

A $1+e^{\frac{\pi}{2}}$ B $\frac{1+e^{\frac{\pi}{2}}}{2}$
C $5-e^{\frac{\pi}{2}}$ D $\frac{5-e^{\frac{\pi}{2}}}{2}$

Q12 $\forall n\in\mathbb{N}^*$, on pose :

$$I_n=\int_0^1\frac{dt}{(1+t^n)^2},\ \text{alors :}\ \lim_{n\to+\infty}I_n=$$

(Il n'est pas nécessaire de calculer I_n)

A 2 B $+\infty$ C $\frac{1}{4}$ D 1

Q13 Le nombre de diviseurs du nombre 10! est égal à :

A 20 B 207 C 270 D 10

Q14 Le reste de la division euclidienne du nombre $2^{123}+3^{121}$ par 11 est égal à :

A 0 B 1 C 2 D 3

Q15 Soit z_1 et z_2 les solutions de l'équation à variables complexes suivante :

$$iz^2+(2-3i)z+5i-5=0$$

$$|z_1|^2+|z_2|^2=$$

A 10 B 15 C 20 D 30

Q16 Soit le nombre complexe :

$$Z=\frac{1}{2}\left[(1+i)^4+(i-1)^4\right]$$

$\text{argument}(Z)\equiv$

A $0\ [2\pi]$ B $\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$
C $\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ D $\pi\ [2\pi]$

Q17 Dans le plan rapporté au repère orthonormé directe $(O,\vec{i},\vec{j})$, on considère les points A, B et C de coordonnées $A(2,6)$, $B(3,1)$ et $C(4,7)$. La distance du point A à la droite (BC) est égale à :

A $\frac{35}{\sqrt{37}}$ B $\frac{6}{\sqrt{37}}$ C $\frac{11}{\sqrt{37}}$ D $\frac{1}{\sqrt{37}}$

Q18 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points $A(1,-1,2)$, $B(3,5,4)$ et la sphère S telle que : $A,B\in S$ et le segment $[AB]$ passe par le centre de S.
L'équation du plan tangent à S au point $C(1,5,4)$ est :

A $2x-3y+3z+1=0$
B $x-3y+2z+6=0$
C $-x+3y+z-18=0$
D $-3x+2y+2z-15=0$

Une start-up de jeunes ingénieurs fabrique des capteurs de température dans deux sites différents.
En une journée, le site 1 fabrique deux fois plus de capteurs que le site 2.
Le pourcentage de capteurs défectueux est de 3% pour le site 1 et de 4% pour le site 2.
On prélève un capteur au hasard dans l'ensemble de la production d'une journée.

Q19 La probabilité que ce capteur provienne du site 1 et est défectueux est :

A 0,01 B 0,02 C 0,03 D 0,04

Q20 La probabilité que ce capteur provienne du site 1 sachant qu'il est défectueux est :

A 0,2 B 0,4 C 0,6 D 0,8

ÉCOLES NATIONALES DES SCIENCES APPLIQUÉES · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année des ENSA · Maroc

Session de juillet 2024

2024

Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14
A	A	D	B	C	D	A	C	A	C	B	D	C	A

Q15	Q16	Q17	Q18	Q19	Q20
B	D	C	C	B	C

Q1 ✔ Réponse A

Le candidat numéro k reçoit une feuille jaune si et seulement si k est un multiple de 3, et une feuille avec le logo si et seulement si k est un multiple de 4.
Il faut donc compter les multiples de $\mathrm{ppcm}(3,4)=12$ entre 1 et 100 : $12, 24, \ldots, 96$, soit $\left\lfloor \frac{100}{12} \right\rfloor = 8$ candidats.

Q2 ✔ Réponse A

Pour tout entier n :
$n(n+1)(n+2)(n+3)+1 = (n^2+3n)(n^2+3n+2)+1 = (n^2+3n+1)^2$.
Avec $n=101$:
$n^2+3n+1 = 10201+303+1 = 10505$, donc

$$\frac{1}{5}\sqrt{(101\times 102\times 103\times 104)+1} = \frac{10505}{5} = 2101.$$

Q3 ✔ Réponse D

Notons $u_n = \dfrac{(-1)^n n+1}{n+\sqrt{n}}$.
Pour n pair : $u_n = \dfrac{n+1}{n+\sqrt{n}} \to 1$. Pour n impair : $u_n = \dfrac{-n+1}{n+\sqrt{n}} \to -1$.
Les deux suites extraites ont des limites différentes : la suite n'a pas de limite.

Q4 ✔ Réponse B

En $\frac{\pi}{4}$, le numérateur vaut $\cos\frac{\pi}{6} - \sqrt{3}\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$ et le dénominateur $\cos\frac{\pi}{2} = 0$: forme indéterminée.
Les deux fonctions sont dérivables et s'annulent en $\frac{\pi}{4}$, donc la limite est le quotient des nombres dérivés (taux d'accroissement) :

$$N'(x) = -\tfrac{2}{3}\sin\left(\tfrac{2}{3}x\right) - 2\sqrt{3}\cos\left(2x-\tfrac{\pi}{3}\right), \quad N'\left(\tfrac{\pi}{4}\right) = -\tfrac{1}{3} - 3 = -\tfrac{10}{3}$$

$$D'(x) = -2\sin(2x), \quad D'\left(\tfrac{\pi}{4}\right) = -2.$$

La limite vaut $\dfrac{-10/3}{-2} = \dfrac{5}{3} = \dfrac{10}{6}$.

Q5 ✔ Réponse C

Pour tout réel t :
$t(1-t) = \frac{1}{4} - \left(t-\frac{1}{2}\right)^2 \le \frac{1}{4}$. Donc

$$(1-u_n)u_{n+1} > \tfrac{1}{4} \ge (1-u_n)u_n,$$

et comme $1-u_n>0$: $u_{n+1}>u_n$. La suite est croissante et majorée par 1, donc elle converge vers un réel $\ell \in]0,1]$.
Par passage à la limite : $(1-\ell)\ell \ge \frac{1}{4}$, c'est-à-dire $\left(\ell-\frac{1}{2}\right)^2 \le 0$, donc $\ell = \frac{1}{2}$.

Q6 ✔ Réponse D

L'équation impose $x \ge 1$. Posons $t = \sqrt{x-1} \ge 0$, donc $x = t^2+1$:

$$x+2t = (t+1)^2, \qquad x-2t = (t-1)^2.$$

L'équation devient $(t+1)+|t-1| = 1$.
- Si $t \ge 1$: $2t = 1$, soit $t = \frac{1}{2}$, impossible.
- Si $0 \le t < 1$: $(t+1)+(1-t) = 2 = 1$, impossible.

L'équation n'a pas de solution.

Q7 ✔ Réponse A

Avec $X = e^x > 0$, l'équation devient $X^2 - 2mX + 1 = 0$, de discriminant réduit m^2-1. Le produit des racines vaut 1 et leur somme $2m$.
- Si $m > 1$: deux racines positives distinctes $X_1 < 1 < X_2$ (produit 1), donc $x_1 = \ln X_1 < 0 < x_2 = \ln X_2$: deux solutions de signe contraire. **A est vraie.**
- Si $-1 < m < 1$: discriminant négatif, aucune solution (B fausse).
- Si $m \le -1$: les racines sont négatives (ou $X=-1$), aucune ne vaut e^x (C fausse).
- Si $m = 1$: $X = 1$ racine double, une seule solution $x = 0$ (D fausse).

Q8 ✔ Réponse C

Posons $g(x) = e^{-ax}f(x)$. Alors $g'(x) = e^{-ax}(f'(x) - af(x)) \le 0$: g est décroissante sur $[0,+\infty[$.
Donc $g(x) \le g(0) = 0$. Mais $g(x) \ge 0$ car f est à valeurs positives. Ainsi $g = 0$, puis $f = 0$: f est la constante nulle.

Q9 ✔ Réponse A

Pour $x<0$: $f'(x) = 0$. Pour $x>0$: $f'(x) = \dfrac{2}{x^3}e^{-1/x^2}$.
En posant $u = \frac{1}{x^2} \to +\infty$ quand $x \to 0^+$: $\dfrac{2}{x^3}e^{-1/x^2} = 2u^{3/2}e^{-u} \to 0$ (croissances comparées).
Les limites à gauche et à droite valent 0, donc $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 0$.

Q10 ✔ Réponse C

Intégration par parties avec $u(x) = \ln(1+x) - \ln x$, $u'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{x} = -\frac{1}{x(1+x)}$, et $v(x) = -\frac{1}{x}$:

$$\int_1^2 \frac{\ln(1+x)-\ln x}{x^2}dx = \left[-\frac{\ln(1+x)-\ln x}{x}\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{dx}{x^2(1+x)}.$$

Le crochet vaut $-\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2} + \ln 2 = \frac{3}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 3$.
Avec $\dfrac{1}{x^2(1+x)} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{1+x}$:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x^2(1+x)} = \left[-\ln x - \frac{1}{x} + \ln(1+x)\right]_1^2 = -2\ln 2 + \ln 3 + \frac{1}{2}.$$

Donc l'intégrale vaut $\frac{3}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 3 + 2\ln 2 - \ln 3 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2}\ln 2 - \frac{3}{2}\ln 3 - \frac{1}{2}$.

Q11 ✔ Réponse B

La fonction $F(x) = \dfrac{e^x(\sin x - \cos x)}{2}$ vérifie $F'(x) = \dfrac{e^x(\sin x - \cos x) + e^x(\cos x + \sin x)}{2} = e^x \sin x$.
Donc $\displaystyle\int_0^{\pi/2} e^x \sin x\, dx = F\left(\tfrac{\pi}{2}\right) - F(0) = \frac{e^{\pi/2}}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1+e^{\pi/2}}{2}$.

Q12 ✔ Réponse D

Pour $t \in [0,1]$:

$$0 \leq 1 - \frac{1}{(1+t^n)^2} = \frac{2t^n + t^{2n}}{(1+t^n)^2} \leq 2t^n + t^{2n}.$$

En intégrant :
$0 \leq 1 - I_n \leq \frac{2}{n+1} + \frac{1}{2n+1} \to 0$.
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 1$.

Q13 ✔ Réponse C

$10! = 2^8 \times 3^4 \times 5^2 \times 7$ (exposant de 2 : $5+2+1=8$; de 3 : $3+1=4$; de 5 : 2 ; de 7 : 1).
Le nombre de diviseurs est $(8+1)(4+1)(2+1)(1+1) = 9\times5\times3\times2 = 270$.

Q14 ✔ Réponse A

$2^{10} = 1024 = 93 \times 11 + 1$, donc $2^{10} \equiv 1\ [11]$ et $2^{123} = (2^{10})^{12} \times 2^3 \equiv 8\ [11]$.
$3^5 = 243 = 22 \times 11 + 1$, donc $3^5 \equiv 1\ [11]$ et $3^{121} = (3^5)^{24} \times 3 \equiv 3\ [11]$.
Ainsi $2^{123} + 3^{121} \equiv 8 + 3 = 11 \equiv 0\ [11]$: le reste est 0.

Q15 ✔ Réponse B

En divisant par i :
$z^2 - (3+2i)z + 5 + 5i = 0$.
Discriminant :
$\Delta = (3+2i)^2 - 4(5+5i) = -15 - 8i = (1-4i)^2$.
Solutions : $z_1 = \frac{3+2i+1-4i}{2} = 2 - i$
et $z_2 = \frac{3+2i-1+4i}{2} = 1 + 3i$
(vérification : $z_1 z_2 = 5 + 5i$).
Donc $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 5 + 10 = 15$.

Q16 ✔ Réponse D

$(1+i)^2 = 2i$, donc
$(1+i)^4 = (2i)^2 = -4$. De même
$(i-1)^2 = -2i$, donc $(i-1)^4 = -4$.
$Z = \frac{1}{2}(-8) = -4$, réel strictement négatif : $\arg Z \equiv \pi\ [2\pi]$.

Q17 ✔ Réponse C

$\overrightarrow{BC}(1,6)$ dirige (BC), donc
$(BC) : 6(x-3) - (y-1) = 0$, soit
$6x - y - 17 = 0$.

$$d(A,(BC)) = \frac{|6\times2 - 6 - 17|}{\sqrt{6^2+1^2}} = \frac{11}{\sqrt{37}}.$$

Q18 ✔ Réponse C

$[AB]$ est un diamètre : le centre est le milieu $\Omega(2,2,3)$ et
$R^2 = \Omega A^2 = 1 + 9 + 1 = 11$. On vérifie que $C \in S$: $\Omega C^2 = 1 + 9 + 1 = 11$.
Le plan tangent en C est orthogonal à $\overrightarrow{\Omega C}(-1,3,1)$ et passe par C :

$$-(x-1) + 3(y-5) + (z-4) = 0 \iff -x + 3y + z - 18 = 0.$$

Q19 ✔ Réponse B

Notons S_1 « le capteur vient du site 1 » et D « le capteur est défectueux ». Le site 1 produit les deux tiers des capteurs : $P(S_1) = \frac{2}{3}$.

$$P(S_1 \cap D) = P(S_1) \times P_{S_1}(D) = \frac{2}{3} \times 0{,}03 = 0{,}02.$$

Q20 ✔ Réponse C

Formule des probabilités totales : $P(D) = \frac{2}{3} \times 0{,}03 + \frac{1}{3} \times 0{,}04 = 0{,}02 + \frac{0{,}04}{3} = \frac{0{,}1}{3}$.

$$P_D(S_1) = \frac{P(S_1 \cap D)}{P(D)} = \frac{0{,}02}{0{,}1/3} = 0{,}6.$$

ÉCOLES NATIONALES DES SCIENCES APPLIQUÉES · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année des ENSA · Maroc

Session de juillet 2023

2023 Énoncé

Q1 Voici une suite logique de nombres : $6; 4; 8; 5; 15; \ldots$
Le nombre suivant est :

A 17 B 20 C 11 D 40

Q2 Soit x un nombre de 6 chiffres divisible par 9 et y le nombre obtenu en déplaçant à la fin le premier chiffre de x. Le reste de la division de y par 9 est égal à :

A 0 B 1 C 2 D 3

Q3 Le nombre de couples d'entiers premiers entre eux dont le produit vaut 150 est égal à :

A 4 B 6 C 8 D 10

Q4 L'équation à variables réelles

$$9x^5 - 12x^4 + 6x - 5 = 0$$

A admet une seule solution entière
B admet trois solutions entières
C admet cinq solutions entières
D n'admet pas de solution entière

Q5 Soit la suite (u_n) définie par : $u_n = \sqrt{n} - [\sqrt{n}]$, $n \in \mathbb{N}$. ($[x]$ désigne la partie entière de x).

$$\lim_{n\to+\infty} u_{(n^2+2n)} =$$

A 0 B 1 C 2 D 3

Q6 $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x \sin(e^{-x}) =$

A 0
B 1
C -1
D n'a pas de limite

Q7 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cos\left(x^2+x-1\right)}{x} =$

A 0
B 1
C -1
D n'a pas de limite

Q8 Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{Z}$.
Alors :

A f n'est pas constante
B f est une constante
C f est strictement croissante
D f est strictement décroissante

Q9 Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x+y)\left(1 - f(x)f(y)\right) = f(x) + f(y)$$

Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{f'(x)}{1+f(x)^2} =$$

A $f'(0)$ B $f'(0) - 1$
C $f'(0) + \dfrac{1}{2}$ D $f'(0) - \dfrac{1}{2}$

Q10 Pour tout réel $\alpha > 0$;

$$\int_{\frac{1}{\alpha}}^{\alpha} \frac{\ln x}{1+x^2}\, dx =$$

A $\ln\alpha$ B $2\ln\alpha$ C 0 D $\alpha\dfrac{\pi}{2}$

Q11 On considère les deux intégrales suivantes : $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin^2(x)\, dx$ et $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^2(x)\, dx$. La valeur de I vaut :

A $\dfrac{\pi^3}{48}$ B $\dfrac{\pi^3}{24} + \dfrac{\pi}{4}$
C $-\dfrac{\pi}{8}$ D $\dfrac{\pi^3}{48} + \dfrac{\pi}{8}$

Q12 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{1445} \sin x\, dx =$

A $\dfrac{1}{1445}$ B $\dfrac{1}{1446} - \dfrac{\pi}{2}$
C $\dfrac{1}{1446}$ D $\dfrac{1}{1447} + \dfrac{\pi}{2}$

Q13 Soient z_1 et z_2 les solutions complexes de l'équation :

$$z^2 - 4iz - 4(1+i) = 0$$

Alors : $\mathrm{Im}(z_1) + \mathrm{Im}(z_2)$

A 0 B 4 C 2 D 3

Q14 Le nombre complexe

$$(1+i)^{2000} =$$

A 1 B 4^{1000} C 4^{500} D 4^{200}

Q15 Le nombre complexe

$$\left(\frac{7-15i}{15+7i}\right)^{2023} =$$

A i B $-i$ C -1 D $i+1$

Q16 La somme

$$\left(1 + e^{\frac{i2\pi}{5}} + e^{\frac{i4\pi}{5}} + e^{\frac{i6\pi}{5}} + e^{\frac{i8\pi}{5}}\right)^{1000} =$$

A 0 B 1 C i D $-i$

Q17 La solution $f(x)$ de l'équation différentielle $y'' - 7y' + 12y = 0$ vérifiant $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ est :

A $e^{-4x} - e^{3x}$ B $e^{5x} - e^{3x}$
C $e^{4x} - e^{3x}$ D $e^{5x} - e^{4x}$

Q18 Soient d_A la distance du point $A(1,0,2)$ au plan $(P) : 2x + y + z + 4 = 0$; et d_B la distance du point $B(3,2,1)$ au plan $(Q) : -x + 5y - 4z = 5$. Alors le produit des distances $d_A d_B$ est :

A $\dfrac{8}{3\sqrt{7}}$ B $\dfrac{10}{3\sqrt{7}}$ C $\dfrac{11}{3\sqrt{7}}$ D $\dfrac{13}{3\sqrt{7}}$

Q19 L'aire sous la cloche d'équation $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ et au-dessus de la parabole d'équation $y = \dfrac{x^2}{2}$ est :

A $\dfrac{1}{3}$ B $-\dfrac{1}{3} + \dfrac{\pi}{2}$ C $\dfrac{\pi}{2}$ D $\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{1}{3}$

Q20 On considère le cercle (C) d'équation $x^2 + y^2 + x - 3y - 3 = 0$ et (D) la droite passant par le point A de coordonnées $(1,-2)$ et tangent à (C) au point M.
La longueur du segment $[AM]$ est égale à :

A 1 B 2 C 3 D 4

ÉCOLES NATIONALES DES SCIENCES APPLIQUÉES · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année des ENSA · Maroc

Session de juillet 2023

2023 — Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14
C	A	C	D	B	B	A	B	A	C	D	C	B	C

Q15	Q16	Q17	Q18	Q19	Q20
A	A	C	A	B	C

Q1 ✔ Réponse C

On alterne une soustraction et une multiplication, avec un nombre qui augmente de 1 à chaque paire :

$$6 \xrightarrow{-2} 4 \xrightarrow{\times 2} 8 \xrightarrow{-3} 5 \xrightarrow{\times 3} 15 \xrightarrow{-4} 11.$$

Remarque : Suite « logique » : d'autres règles peuvent produire d'autres réponses. La règle « -2, $\times 2$, -3, $\times 3$, -4 » donne 11 (choix C) ; à confirmer avant publication.

Q2 ✔ Réponse A

Un entier est congru modulo 9 à la somme de ses chiffres. Déplacer un chiffre ne change pas cette somme, donc $y \equiv x \equiv 0\ [9]$: le reste est 0.

Q3 ✔ Réponse C

$150 = 2 \times 3 \times 5^2$. Si $ab = 150$ avec $a \wedge b = 1$, chacune des puissances 2, 3 et 5^2 figure en entier dans a ou dans b : $2^3 = 8$ choix.
Les 8 couples d'entiers naturels (a, b) sont : $(1, 150)$, $(2, 75)$, $(3, 50)$, $(6, 25)$, $(25, 6)$, $(50, 3)$, $(75, 2)$, $(150, 1)$.

Q4 ✔ Réponse D

Si x est un entier solution, alors $x(9x^4 - 12x^3 + 6) = 5$, donc x divise 5 : $x \in \{-5, -1, 1, 5\}$.

- $x = 1 : 9 - 12 + 6 - 5 = -2 \neq 0$
- $x = -1 : -9 - 12 - 6 - 5 = -32 \neq 0$
- $x = 5$: $28125 - 7500 + 30 - 5 = 20650 \neq 0$
- $x = -5$: $-28125 - 7500 - 30 - 5 = -35660 \neq 0$

Aucune solution entière.

Q5 ✔ Réponse B

Pour $n \geq 1 : n^2 \leq n^2 + 2n < (n+1)^2$, donc $\lfloor \sqrt{n^2 + 2n} \rfloor = n$ et

$$u_{(n^2+2n)} = \sqrt{n^2 + 2n} - n = \frac{2n}{\sqrt{n^2 + 2n} + n} = \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + 1} \to 1.$$

Q6 ✔ Réponse B

Posons $t = e^{-x} \to 0^+$:
$e^x \sin(e^{-x}) = \dfrac{\sin t}{t} \to 1.$

Q7 ✔ Réponse A

Pour $x > 0$: $\left| \dfrac{\cos(x^2 + x - 1)}{x} \right| \leq \dfrac{1}{x} \to 0.$
Par encadrement, la limite vaut 0.

Q8 ✔ Réponse B

Si f prenait deux valeurs entières $p < q$, le théorème des valeurs intermédiaires lui ferait prendre la valeur $p + \frac{1}{2}$, qui n'est pas entière. Donc f est constante.

Q9 ✔ Réponse A

Avec $x = y = 0$:
$f(0)\left(1 - f(0)^2\right) = 2f(0)$, soit
$f(0)\left(1 + f(0)^2\right) = 0$, donc $f(0) = 0$.
À x fixé, on dérive par rapport à y puis on prend $y = 0$:

$$f'(x)\left(1 - f(x)f(0)\right) - f(x)\,f(x)f'(0) = f'(0),$$

soit $f'(x) = f'(0)\left(1 + f(x)^2\right)$. Donc $\dfrac{f'(x)}{1 + f(x)^2} = f'(0)$.

Q10 ✔ Réponse C

Notons I l'intégrale et posons $x = \frac{1}{t}$, $dx = -\frac{dt}{t^2}$:

$$I = \int_\alpha^{1/\alpha} \frac{-\ln t}{1 + \frac{1}{t^2}} \left(-\frac{dt}{t^2}\right) = \int_\alpha^{1/\alpha} \frac{\ln t}{1 + t^2}\, dt = -I.$$

Donc $I = 0$.

Q11 ✔ Réponse D

$$I + J = \int_0^{\pi/2} x^2\, dx = \frac{\pi^3}{24} \text{ et}$$
$$J - I = \int_0^{\pi/2} x^2 \cos(2x)\, dx.$$

Deux intégrations par parties :

$$\int_0^{\pi/2} x^2 \cos 2x\, dx = \left[\frac{x^2 \sin 2x}{2}\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} x \sin 2x\, dx$$
$$= -\left(\left[-\frac{x \cos 2x}{2}\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2x}{2} dx\right)$$
$$= -\frac{\pi}{4}.$$

Donc $2I = \dfrac{\pi^3}{24} + \dfrac{\pi}{4}$, soit $I = \dfrac{\pi^3}{48} + \dfrac{\pi}{8}$.

Q12 ✔ Réponse C

Une primitive de $(\cos x)^{1445} \sin x$ est $-\dfrac{(\cos x)^{1446}}{1446}$, donc l'intégrale vaut $0 - \left(-\dfrac{1}{1446}\right) = \dfrac{1}{1446}$.

Q13 ✔ Réponse B

La somme des solutions d'une équation $z^2 + bz + c = 0$ vaut $-b$: $z_1 + z_2 = 4i$.
Donc $\mathrm{Im}(z_1) + \mathrm{Im}(z_2) = \mathrm{Im}(z_1 + z_2) = 4$.

Q14 ✔ Réponse C

$(1+i)^2 = 2i$, donc $(1+i)^{2000} = (2i)^{1000} = 2^{1000}\, i^{1000} = 2^{1000} = 4^{500}$ (car $i^4 = 1$ et 1000 est multiple de 4).

Q15 ✔ Réponse A

$-i(15 + 7i) = -15i + 7 = 7 - 15i$, donc $\dfrac{7 - 15i}{15 + 7i} = -i$.
$2023 = 4 \times 505 + 3$, donc $(-i)^{2023} = (-i)^3 = -i^3 = i$.

Q16 ✔ Réponse A

Avec $\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}} \neq 1$ et $\omega^5 = 1$:
$1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = \dfrac{1 - \omega^5}{1 - \omega} = 0.$
Donc la quantité vaut $0^{1000} = 0$.

Q17 ✔ Réponse C

L'équation caractéristique $r^2 - 7r + 12 = 0$ a pour racines 3 et 4, donc $f(x) = ae^{3x} + be^{4x}$.
$f(0) = a + b = 0$ et $f'(0) = 3a + 4b = 1$ donnent $b = 1$, $a = -1 : f(x) = e^{4x} - e^{3x}$.

Q18 ✔ Réponse A

$$d_A = \frac{|2 + 0 + 2 + 4|}{\sqrt{4 + 1 + 1}} = \frac{8}{\sqrt{6}} \text{ et}$$
$$d_B = \frac{|-3 + 10 - 4 - 5|}{\sqrt{1 + 25 + 16}} = \frac{2}{\sqrt{42}}.$$
$$d_A d_B = \frac{16}{\sqrt{252}} = \frac{16}{6\sqrt{7}} = \frac{8}{3\sqrt{7}}.$$

Q19 ✔ Réponse **B**

Intersection : $\frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{2} \iff x^4 + x^2 - 2 = 0 \iff x^2 = 1 \iff x = \pm 1$. Sur $[-1, 1]$, la cloche est au-dessus de la parabole :

$$\mathcal{A} = \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{2} \right) dx$$
$$= \Big[\arctan x \Big]_{-1}^{1} - \left[\frac{x^3}{6} \right]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}.$$

Q20 ✔ Réponse **C**

Le cercle a pour centre $\Omega\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ et pour rayon R avec $R^2 = \frac{1}{4} + \frac{9}{4} + 3 = \frac{11}{2}$. Le triangle $AM\Omega$ est rectangle en M, donc $AM^2 = A\Omega^2 - R^2 = \left(\frac{9}{4} + \frac{49}{4}\right) - \frac{11}{2} = \frac{58}{4} - \frac{22}{4} = 9$. (On retrouve la puissance de A : $1 + 4 + 1 + 6 - 3 = 9$.) Donc $AM = 3$.

ÉCOLES NATIONALES DES SCIENCES APPLIQUÉES · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année des ENSA · Maroc

Session du 1er août 2022

2022 — Énoncé

Q1 Sachant que $11 \times 11 = 121$, le produit $111111111 \times 111111111$ est égal à :

A 1234567654321
B 123456787654321
C 12345678987654321
D 1234568654321

Q2 Le nombre de diviseurs positifs du nombre 546×840 est :

A 180 B 181 C 182 D 183

Q3 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. La négation de la proposition « f est la fonction nulle » est :

A $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0$
B $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0$
C $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$
D $\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0$

Q4 La solution de l'équation à variable réelle x :
$\ln\left(x^2-1\right) - \ln(2x-1) + \ln 2 = 0$ est :

A $\dfrac{1+7\sqrt{3}}{2}$ B $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$
C $\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$ D $\dfrac{1+3\sqrt{3}}{2}$

Q5 La valeur maximale des termes $u_k = C_{22}^k\, 20^{22-k}\, 21^k$ dans le développement du nombre $(20+21)^{22}$ par la formule du Binôme de Newton atteinte pour k égal à :

A 8 B 9 C 10 D 11

Q6 $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^2} =$

A 1 B 0 C $+\infty$ D e

Q7 $\lim\limits_{n\to+\infty} n - \sqrt{(n+5)(n+7)} =$

A 0 B -6 C 6 D $+\infty$

Q8 Soient a et b deux réels ; la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2} & \text{si } x > 0 \\ ax+b & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

est continue en 0 ssi

A $a \in \mathbb{R}$ et $b = 2$
B $a = 0$ et $b = 1$
C $a = \dfrac{-1}{3}$ et $b = \dfrac{1}{2}$
D $a \in \mathbb{R}$ et $b = \dfrac{-1}{2}$

Q9 La dérivée de la fonction

$$f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}\ \sqrt{(x+3)^3}} \text{ est :}$$

A $\dfrac{5x^2-x-12}{\sqrt{x-1}\ \sqrt[3]{(x+2)^5}\ \sqrt{(x+3)^5}}$

B $\dfrac{3x^2+x-24}{\sqrt{x-1}\ \sqrt[3]{(x+2)^5}\ \sqrt{(x+3)^5}}$

C $\dfrac{2x^2+x-24}{2\sqrt{x-1}\ \sqrt[3]{(x+2)^5}\ \sqrt{(x+3)^5}}$

D $\dfrac{5x^2+x-24}{3\sqrt{x-1}\ \sqrt[3]{(x+2)^5}\ \sqrt{(x+3)^5}}$

Q10 Soit $f : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ définie par $f(x) = xe^x$. L'équation de la tangente à la courbe f^{-1} au point d'abscisse e est :

A $y = \dfrac{1}{2e} + \dfrac{1}{2}$ B $y = \dfrac{1}{e}x + \dfrac{1}{2}$
C $y = \dfrac{1}{2e}x + 1$ D $y = \dfrac{1}{e}x - 1$

Q11 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-x^2}{1+x^2}\,dx =$

A $\dfrac{\pi}{2}+1$ B $\dfrac{\pi}{2}-1$
C $-1+\dfrac{\pi}{4}$ D $-1-\dfrac{\pi}{4}$

Q12 Soit l'intégrale

$$I_n = \int_{-1}^{1} \left(x^2-1\right)^n dx$$

La valeur de I_4 est

A $\dfrac{252}{315}$ B $\dfrac{254}{315}$ C $\dfrac{258}{315}$ D $\dfrac{256}{315}$

Q13 $\cos\left(\dfrac{\pi}{16}\right)$ est égal à :

A $\dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}}$
B $\dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$
C $\dfrac{1}{16}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$
D $\dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

Q14 La formule algébrique du nombre complexe $\left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2023}$ est :

A $\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ B $-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
C $\dfrac{\sqrt{3}}{2}+i\dfrac{1}{2}$ D $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+i\dfrac{1}{2}$

Q15 Soit le nombre complexe $z = \sqrt{3}+i$, alors z^5 est égal à :

A $\overline{z}$ B $-8\,\overline{z}$ C $-16\,\overline{z}$ D $16\,\overline{z}$

Q16 Soient z_1 et z_2 les solutions de l'équation suivante :

$$2z^2 - 2(m+1+i)z + m^2 + (1+i)m + i = 0$$

où $m \in \mathbb{C}^*$ et $z \in \mathbb{C}$, $m \neq 1, i$
$\mathrm{Im}(z_1) \times \mathrm{Im}(z_2) =$

A $\dfrac{1-m^2}{2}$ B $\dfrac{1+m^2}{2}$
C $\dfrac{1-m^2}{4}$ D $\dfrac{1+m^2}{4}$

Q17 La solution $y(x)$ de l'équation différentielle suivante : $y'' + y' + \dfrac{5}{2}y = 0$, $y(0) = -4$; $y'(0) = 6$ est :

A $e^{\frac{x}{2}}\left(-4\cos\left(\frac{3}{2}x\right) - \frac{8}{3}\sin\left(\frac{3}{2}x\right)\right)$
B $e^{\frac{x}{2}}\left(-4\cos\left(\frac{3}{2}x\right) + \frac{8}{3}\sin\left(\frac{3}{2}x\right)\right)$
C $e^{\frac{-x}{2}}\left(-4\cos\left(\frac{3}{2}x\right) - \frac{8}{3}\sin\left(\frac{3}{2}x\right)\right)$
D $e^{\frac{-x}{2}}\left(-4\cos\left(\frac{3}{2}x\right) + \frac{8}{3}\sin\left(\frac{3}{2}x\right)\right)$

Q18 Dans un repère orthonormé, on considère le plan P d'équation cartésienne $2x - y - 2z + 2 = 0$, et la sphère d'équation $x^2 - 6x + y^2 + z^2 + 10z - 2 = 0$. Une représentation paramétrique de la droite passant par le centre de la sphère et perpendiculaire au point P est :

A $\begin{cases} x = 3+2t \\ y = -t \\ z = -5-2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$
B $\begin{cases} x = 3-2t \\ y = t \\ z = -5-2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$
C $\begin{cases} x = 3+2t \\ y = -t \\ z = 5-2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$
D $\begin{cases} x = -3+2t \\ y = -t \\ z = -5-2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

La première année du cycle préparatoire d'une ENSA comporte 300 élèves ingénieurs. Ils sont inscrits aux clubs des activités de l'École selon la répartition suivante : 60 au club Cyber Sécurité dont 30% sont des filles, 90 au club Sport dont 60% sont des filles, et 150 au club Environnement dont 72% sont des filles. Chaque élève-ingénieur(e) pratique une et une seule activité. On choisit au hasard un(e) élève ingénieur(e).

Q19 La probabilité que l'élève choisi(e) soit une fille est :

A 0,4 B 0,5 C 0,6 D 0,7

Q20 Sachant que l'élève choisi(e) est un garçon, la probabilité qu'il soit inscrit au club Environnement est :

A 0,25 B 0,35 C 0,45 D 0,55

ÉCOLES NATIONALES DES SCIENCES APPLIQUÉES · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année des ENSA · Maroc

Session du 1er août 2022

2022 — Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14
C	A	D	B	D	A	B	D	D	A	B	D	D	A

Q15	Q16	Q17	Q18	Q19	Q20
C	C	D	A	C	B

Q1 ✔ Réponse C

Le carré d'un nombre formé de n chiffres 1 (pour $n \le 9$) s'écrit en montant de 1 à n puis en redescendant : $11^2 = 121$, $111^2 = 12321$, $1111^2 = 1234321$, … Avec neuf chiffres 1 : $111111111^2 = 12345678987654321$. (Le résultat a 17 chiffres, ce qui élimine aussi les autres propositions.)

Q2 ✔ Réponse A

$546 = 2 \times 3 \times 7 \times 13$ et $840 = 2^3 \times 3 \times 5 \times 7$, donc $546 \times 840 = 2^4 \times 3^2 \times 5 \times 7^2 \times 13$. Nombre de diviseurs : $(4+1)(2+1)(1+1)(2+1)(1+1) = 5 \times 3 \times 2 \times 3 \times 2 = 180$.

Q3 ✔ Réponse D

« f est la fonction nulle » s'écrit $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$. Sa négation est $\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0$: il suffit d'un seul x où f ne s'annule pas.

Q4 ✔ Réponse B

Domaine : $x^2 > 1$ et $x > \frac{1}{2}$, soit $x > 1$. L'équation équivaut à $\ln\big(2(x^2-1)\big) = \ln(2x-1)$, c'est-à-dire $2x^2 - 2x - 1 = 0$. Racines : $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$. Seule $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \approx 1{,}37$ est dans le domaine.

Q5 ✔ Réponse D

$\dfrac{u_{k+1}}{u_k} = \dfrac{22-k}{k+1} \times \dfrac{21}{20}$, et ce rapport est > 1 si et seulement si $21(22-k) > 20(k+1)$, soit $41k < 442$, c'est-à-dire $k \le 10$. Les termes croissent donc jusqu'à u_{11}, puis décroissent : le maximum est atteint pour $k = 11$.

Q6 ✔ Réponse A

$\sqrt[n]{n^2} = e^{\frac{2\ln n}{n}}$ et $\dfrac{\ln n}{n} \to 0$, donc la limite vaut $e^0 = 1$.

Q7 ✔ Réponse B

Avec la quantité conjuguée :

$$n - \sqrt{n^2+12n+35} = \frac{n^2 - (n^2+12n+35)}{n + \sqrt{n^2+12n+35}} = \frac{-12 - \frac{35}{n}}{1 + \sqrt{1 + \frac{12}{n} + \frac{35}{n^2}}} \to \frac{-12}{2} = -6.$$

Q8 ✔ Réponse D

Au voisinage de 0 : $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$, donc $\dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2} \to -\dfrac{1}{2}$ quand $x \to 0^+$. À gauche, $f(0) = b$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = b$. La continuité en 0 équivaut à $b = -\dfrac{1}{2}$, quel que soit a.

Q9 ✔ Réponse D

On écrit $f(x) = (x-1)^{\frac{1}{2}}(x+2)^{-\frac{2}{3}}(x+3)^{-\frac{3}{2}}$ et on utilise la dérivée logarithmique :

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{2(x-1)} - \frac{2}{3(x+2)} - \frac{3}{2(x+3)} = \frac{-10x^2 - 2x + 48}{6(x-1)(x+2)(x+3)} = -\frac{5x^2 + x - 24}{3(x-1)(x+2)(x+3)}.$$

D'où

$$f'(x) = -\frac{5x^2 + x - 24}{3\sqrt{x-1}\ \sqrt[3]{(x+2)^5}\ \sqrt{(x+3)^5}}.$$

C'est l'expression D **au signe près** : la fonction est décroissante pour x grand ($f(x)$ se comporte comme $x^{-5/3}$), donc sa dérivée y est négative. La proposition D est la seule qui ait la bonne forme.

Remarque : Aucune proposition n'est exactement juste : le calcul donne l'opposé de D (signe « − » absent sur le sujet). La correction suggérée (Prof. Barkouz) retient D. À trancher par le professeur.

Q10 ✔ Réponse A

$f(1) = e$, donc $f^{-1}(e) = 1$. Et $f'(x) = (x+1)e^x$, donc $f'(1) = 2e$ et $(f^{-1})'(e) = \dfrac{1}{f'(1)} = \dfrac{1}{2e}$. Tangente : $y = \dfrac{1}{2e}(x-e) + 1 = \dfrac{1}{2e}x + \dfrac{1}{2}$. C'est la proposition A, dans laquelle le « x » manque sur le sujet.

Remarque : La bonne tangente est y = x/(2e) + 1/2 ; la proposition A est imprimée sans le « x ». La correction suggérée retient A. À trancher par le professeur.

Q11 ✔ Réponse B

$\dfrac{1-x^2}{1+x^2} = \dfrac{2}{1+x^2} - 1$, donc l'intégrale vaut $\Big[2\arctan x - x\Big]_0^1 = 2 \times \dfrac{\pi}{4} - 1 = \dfrac{\pi}{2} - 1$.

Q12 ✔ Réponse D

$(x^2-1)^4 = x^8 - 4x^6 + 6x^4 - 4x^2 + 1$ est paire, donc

$$I_4 = 2\left(\frac{1}{9} - \frac{4}{7} + \frac{6}{5} - \frac{4}{3} + 1\right) = 2 \times \frac{35 - 180 + 378 - 420 + 315}{315} = 2 \times \frac{128}{315} = \frac{256}{315}.$$

Q13 ✔ Réponse D

Pour $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$: $2\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{2 + 2\cos\theta}$. En partant de $2\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$:

$$2\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{2+\sqrt{2}},$$

$$2\cos\frac{\pi}{16} = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}.$$

Donc $\cos\dfrac{\pi}{16} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$.

Q14 ✔ Réponse A

$\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\pi/3}$, et $e^{i\pi/3}$ a pour puissance sixième 1. Comme $2023 = 6 \times 337 + 1$:

$$\left(e^{i\pi/3}\right)^{2023} = e^{i\pi/3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Q15 ✔ Réponse C

$z = 2e^{i\pi/6}$, donc $z^5 = 32e^{5i\pi/6}$ et $\overline{z} = 2e^{-i\pi/6}$.

$$\frac{z^5}{\overline{z}} = 16\,e^{i\pi} = -16, \quad \text{donc } z^5 = -16\,\overline{z}.$$

Q16 ✔ Réponse C

Discriminant réduit :
$\Delta' = (m+1+i)^2 - 2\big(m^2+(1+i)m+i\big) = -m^2 = (im)^2$ (car $(1+i)^2 = 2i$).
Solutions : $z_1 = \dfrac{(m+1+i)+im}{2} = \dfrac{(1+i)(m+1)}{2}$ et
$z_2 = \dfrac{(m+1+i)-im}{2}$.
Si m est **réel** : $\mathrm{Im}(z_1) = \dfrac{m+1}{2}$ et $\mathrm{Im}(z_2) = \dfrac{1-m}{2}$, d'où
$\mathrm{Im}(z_1)\,\mathrm{Im}(z_2) = \dfrac{1-m^2}{4}$.

Remarque : Le résultat $(1 - m^2)/4$ n'est valable que si m est réel ; or l'énoncé dit $m \in \mathbb{C}^*$. Pour m complexe non réel, le produit des parties imaginaires ne s'exprime pas ainsi. La correction suggérée retient C. À trancher par le professeur.

Q17 ✔ Réponse D

Équation caractéristique : $r^2 + r + \frac{5}{2} = 0$, de discriminant $1 - 10 = -9$:
$r = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}i$. Donc
$y = e^{-x/2}\left(A\cos\frac{3x}{2} + B\sin\frac{3x}{2}\right)$.
$y(0) = A = -4$ et
$y'(0) = -\frac{A}{2} + \frac{3}{2}B = 2 + \frac{3}{2}B = 6$, donc $B = \frac{8}{3}$.

Q18 ✔ Réponse A

(« perpendiculaire au point P » se lit « perpendiculaire au plan P ».)
$(x-3)^2 + y^2 + (z+5)^2 = 36$: le centre est $\Omega(3, 0, -5)$. La droite perpendiculaire au plan P est dirigée par son vecteur normal $\vec{n}(2, -1, -2)$:

$$\begin{aligned} x &= 3 + 2t, \\ y &= -t, \\ z &= -5 - 2t, \\ t &\in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Q19 ✔ Réponse C

Nombre de filles :
$0{,}3 \times 60 + 0{,}6 \times 90 + 0{,}72 \times 150 = 18 + 54 + 108 = 180$.
$P(F) = \dfrac{180}{300} = 0{,}6$.

Q20 ✔ Réponse B

Garçons : 42 en Cyber Sécurité, 36 en Sport et $150 - 108 = 42$ en Environnement, soit 120 garçons.
$P_G(\text{Environnement}) = \dfrac{42}{120} = 0{,}35$.

ÉCOLES NATIONALES DES SCIENCES APPLIQUÉES · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année des ENSA · Maroc

Session de juillet 2021

2021 Énoncé

Q1 Une condition nécessaire (pas forcément suffisante) pour réussir le concours de l'ENSA est :

A Avoir répondu correctement à tout le QCM
B Avoir au plus de 25% de réponses fausses
C Avoir au moins 50% de réponses correctes
D Avoir passé le concours

Q2 Le 17 juillet de 2021, jour du concours de l'ENSA, est un samedi.
Quel jour de la semaine sera le 29 février 2024 ?

A mardi B jeudi
C samedi D lundi

Q3 Le nombre de diviseurs de $N = 72^{10} \times 162^{50}$ est :

A 17600 B 17680
C 17820 D 17901

Q4 Soient x et y deux réels non nuls, inverses l'un de l'autre, tels que la somme du carré de leur somme avec la somme de leurs carrés est égale à 10. Le carré du nombre x vaut :

A $2-\sqrt{3}$ ou $2+\sqrt{3}$
B $1-\sqrt{5}$ ou $1+\sqrt{5}$
C $1-\sqrt{3}$ ou $1+\sqrt{3}$
D $2-\sqrt{5}$ ou $2+\sqrt{5}$

Q5 Le produit

$$\prod_{k=0}^{9} \sqrt[3\cdot 2^k]{5} =$$

A $\sqrt[3]{5^{\frac{511}{256}}}$ B $\sqrt[3]{5^{\frac{1023}{256}}}$
C $\sqrt[3]{5^{\frac{1023}{512}}}$ D $\sqrt[3]{5^{\frac{511}{1024}}}$

Q6 $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n e^{-3n} =$

A 1 B 0 C $+\infty$ D e

Q7 En remarquant que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre $(3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n$ est un entier pair,

$$\lim_{n\to+\infty} \sin\left(\left(3+\sqrt{5}\right)^n \pi\right) =$$

A 1 B -1 C 0 D $+\infty$

Q8 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \dfrac{\sqrt{3}\sin x - \cos x}{x-\frac{\pi}{6}} =$

A 0 B 1 C 2 D $+\infty$

Q9 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\left(\frac{1}{\ln 3x}\right)} =$

A e B 0 C $\ln 3$ D $1+e$

Q10 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction T périodique avec $T > 0$, telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ existe dans $\mathbb{R}^*$.
Alors :

A f est strictement croissante
B f est strictement décroissante
C f est la fonction nulle
D f est une constante non nulle

Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x^3 \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Q11 Soit f' la dérivée d'ordre 1 de f.

A $f'(0) = 1$
B $f'(0) = 0$
C $f'(0) = 2$
D f n'est pas dérivable en 0

Q12 Pour la même fonction f de Q11, on note f'' sa dérivée d'ordre 2. Alors :

A $f''(0) = 0$
B $f''(0) = 1$
C $f''(0) = 2$
D f n'est pas deux fois dérivable en 0

Q13 L'aire de la région délimitée par la courbe d'équation $y = \cos(\ln x)$ et les droites d'équations $x = e^{\frac{\pi}{2}}$ et $x = e^{\pi}$ est égale à :

A $\dfrac{1}{2}\left(e^{\pi} + e^{\frac{\pi}{2}}\right)$ B $e^{\pi} - e^{\frac{\pi}{2}}$
C $e^{\pi} + e^{\frac{\pi}{2}}$ D e^{π}

Q14 Soit $f : [0;\alpha] \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(x) \neq -1$ et $f(x).f(\alpha - x) = 1$

$$\int_0^{\alpha} \frac{1}{1+f(x)}\, dx =$$

A $\dfrac{\alpha}{2}$ B α C $1+\alpha$ D $\dfrac{1}{1+\alpha}$

Q15 Soit la fonction réelle

$$f(x) = e^{-x}\sin(x)$$

et $f^{(4)}$ sa dérivée d'ordre 4, alors :

$$f^{(4)}(x) =$$

A $-f(x)$ B $-4f(x)$
C $4f(x)$ D $-3f(x)$

Q16 Pour la même fonction f de Q15,

$$\int_0^{\pi} f(x)\, dx =$$

A $\dfrac{1}{3}\left(1-e^{-\pi}\right)$ B $\dfrac{1}{2}\left(1+e^{-\pi}\right)$
C $\dfrac{1}{4}\left(1-e^{-\pi}\right)$ D $\dfrac{1}{5}\left(1+e^{-\pi}\right)$

Q17 Soit u la solution de l'équation à variable complexe :

$$z\overline{z} + 4iz = -3 + 4i$$

Alors :

A $\mathrm{Re}(u) \times \mathrm{Im}(u) = 2$
B $\mathrm{Re}(u) \times \mathrm{Im}(u) = 1$
C $\mathrm{Re}(u) + \mathrm{Im}(u) = 2$
D u est un imaginaire pur

Q18 Soient z_1 et z_2 les solutions de l'équation à variable complexe :

$$z^2 - 2\overline{z} + 3 = 0$$

$$\mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) =$$

A $-\dfrac{2\sqrt{6}}{7}$ B $\dfrac{2\sqrt{6}}{7}$ C $\dfrac{5}{7}$ D $-\dfrac{5}{7}$

Q19 Soient θ un nombre réel non nul et z un nombre complexe tells que :
$z = \cos^2\theta + i\sin\theta\cos\theta$.
La partie réelle du nombre z^{-3} est :

A $\dfrac{\cos\theta}{\sin^3\theta}$ B $\dfrac{\sin 3\theta}{\sin^3\theta}$
C $\dfrac{\cos 3\theta}{\cos^3\theta}$ D $\dfrac{\sin\theta}{\cos^3\theta}$

Q20 Le nombre $\cos 5\theta$ est égal à :

A $\cos^5\theta + 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta$
B $\cos^5\theta + 5\cos^3\theta\sin^2\theta + 10\cos\theta\sin^4\theta$
C $\cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + \cos\theta\sin^4\theta$
D $\cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta$

ÉCOLES NATIONALES DES SCIENCES APPLIQUÉES · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année des ENSA · Maroc

Session de juillet 2021

2021

Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14
D	B	D	A	C	B	C	C	A	D	B	D	A	A

Q15	Q16	Q17	Q18	Q19	Q20
B	B	A	D	C	D

Q1 ✔ Réponse D

Une condition nécessaire est vérifiée par **tous** ceux qui réussissent. Personne ne réussit sans avoir passé le concours : D est nécessaire.
Les autres propositions ne sont pas imposées par l'énoncé : on peut réussir sans tout répondre correctement, et le texte ne fixe aucun seuil de réponses justes ou fausses.

Q2 ✔ Réponse B

Du 17 juillet 2021 au 17 juillet 2023 : $365 + 365 = 730$ jours (pas de 29 février entre les deux).
Du 17 juillet 2023 au 29 février 2024 : 14 (fin juillet)
$+31 + 30 + 31 + 30 + 31 + 31 + 29 = 227$ jours.
Total : 957 jours, et $957 = 7 \times 136 + 5$. Le 29 février 2024 tombe 5 jours de la semaine après un samedi : un **jeudi**.

Q3 ✔ Réponse D

$72 = 2^3 \times 3^2$ et $162 = 2 \times 3^4$, donc $N = 2^{30}3^{20} \times 2^{50}3^{200} = 2^{80} \times 3^{220}$.
Nombre de diviseurs : $81 \times 221 = 17901$.

Q4 ✔ Réponse A

$xy = 1$ et
$(x+y)^2 + x^2 + y^2 = 2(x^2+y^2) + 2 = 10$,
donc $x^2 + y^2 = 4$, soit $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = 4$.
Avec $X = x^2$: $X^2 - 4X + 1 = 0$, donc $X = 2 \pm \sqrt{3}$ (les deux sont positifs).

Q5 ✔ Réponse C

$\displaystyle\prod_{k=0}^{9} 5^{\frac{1}{3\cdot 2^k}} = 5^{\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{9}\frac{1}{2^k}}$ et
$\displaystyle\sum_{k=0}^{9} \frac{1}{2^k} = 2 - \frac{1}{2^9} = \frac{1023}{512}$.
Donc le produit vaut $5^{\frac{1}{3}\cdot\frac{1023}{512}} = \sqrt[3]{5^{\frac{1023}{512}}}$.

Q6 ✔ Réponse B

$3^n e^{-3n} = \left(\dfrac{3}{e^3}\right)^n$ et $0 < \dfrac{3}{e^3} < 1$ (car $e^3 \approx 20{,}1$) : la suite géométrique tend vers 0.

Q7 ✔ Réponse C

Notons $(3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n = 2k_n$ avec k_n entier. Alors $(3+\sqrt{5})^n\pi = 2k_n\pi - (3-\sqrt{5})^n\pi$ et, par 2π-périodicité :

$$\sin\left((3+\sqrt{5})^n\pi\right) = -\sin\left((3-\sqrt{5})^n\pi\right) \to 0,$$

car $0 < 3-\sqrt{5} < 1$, donc $(3-\sqrt{5})^n \to 0$.

Q8 ✔ Réponse C

$\sqrt{3}\sin x - \cos x =$
$2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x\right) = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.
Avec $h = x - \frac{\pi}{6} \to 0$: $\dfrac{2\sin h}{h} \to 2$.

Q9 ✔ Réponse A

$x^{\frac{1}{\ln 3x}} = e^{\frac{\ln x}{\ln 3 + \ln x}}$ et
$\dfrac{\ln x}{\ln 3 + \ln x} = \dfrac{1}{\frac{\ln 3}{\ln x} + 1} \to 1$ quand $x \to 0^+$ (car $\ln x \to -\infty$).
La limite vaut $e^1 = e$.

Q10 ✔ Réponse D

Notons $L \neq 0$ la limite. Pour tout x, la suite $f(x+nT) = f(x)$ est constante et tend vers L quand $n \to +\infty$, donc $f(x) = L$.
f est la constante L, non nulle.

Q11 ✔ Réponse B

$\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = x + x^2\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ et
$\left|x^2\cos\frac{1}{x}\right| \le x^2$: ce taux tend vers 0.
Donc $f'(0) = 0$.

Q12 ✔ Réponse D

Pour $x \neq 0$:
$f'(x) = 2x + 3x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) + x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$, et $f'(0) = 0$.
$\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x} = 2 + 3x\cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right)$: les deux premiers termes tendent vers 2, mais $\sin\frac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0. f' n'est pas dérivable en 0.

Q13 ✔ Réponse A

La région est limitée aussi par l'axe des abscisses. Pour $x \in \left[e^{\pi/2}, e^{\pi}\right]$, $\ln x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ donc $\cos(\ln x) \le 0$.
Une primitive de $\cos(\ln x)$ est $\dfrac{x}{2}\left(\cos(\ln x) + \sin(\ln x)\right)$ (à vérifier en dérivant). Ainsi

$$\int_{e^{\pi/2}}^{e^{\pi}} \cos(\ln x)\,dx = \frac{e^{\pi}}{2}(-1+0) - \frac{e^{\pi/2}}{2}(0+1) = -\frac{1}{2}\left(e^{\pi} + e^{\pi/2}\right),$$

et l'aire vaut $\dfrac{1}{2}\left(e^{\pi} + e^{\pi/2}\right)$.

Q14 ✔ Réponse A

Notons I l'intégrale. Le changement de variable $x \mapsto \alpha - x$ donne

$$I = \int_0^{\alpha} \frac{dx}{1+f(\alpha-x)} = \int_0^{\alpha} \frac{dx}{1+\frac{1}{f(x)}} = \int_0^{\alpha} \frac{f(x)}{1+f(x)}\,dx.$$

En additionnant : $2I = \displaystyle\int_0^{\alpha} 1\,dx = \alpha$,
donc $I = \dfrac{\alpha}{2}$.

Q15 ✔ Réponse B

$f(x) = \mathrm{Im}\left(e^{(-1+i)x}\right)$, donc
$f^{(4)}(x) = \mathrm{Im}\left((-1+i)^4 e^{(-1+i)x}\right)$.
$(-1+i)^2 = -2i$, donc $(-1+i)^4 = -4$ et $f^{(4)} = -4f$.

Q16 ✔ Réponse B

Une primitive de $e^{-x}\sin x$ est $F(x) = -\dfrac{e^{-x}(\sin x + \cos x)}{2}$.
$\displaystyle\int_0^{\pi} f = F(\pi) - F(0) = \frac{e^{-\pi}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(1 + e^{-\pi}\right)$.

Q17 ✔ Réponse A

Avec $z = x + iy$:
$x^2 + y^2 - 4y + 4ix = -3 + 4i$.
Partie imaginaire : $x = 1$. Partie réelle : $1 + y^2 - 4y = -3$, soit $(y-2)^2 = 0$, $y = 2$.
$u = 1 + 2i$ et $\mathrm{Re}(u)\,\mathrm{Im}(u) = 2$.

Q18 ✔ Réponse **D**

Avec $z = x + iy$: $x^2 - y^2 - 2x + 3 = 0$ et $2xy + 2y = 2y(x+1) = 0$.

- $y = 0$: $x^2 - 2x + 3 = 0$ n'a pas de solution réelle.
- $x = -1$: $6 - y^2 = 0$, $y = \pm\sqrt{6}$.

$z_1 = -1 + i\sqrt{6}$, $z_2 = -1 - i\sqrt{6} = \overline{z_1}$ et $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1^2}{|z_1|^2} = \dfrac{-5 - 2i\sqrt{6}}{7}$, de partie réelle $-\dfrac{5}{7}$ (même résultat en échangeant z_1 et z_2).

Q19 ✔ Réponse **C**

$z = \cos\theta(\cos\theta + i\sin\theta) = \cos\theta\, e^{i\theta}$ (avec $\cos\theta \neq 0$ pour que z^{-3} existe).

$z^{-3} = \dfrac{e^{-3i\theta}}{\cos^3\theta}$, de partie réelle $\dfrac{\cos 3\theta}{\cos^3\theta}$.

Q20 ✔ Réponse **D**

Formule de Moivre et binôme : $\cos 5\theta = \mathrm{Re}\left((\cos\theta + i\sin\theta)^5\right)$. Les termes réels sont ceux d'indices pairs :

$$\cos^5\theta + \binom{5}{2}\cos^3\theta\,(i\sin\theta)^2 + \binom{5}{4}\cos\theta\,(i\sin\theta)^4 = \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta.$$

ÉCOLES NATIONALES DES SCIENCES APPLIQUÉES · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année des ENSA · Maroc

Session de juillet 2019

2019

Énoncé

Q1 Soient $a, b > 0$, on considère la suite :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{\left(b^2+ab-a^2\right)u_n - a^2}{b^2u_n + b^2 - ab - a^2} \\ u_0 = \dfrac{b}{a} \end{cases}$$

En remarquant que la suite $v_n = \dfrac{b}{bu_n - a}$ est une suite arithmétique, u_n est égal à :

A $\dfrac{an+b}{bn+a}$ B $\dfrac{n+b}{bn+a}$ C $\dfrac{an-b}{bn-a}$ D $\dfrac{an+b}{n+a}$

Q2 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la suite :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+n}$$

On a $u_n \in I$ avec

A $I = \left[0, \dfrac{1}{3}\right[$ B $I = \left[\dfrac{1}{3}, 1\right[$ C $I = [2, 3[$ D $I = [1, 2[$

Q3 On considère toujours la suite de la question 2 ci-dessus, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ est égale à :

A $\sqrt{3}$ B $\ln(3)$ C $\ln\left(\sqrt{3}\right)$ D 0

Q4 Sachant que $\left(\ln\left(x+\sqrt{4+x^2}\right)\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{4+x^2}}$, la valeur de l'intégrale

$$\int_0^1 \sqrt{4+x^2}\,dx$$

est :

A $\ln\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right) - \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

B $\ln\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right) - \ln\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)$

C $\ln\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right) - \dfrac{5}{2}$

D $\ln\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right) + \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

Q5 On considère l'équation trigonométrique suivante :
$(E) : \cos^4(3x) + \sin^4(3x) = 1$
Les solutions de (E) sont de la forme :

A $x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

B $x = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

C $x = \dfrac{k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}$

D $x = \dfrac{k\pi}{6},\ k \in \mathbb{Z}$

Q6 Soit le réel

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{7+3\sqrt{5}}{2}} - \sqrt[4]{\frac{7-3\sqrt{5}}{2}}$$

En calculant λ^4, la valeur de λ est :

A $\lambda = 0$ B $\lambda = 1$ C $\lambda = 2$ D $\lambda = 3$

Q7 Soit $a > 0$, la valeur de l'intégrale

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

est :

A $\dfrac{\pi a}{4}$ B $4\pi a$ C πa^2 D $\dfrac{\pi a^2}{4}$

Q8 On jette 3 fois un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6, et on note a, b et c les résultats successifs obtenus. On note $Q(x) = ax^2 + bx + c$. La probabilité pour que Q admet une seule racine double est :

A $\dfrac{11}{216}$ B $\dfrac{7}{216}$ C $\dfrac{5}{216}$ D $\dfrac{9}{216}$

Q9 Une urne contient 4 boules jaunes, 3 boules rouges et 3 boules bleues. Les boules sont indiscernables au touché. L'expérience consiste à tirer au hasard successivement deux boules (une après l'autre) sans remise.
La probabilité d'obtenir la deuxième boule tirée de couleur rouge est :

A $\dfrac{17}{90}$ B $\dfrac{15}{90}$ C $\dfrac{19}{90}$ D $\dfrac{13}{90}$

Q10 On considère toujours la même expérience.
La probabilité d'obtenir la deuxième boule tirée rouge sachant que la première est jaune est :

A $\dfrac{4}{17}$ B $\dfrac{5}{17}$ C $\dfrac{8}{17}$ D $\dfrac{9}{17}$

Q11 Soit $z = -1 + \sqrt{2} + i$, $\arg(z)$ est égal à :

A $\dfrac{3\pi}{8}$ B $\dfrac{5\pi}{8}$ C $\dfrac{7\pi}{8}$ D $\dfrac{\pi}{8}$

Q12 En relation avec la question précédente, la valeur de $\cos\left(\dfrac{5\pi}{8}\right)$ est :

A $\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}}$ B $-\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ C $\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ D $-\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}}$

Q13 Soit $a = \cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$.
En calculant $a\sin\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$, la valeur de a est :

A $\dfrac{1}{2}$ B $\dfrac{1}{3}$ C $\dfrac{1}{4}$ D $\dfrac{1}{5}$

Q14 A partir de l'expression de la valeur de a (question précédente) la valeur de $b = \sin\left(\dfrac{\pi}{5}\right)\sin\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$ est :

A $\dfrac{5}{4}$ B $\dfrac{\sqrt{5}}{4}$ C $\dfrac{1}{4}$ D $\sqrt{\dfrac{5}{4}}$

Q15 Soient A, B deux points distincts du plan. L'ensemble des points M tel que $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AM} - 4\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM} = 0$ est :

A Une droite
B Un cercle
C Une demi-droite
D Un disque

Q16 L'expression simplifiée de

$$u_n = \prod_{k=0}^{n} \frac{k^2+5k+6}{k^2+5k+4}$$

est :

A $\dfrac{6n+3}{n+4}$ B $\dfrac{n+4}{3n+6}$ C $\dfrac{n+4}{6n+3}$ D $\dfrac{3n+6}{n+4}$

Q17 Le concours d'entrée à la première année des ENSA pour l'année 2019 – 2020 se déroule le 23 Juillet 2019.
Le nombre des unités de 23^{2019} est :

A 3 B 9 C 1 D 7

Q18 La valeur du produit suivant

$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(e^{2^k} + e^{-2^k}\right)$$

est :

A $\dfrac{e^{2^{n+1}} - e^{-2^{n+1}}}{e - e^{-1}}$

B $\dfrac{e^{2^{n+1}} + e^{-2^{n+1}}}{e - e^{-1}}$

C $\dfrac{e^{2^{n+1}} - e^{-2^{n+1}}}{e + e^{-1}}$

D $\dfrac{e^{2^{n+1}} + e^{-2^{n+1}}}{e + e^{-1}}$

Q19 Soient $f_n(x) = e^x + nx^2 - 3$ et u_n la solution de $f_n(x) = 0 \quad (x \geq 0,\ n > 0)$, u_n est :

A est croissante
B est décroissante
C est stationnaire
D est périodique

Q20 Suite à la question précédente, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ est égale à :

A $\dfrac{1}{2}$ B 0 C 1 D $\sqrt{\dfrac{1}{2}}$

ÉCOLES NATIONALES DES SCIENCES APPLIQUÉES · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année des ENSA · Maroc

Session de juillet 2019

2019

Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14
A	B	C	D	D	B	D	C	–	–	A	B	C	B

Q15	Q16	Q17	Q18	Q19	Q20
B	D	D	A	B	B

Q1 ✔ Réponse A

Notons $D = b^2u_n + b^2 - ab - a^2 = b(bu_n - a) + (b^2 - a^2)$. Un calcul direct donne

$$bu_{n+1} - a = \frac{(b^2-a^2)(bu_n - a)}{D},$$

donc

$$v_{n+1} = \frac{bD}{(b^2-a^2)(bu_n-a)} = v_n + \frac{b^2}{b^2-a^2}.$$

(v_n) est arithmétique de raison $\frac{b^2}{b^2-a^2}$, avec $v_0 = \frac{ab}{b^2-a^2}$: $v_n = \frac{b(a+nb)}{b^2-a^2}$.

Alors $bu_n - a = \frac{b}{v_n} = \frac{b^2-a^2}{a+nb}$, d'où $u_n = \frac{an+b}{bn+a}$. (Vérification : $u_0 = \frac{b}{a}$.)

Q2 ✔ Réponse B

Pour $1 \le k \le n$: $n+2 \le 2k+n \le 3n$, donc $\frac{1}{3n} \le \frac{1}{2k+n} \le \frac{1}{n+2}$.

En sommant les n termes : $\frac{1}{3} \le u_n \le \frac{n}{n+2} < 1$.

Q3 ✔ Réponse C

$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+2\frac{k}{n}}$ est une somme de Riemann de $x \mapsto \frac{1}{1+2x}$ sur $[0,1]$:

$$\lim u_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+2x} = \left[\frac{1}{2}\ln(1+2x)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln 3 = \ln\sqrt{3}.$$

Q4 ✔ Réponse D

Notons I l'intégrale. Par parties :

$I = \left[x\sqrt{4+x^2}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{4+x^2}}dx = \sqrt{5} - \int_0^1 \frac{(4+x^2)-4}{\sqrt{4+x^2}}dx = \sqrt{5} - I + 4\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$.

Avec l'indication : $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}} = \ln(1+\sqrt{5}) - \ln 2 = \ln\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Donc $2I = \sqrt{5} + 4\ln\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, soit $I = \frac{\sqrt{5}}{2} + 2\ln\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} + \ln\frac{3+\sqrt{5}}{2}$, car $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Q5 ✔ Réponse D

$\cos^4 t + \sin^4 t = (\cos^2 t + \sin^2 t)^2 - 2\sin^2 t\cos^2 t = 1 - \frac{1}{2}\sin^2(2t)$.

Avec $t = 3x$: $(E) \iff \sin^2(6x) = 0 \iff 6x = k\pi \iff x = \frac{k\pi}{6}$.

Q6 ✔ Réponse B

Avec $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$: $\varphi^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ et $\varphi^4 = \frac{14+6\sqrt{5}}{4} = \frac{7+3\sqrt{5}}{2}$. De même $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^4 = \frac{7-3\sqrt{5}}{2}$.

Donc $\lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 1$ (et l'on vérifie $\lambda^4 = 1$).

Q7 ✔ Réponse D

La courbe $y = \sqrt{a^2-x^2}$ est le demi-cercle supérieur de centre O et de rayon a. Entre $x = 0$ et $x = a$, l'intégrale est l'aire d'un quart de disque : $\frac{\pi a^2}{4}$.

Q8 ✔ Réponse C

Racine double $\iff b^2 = 4ac$, donc b est pair :

- $b = 2$: $ac = 1$, soit $(1,1)$;
- $b = 4$: $ac = 4$, soit $(1,4),(2,2),(4,1)$;
- $b = 6$: $ac = 9$, soit $(3,3)$.

5 cas favorables sur $6^3 = 216$: $P = \frac{5}{216}$.

Q9 ✔ Réponse –

Par symétrie des tirages (ou probabilités totales) :

$$P(R_2) = \frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9} + \frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9} + \frac{3}{10}\cdot\frac{3}{9} = \frac{27}{90} = \frac{3}{10}.$$

Aucune proposition n'est juste (erreur du sujet).

Q10 ✔ Réponse –

Après une boule jaune, il reste 9 boules dont 3 rouges : $P_{J_1}(R_2) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

Aucune proposition n'est juste (erreur du sujet).

Q11 ✔ Réponse A

$\mathrm{Re}(z) = \sqrt{2} - 1 > 0$ et $\mathrm{Im}(z) = 1 > 0$: $\arg z \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, avec

$\tan(\arg z) = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$.

Or $\tan\frac{3\pi}{8} = \frac{1}{\tan\frac{\pi}{8}} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$.

Donc $\arg z = \frac{3\pi}{8}$.

Q12 ✔ Réponse B

$\cos\frac{5\pi}{8} = \cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8}\right) = -\sin\frac{\pi}{8} < 0$, et

$\sin^2\frac{\pi}{8} = \frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$.

Donc $\cos\frac{5\pi}{8} = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

Q13 ✔ Réponse C

$a\sin\frac{\pi}{5} = \sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4}\sin\frac{4\pi}{5} = \frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{5}$.

Comme $\sin\frac{\pi}{5} \neq 0$: $a = \frac{1}{4}$.

Q14 ✔ Réponse B

$b - a = -\cos\left(\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi}{5}\right) = -\cos\frac{3\pi}{5} = \cos\frac{2\pi}{5}$ et $b + a = \cos\left(\frac{2\pi}{5}-\frac{\pi}{5}\right) = \cos\frac{\pi}{5}$.

Donc $b^2 - a^2 = \cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5} = a = \frac{1}{4}$, soit $b^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$ et, comme $b > 0$, $b = \frac{\sqrt{5}}{4}$.

Q15 ✔ Réponse **B**

$\overrightarrow{AM}\cdot\left(\overrightarrow{AM}-4\overrightarrow{BM}\right)=0$. Soit G le point tel que $\overrightarrow{AG}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$; on vérifie que $\overrightarrow{AM}-4\overrightarrow{BM}=-3\overrightarrow{GM}$.
La condition devient $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{GM}=0$: c'est le cercle de diamètre $[AG]$.

Q16 ✔ Réponse **D**

$\frac{k^2+5k+6}{k^2+5k+4}=\frac{(k+2)(k+3)}{(k+1)(k+4)}$. Les deux produits télescopent :

$$\prod_{k=0}^{n}\frac{k+2}{k+1}=n+2,$$

$$\prod_{k=0}^{n}\frac{k+3}{k+4}=\frac{3}{n+4}.$$

Donc $u_n=\frac{3(n+2)}{n+4}=\frac{3n+6}{n+4}$.

Q17 ✔ Réponse **D**

Le chiffre des unités de 23^n est celui de 3^n, qui suit le cycle $3,9,7,1$ de période 4. $2019=4\times504+3$: c'est le troisième du cycle, 7.

Q18 ✔ Réponse **A**

Pour tout k : $\left(e^{2^k}-e^{-2^k}\right)\left(e^{2^k}+e^{-2^k}\right)=e^{2^{k+1}}-e^{-2^{k+1}}$. Le produit télescope :

$$(e-e^{-1})\prod_{k=0}^{n}\left(e^{2^k}+e^{-2^k}\right)=e^{2^{n+1}}-e^{-2^{n+1}}.$$

La proposition A est donc le produit **pour k allant de 0 à n**. Avec k partant de 1 comme sur le sujet, il faut encore diviser par $e+e^{-1}$: $u_n=\frac{e^{2^{n+1}}-e^{-2^{n+1}}}{e^2-e^{-2}}$, qui n'est pas proposé.

Remarque : Tel qu'imprimé (produit à partir de k = 1), aucune proposition n'est juste : A correspond au produit à partir de k = 0 (pour n = 1 : $e^2+e^{-2}\approx7{,}52$ alors que A $\approx 23{,}2$). À trancher par le professeur (corriger l'énoncé en k = 0 ou retirer la question).

Q19 ✔ Réponse **B**

f_n est strictement croissante sur $[0,+\infty[$, avec $f_n(0)=-2<0$: u_n existe et est unique.
$f_{n+1}(u_n)=f_n(u_n)+u_n^2=u_n^2>0=f_{n+1}(u_{n+1})$, donc $u_n>u_{n+1}$: la suite est décroissante.

Q20 ✔ Réponse **B**

$nu_n^2=3-e^{u_n}\leq2$ (car $e^{u_n}\geq1$), donc $0\leq u_n\leq\sqrt{\frac{2}{n}}\to0$.

ÉCOLES NATIONALES DES SCIENCES APPLIQUÉES · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année des ENSA · Maroc

Session de juillet 2018

2018

Énoncé

Q1 (u_n) une suite réelle. Si $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1}-u_n)=2$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{n}=$

A 0 B 1 C $+\infty$ D 2

Q2 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sin^2 n-\cos^3 n}{n}=$

A 0 B 1 C $-\infty$ D $+\infty$

Q3 $\lim\limits_{x\to1^+}\ln x.\ln(\ln x)=$

A 1 B 0 C $+\infty$ D $-\infty$

Q4 Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

A $u_{2n}-u_n\geq\dfrac{1}{2}$ B $u_{2n}-u_n\leq\dfrac{1}{4}$

C $u_{2n}-u_n<\dfrac{1}{3}$ D $u_{2n}-u_n<\dfrac{1}{2}$

Q5 Pour la même suite que Q4. On a :

A $u_{2^{10}}\geq 6$ B $u_{2^{10}}<6$

C $u_{2^{10}}=3$ D $u_{2^{10}}<5$

Q6 $\cos(\text{Arctan}\,x)=$

A $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ B $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

C $\dfrac{-1}{\sqrt{1+x^2}}$ D $\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

Q7 Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue en 0 telle que $\forall x\in\mathbb{R}\ f(2x)=f(x)$ Alors f est :

A Constante
B Strictement croissante
C Strictement décroissante
D périodique de période 2

Q8 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction dérivable en $a\in\mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to a}\frac{xf(a)-af(x)}{x-a}=$$

A $f'(a)$ B $f(a)+af'(a)$

C $f(a)-f'(a)$ D $f(a)-af'(a)$

Q9 $\displaystyle\int_0^1\frac{x^4}{x^2+1}\,dx=$

A $\dfrac{\pi}{4}$ B $\dfrac{2}{3}$ C $\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{2}{3}$ D $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2}{3}$

Q10 $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}}x^2\ln\left(x^2+1\right)dx=$

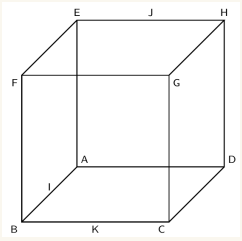
A $\sqrt{3}\ln 2-\dfrac{\pi}{9}$

B $\sqrt{3}\ln 2+\dfrac{\pi}{9}$

C $2\left(\sqrt{3}\ln 2-\dfrac{\pi}{9}\right)$

D $\sqrt{3}\ln 2$

Exercice 1 : On considère le cube ABCDEFGH et on note $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$ un repère orthonormé de l'espace.



Q11 Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{FD}$ sont

A $(1,1,1)$ B $(-1,1,1)$

C $(-1,1,-1)$ D $(1,1,0)$

Q12 Une représentation paramétrique de la droite (FD) est

A $\begin{cases}x=t\\y=t+1,\quad t\in\mathbb{R}\\z=-t\end{cases}$

B $\begin{cases}x=-t\\y=-t+1,\quad t\in\mathbb{R}\\z=-t\end{cases}$

C $\begin{cases}x=-t\\y=t+1,\quad t\in\mathbb{R}\\z=-t\end{cases}$

D $\begin{cases}x=t\\y=t+1,\quad t\in\mathbb{R}\\z=t\end{cases}$

Q13 On note I le milieu du segment [AB], J est le milieu du segment [EH] et K le milieu du segment [BC]. La droite (FD)

A est orthogonale au plan (IJK)
B n'est pas orthogonale au plan (IJK)
C appartient au plan (IJK)
D parallèle au plan (IJK)

Q14 Une équation cartésienne du plan (IJK) est $ax+by+cz+d=0$ avec

A $a=-1,\ b=-1,\ c=1$ et $d=\dfrac{-1}{2}$

B $a=1,\ b=-1,\ c=1$ et $d=\dfrac{-1}{2}$

C $a=-1,\ b=-1,\ c=1$ et $d=\dfrac{1}{2}$

D $a=1,\ b=1,\ c=-1$ et $d=\dfrac{-1}{2}$

Q15 Les coordonnées du point M ; intersection de la droite (FD) et le plan (IJK) sont :

A $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ B $\left(\dfrac{1}{2},0,\dfrac{1}{2}\right)$

C $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},0\right)$ D $(1,1,0)$

Q16 Le triangle IJK est

A Equilatéral B Rectangle en J
C Rectangle en K D Rectangle en I

Exercice 2 : Le QCM du concours ENSA comporte 20 question, pour chacune desquelles 4 réponses sont proposées et une seule est correcte. Un étudiant décide de remplir la grille-réponse en cochant au hasard une réponse pour chacune des 20 questions. Pour $n\in\mathbb{N}$ et $0\leq n\leq 20$, on note A_n «répondre au hasard exactement n fois correctement» ; l'évènement A_n est réalisé si n réponses sont correctes et $20-n$ sont incorrectes. $\binom{n}{p}$ désigne le nombre de combinaison de p parmi n.

Q17 Le nombre de grilles-réponses possibles est

A 24 B 20^4 C 80 D 4^{20}

Q18 La probabilité de ne donner aucune réponse correcte est $P(A_0)=$

A $\dfrac{3^{20}}{4^{20}}$ B $\dfrac{24}{4^{20}}$ C $\dfrac{1}{20^4}$ D $\dfrac{1}{80}$

Q19 La probabilité de donner exactement n bonnes réponses correctes est $P(A_n)=$

A $\dfrac{\binom{20}{n}3^n}{4^{20}}$ B $\dfrac{\binom{20}{n}3^{20-n}}{4^{20}}$

C $\dfrac{\binom{20}{3}3^{20-n}}{20^4}$ D $\dfrac{\binom{20}{3}3^n}{80}$

Q20 La probabilité de répondre au hasard au moins 6 fois correctement est

A $\displaystyle\sum_{n=6}^{20}\frac{\binom{20}{n}3^{20-n}}{4^{20}}$ B $\displaystyle\sum_{n=0}^{6}\frac{\binom{20}{n}3^{20-n}}{4^{20}}$

C $\displaystyle\sum_{n=6}^{20}\frac{\binom{20}{n}3^{20-n}}{20^4}$ D $\displaystyle\sum_{n=0}^{6}\frac{\binom{20}{n}3^{20-n}}{20^4}$

ÉCOLES NATIONALES DES SCIENCES APPLIQUÉES · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année des ENSA · Maroc

Session de juillet 2018

2018

Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14
D	A	B	A	A	B	A	D	C	C	C	C	A	B

Q15	Q16	Q17	Q18	Q19	Q20
A	D	D	A	B	A

Q1 ✔ Réponse D

$\frac{u_n-u_0}{n}=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1}-u_k)$ est la moyenne des n premiers écarts. Comme ces écarts tendent vers 2, leur moyenne tend aussi vers 2 (théorème de Cesàro). Et $\frac{u_0}{n}\to 0$, donc $\frac{u_n}{n}\to 2$. (Exemple : $u_n=2n$.)

Q2 ✔ Réponse A

$|\sin^2 n-\cos^3 n|\le 2$, donc $\left|\frac{\sin^2 n-\cos^3 n}{n}\right|\le\frac{2}{n}\to 0$.

Q3 ✔ Réponse B

Avec $t=\ln x\to 0^+$ quand $x\to 1^+$: $\ln x\cdot\ln(\ln x)=t\ln t\to 0$ (croissances comparées).

Q4 ✔ Réponse A

$u_{2n}-u_n=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}$ compte n termes, chacun $\ge\frac{1}{2n}$: la somme est $\ge n\times\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}$.

Q5 ✔ Réponse A

D'après Q4, $u_{2j}-u_{2j-1}\ge\frac{1}{2}$ pour tout $j\ge 1$. En sommant de $j=1$ à 10 :

$$u_{2^{10}}\ge u_1+10\times\frac{1}{2}=1+5=6.$$

Q6 ✔ Réponse B

Avec $t=\operatorname{Arctan}x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$: $\cos t>0$ et $\cos^2 t=\frac{1}{1+\tan^2 t}=\frac{1}{1+x^2}$.
Donc $\cos(\operatorname{Arctan}x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Q7 ✔ Réponse A

Pour tout x et tout n : $f(x)=f\left(\frac{x}{2}\right)=\cdots=f\left(\frac{x}{2^n}\right)$. Quand $n\to+\infty$, $\frac{x}{2^n}\to 0$ et, par continuité en 0, $f\left(\frac{x}{2^n}\right)\to f(0)$.
Donc $f(x)=f(0)$: f est constante.

Q8 ✔ Réponse D

$xf(a)-af(x)=$
$(x-a)f(a)-a\big(f(x)-f(a)\big)$, donc

$$\frac{xf(a)-af(x)}{x-a}=f(a)-a\,\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\to f(a)-af'(a).$$

Q9 ✔ Réponse C

$\frac{x^4}{x^2+1}=x^2-1+\frac{1}{x^2+1}$, donc l'intégrale vaut $\left[\frac{x^3}{3}-x+\arctan x\right]_0^1=\frac{1}{3}-1+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}$.

Q10 ✔ Réponse C

Par parties ($u=\ln(x^2+1)$, $v'=x^2$) :

$$\int_0^{\sqrt3}x^2\ln(x^2+1)\,dx=\left[\frac{x^3}{3}\ln(x^2+1)\right]_0^{\sqrt3}-\frac{2}{3}\int_0^{\sqrt3}\frac{x^4}{x^2+1}\,dx$$
$$=\sqrt3\ln 4-\frac{2}{3}\left[\frac{x^3}{3}-x+\arctan x\right]_0^{\sqrt3}.$$

Le crochet vaut $\sqrt3-\sqrt3+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$.
L'intégrale vaut
$2\sqrt3\ln 2-\frac{2\pi}{9}=2\left(\sqrt3\ln 2-\frac{\pi}{9}\right)$.

Q11 ✔ Réponse C

Dans le repère $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$:
$A(0,0,0)$, $B(1,0,0)$, $D(0,1,0)$, $E(0,0,1)$, $C(1,1,0)$, $F(1,0,1)$, $G(1,1,1)$, $H(0,1,1)$.
$\overrightarrow{FD}=D-F=(0-1,\ 1-0,\ 0-1)=(-1,1,-1)$.

Q12 ✔ Réponse C

Dans le repère $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$:
$A(0,0,0)$, $B(1,0,0)$, $D(0,1,0)$, $E(0,0,1)$, $C(1,1,0)$, $F(1,0,1)$, $G(1,1,1)$, $H(0,1,1)$.
La droite (FD) passe par $D(0,1,0)$ et est dirigée par $\overrightarrow{FD}(-1,1,-1)$: $x=-t$, $y=1+t$, $z=-t$. Les autres systèmes passent bien par D (pour $t=0$) mais ont un mauvais vecteur directeur.

Q13 ✔ Réponse A

Dans le repère $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$:
$A(0,0,0)$, $B(1,0,0)$, $D(0,1,0)$, $E(0,0,1)$, $C(1,1,0)$, $F(1,0,1)$, $G(1,1,1)$, $H(0,1,1)$.
Milieux : $I\left(\frac12,0,0\right)$, $J\left(0,\frac12,1\right)$, $K\left(1,\frac12,0\right)$.
$\overrightarrow{IJ}\left(-\frac12,\frac12,1\right)$ et $\overrightarrow{IK}\left(\frac12,\frac12,0\right)$. Avec $\overrightarrow{FD}(-1,1,-1)$:

$$\overrightarrow{FD}\cdot\overrightarrow{IJ}=\tfrac12+\tfrac12-1=0,$$
$$\overrightarrow{FD}\cdot\overrightarrow{IK}=-\tfrac12+\tfrac12+0=0.$$

$\overrightarrow{FD}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan : (FD) est orthogonale au plan (IJK).

Q14 ✔ Réponse B

Dans le repère $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$:
$A(0,0,0)$, $B(1,0,0)$, $D(0,1,0)$, $E(0,0,1)$, $C(1,1,0)$, $F(1,0,1)$, $G(1,1,1)$, $H(0,1,1)$.
Milieux : $I\left(\frac12,0,0\right)$, $J\left(0,\frac12,1\right)$, $K\left(1,\frac12,0\right)$.
D'après Q13, $\overrightarrow{FD}(-1,1,-1)$, ou $(1,-1,1)$, est normal au plan : $x-y+z+d=0$. Avec I : $\frac12+d=0$, donc $d=-\frac12$.
Vérification : J : $0-\frac12+1-\frac12=0$; K : $1-\frac12+0-\frac12=0$.

Q15 ✔ Réponse A

Avec la représentation de (FD) ($x=-t$, $y=1+t$, $z=-t$) et l'équation $x-y+z-\frac12=0$ du plan :

$$-t-(1+t)-t-\tfrac12=0\iff t=-\tfrac12.$$

$M\left(\frac12,\frac12,\frac12\right)$: c'est le centre du cube.

Q16 ✔ Réponse D

Dans le repère $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$:
$A(0,0,0)$, $B(1,0,0)$, $D(0,1,0)$, $E(0,0,1)$, $C(1,1,0)$, $F(1,0,1)$, $G(1,1,1)$, $H(0,1,1)$.
Milieux : $I\left(\frac12,0,0\right)$, $J\left(0,\frac12,1\right)$, $K\left(1,\frac12,0\right)$.
$IJ^2=\frac14+\frac14+1=\frac32$, $IK^2=\frac14+\frac14=\frac12$, $JK^2=1+0+1=2$.
$IJ^2+IK^2=2=JK^2$: d'après la réciproque de Pythagore, le triangle est rectangle en I (on a aussi $\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{IK}=-\frac14+\frac14+0=0$).

Q17 ✔ Réponse **D**

Chacune des 20 questions offre 4 choix indépendants : $4 \times 4 \times \cdots \times 4 = 4^{20}$ grilles.

Q18 ✔ Réponse **A**

Pour chaque question, il y a 3 réponses fausses sur 4 : 3^{20} grilles sans aucune bonne réponse sur 4^{20} grilles équiprobables.

$$P(A_0) = \frac{3^{20}}{4^{20}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{20}.$$

Q19 ✔ Réponse **B**

On choisit les n questions réussies : $\binom{20}{n}$ façons ; chacune a une seule bonne réponse, et chacune des $20-n$ autres a 3 réponses fausses possibles.

$P(A_n) = \dfrac{\binom{20}{n}\, 3^{20-n}}{4^{20}}$ (loi binomiale de paramètres 20 et $\frac{1}{4}$).

Q20 ✔ Réponse **A**

« Au moins 6 » est la réunion disjointe des A_n pour $n = 6, \ldots, 20$: on additionne les probabilités de Q19 pour n allant de 6 à 20.

ÉCOLES NATIONALES DES SCIENCES APPLIQUÉES · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année des ENSA · Maroc

Session de juillet 2017

2017 Énoncé

Q1 $\sqrt{9{,}8}\left(\frac{147}{375}\right)^{-\frac{4}{8}} =$

A 4 B 5 C 6 D 7

Q2 On pose

$$X = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$$

En calculant X^3, montrer que X vaut :

A 0 B 1 C 2 D 3

Q3 $2\operatorname{Arctan}\frac{1}{3} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{7} =$

A $\frac{\pi}{2}$ B $\frac{\pi}{3}$ C $\frac{\pi}{4}$ D $\frac{\pi}{6}$

Q4 $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n-(-1)^n}{n+(-1)^n} =$

A 0 B 1 C 2 D 3

Q5 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{xe^{-x}+x^2}{x-\ln x} =$

A 0 B 1 C $+\infty$ D $-\infty$

Q6 $\lim\limits_{x\to-1} \frac{x^3+x^2-x-1}{x^3-3x-2} =$

A $\frac{1}{2}$ B $\frac{1}{4}$ C $\frac{2}{3}$ D $\frac{3}{2}$

Q7 Soit $f(x) = |x|$ et f' la dérivée d'ordre 1 de f, alors :

A f n'est pas dérivable en 0
B $f'(0) = 0$
C $f'(0) = 1$
D $f'(0) = -1$

Q8 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^7\, dx =$

A $\frac{1}{\pi}$ B 0 C $\frac{16}{35}$ D $\frac{16}{35}\pi$

Q9 $\int_{\frac{1}{3}}^{1} \frac{(x-x^3)^{\frac{1}{3}}}{x^4}\, dx =$

A 2 B 5 C 6 D 7

Q10 $\int_0^1 \frac{xe^x}{(x+1)^2}\, dx =$

A $\left(\frac{e}{2}-1\right)$ B $(e^{-2}+1)$
C e^{-2} D e^2

Exercice 1 : On munit l'espace d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

Q11 Une représentation paramétrique de la droite passant par le point $A=(-1,2,-3)$ et orthogonale au plan d'équation $2x-3y+4z+1=0$ est :

A $\begin{cases} x=3-2t \\ y=2-t \\ z=-3+t \end{cases}$ B $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-3-2t \\ z=-3-4t \end{cases}$

C $\begin{cases} x=-3+2t \\ y=2-t \\ z=-3+t \end{cases}$ D $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=2-3t \\ z=-3+4t \end{cases}$

Q12 On note le point $A=(-1,3,1)$ et on considère la droite (D) dont l'une des représentations paramétrique est

$$\begin{cases} x=-1+2t \\ y=2-2t \\ z=3+3t \end{cases}$$

Les coordonnées du projeté orthogonal du point A sur la droite (D) sont :

A $\left(\frac{-33}{17},\frac{50}{17},\frac{27}{17}\right)$ B $\left(\frac{1}{13},\frac{12}{13},\frac{60}{13}\right)$
C $\left(\frac{-1}{17},\frac{18}{17},\frac{75}{17}\right)$ D $\left(\frac{-1}{17},\frac{18}{17},-\frac{75}{17}\right)$

Q13 L'intersection de la droite dirigée par $\vec{u}=(3,2,1)$ et passant par le point $A=(1,2,3)$ avec le plan (Oxy) est le point B de coordonnées :

A $(4,4,4)$ B $(-5,-2,1)$
C $(-8,-4,0)$ D $(4,4,0)$

Exercice 2 : Pour fêter leur réussite au concours ENSA, Taha et Jawad sont partis au restaurant pour déjeuner. Taha possède dans sa poche trois billets de 50 DH et un billet de 100 DH, alors que Jawad a dans sa poche un seul billet de 50 DH et un billet de 100 DH.
En tant que Amis, joyeux, Taha et Jawad décident en commun accord avec le serveur de payer leur repas selon la procédure suivante :
Dans une urne, deux boules enferment chacune le prénom d'un des deux amis, écrit sur un bout de papier. Le serveur choisit au hasard une des deux boules, l'ouvre, énonce le prénom écrit sur le bout de papier, le remet dans la boule qu'il dépose tout de suite dans l'urne.
La personne dont le prénom est choisi mettra sa main dans sa poche, en fermant les yeux, et fera sortir obligatoirement un seul billet (nous supposons que les billets sont indiscernables au toucher) et le remettra au serveur qu'il mettra à son tour dans sa caisse quelle que soit sa valeur. Si la valeur du billet tiré est de 100 DH, le serveur ferme la caisse et les deux amis peuvent quitter le restaurant, sinon l'opération se refait, une seule fois encore, selon la même procédure.

Q14 La probabilité pour que le coût du repas des deux amis soit de 150 DH est :

A $\frac{11}{32}$ B $\frac{10}{32}$ C $\frac{9}{32}$ D $\frac{12}{32}$

Q15 La probabilité pour que les deux amis paient équitablement le repas est :

A $\frac{6}{32}$ B $\frac{9}{32}$ C $\frac{15}{32}$ D $\frac{11}{32}$

Q16 La probabilité pour que l'un des deux amis mange gratuitement est :

A $\frac{19}{32}$ B $\frac{16}{32}$ C $\frac{22}{32}$ D $\frac{4}{32}$

Exercice 3 : On considère les nombres complexes suivants :

$$z_1 = \sqrt{2}+i\sqrt{6}, \quad z_2 = 2+2i$$

et $Z = \frac{z_1}{z_2}$

Q17 La forme algébrique de Z est :

A $\frac{\sqrt{2}}{4}\left(1+\sqrt{3}+i\sqrt{3}-i\right)$
B $\frac{\sqrt{2}}{4}\left(1-\sqrt{3}+i\sqrt{3}-i\right)$
C $\frac{\sqrt{2}}{4}(1+i)$
D $\frac{\sqrt{2}}{4}(1-i)$

Q18 Le module de Z est :

A 4 B 2 C 3 D 1

Q19 L'argument de Z est :

A $\frac{\pi}{12}[2\pi]$ B $\frac{\pi}{3}[2\pi]$
C $\frac{\pi}{6}[2\pi]$ D $\frac{\pi}{2}[2\pi]$

Q20 La forme algébrique de Z^{2017} est :

A $\frac{\sqrt{2}}{4}\left(1+\sqrt{3}+i\sqrt{3}-i\right)$
B $\frac{\sqrt{2}}{4}\left(-\sqrt{3}+i\sqrt{3}\right)$
C $\frac{\sqrt{2}}{4}(1+i)$
D $\frac{\sqrt{2}}{4}(1-i)$

ÉCOLES NATIONALES DES SCIENCES APPLIQUÉES · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année des ENSA · Maroc

Session de juillet 2017

2017 — Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14
B	B	C	B	C	C	A	C	C	A	D	A	C	B

Q15	Q16	Q17	Q18	Q19	Q20
A	C	A	D	A	A

Q1 ✔ Réponse B

$-\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}$, donc l'expression vaut $\sqrt{9{,}8} \times \sqrt{\frac{375}{147}} = \sqrt{\frac{9{,}8 \times 375}{147}} = \sqrt{\frac{3675}{147}} = \sqrt{25} = 5$.

Q2 ✔ Réponse B

Avec $a = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2}$ et $b = \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$: $a^3 - b^3 = 4$ et $ab = \sqrt[3]{5-4} = 1$. $X^3 = (a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b) = 4 - 3X$, donc $X^3 + 3X - 4 = (X-1)(X^2+X+4) = 0$. Comme $X^2 + X + 4 > 0$, $X = 1$.

Q3 ✔ Réponse C

Avec $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$: $\tan\left(2\operatorname{Arctan}\frac{1}{3}\right) = \dfrac{2/3}{1 - 1/9} = \dfrac{3}{4}$, puis

$$\tan\left(2\operatorname{Arctan}\tfrac{1}{3} + \operatorname{Arctan}\tfrac{1}{7}\right) = \frac{\frac{3}{4} + \frac{1}{7}}{1 - \frac{3}{28}} = \frac{25/28}{25/28} = 1.$$

La somme est dans $]0, \frac{\pi}{2}[$ (chaque angle est petit), donc elle vaut $\dfrac{\pi}{4}$.

Q4 ✔ Réponse B

En divisant par n : $\dfrac{1 - \frac{(-1)^n}{n}}{1 + \frac{(-1)^n}{n}} \to \dfrac{1}{1} = 1$, car $\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n} \to 0$.

Q5 ✔ Réponse C

$$\frac{xe^{-x} + x^2}{x - \ln x} = x \times \frac{e^{-x} + x}{x - \ln x} = x \times \frac{1 + \frac{e^{-x}}{x}}{1 - \frac{\ln x}{x}}.$$

La fraction tend vers 1 et $x \to +\infty$: la limite est $+\infty$.

Q6 ✔ Réponse C

$x^3 + x^2 - x - 1 = (x+1)^2(x-1)$ et $x^3 - 3x - 2 = (x+1)^2(x-2)$. Pour $x \neq -1$, la fraction vaut $\dfrac{x-1}{x-2} \to \dfrac{-2}{-3} = \dfrac{2}{3}$.

Q7 ✔ Réponse A

$\dfrac{|x| - 0}{x - 0}$ vaut 1 pour $x > 0$ et -1 pour $x < 0$: les limites à droite et à gauche diffèrent. f n'est pas dérivable en 0.

Q8 ✔ Réponse C

$(\cos x)^7 = (1 - \sin^2 x)^3 \cos x$. Avec $u = \sin x$:

$$\int_0^1 (1-u^2)^3\,du = \int_0^1 (1 - 3u^2 + 3u^4 - u^6)\,du = 1 - 1 + \frac{3}{5} - \frac{1}{7} = \frac{16}{35}.$$

Q9 ✔ Réponse C

Pour $x > 0$: $\left(x - x^3\right)^{\frac{1}{3}} = x\left(\frac{1}{x^2} - 1\right)^{\frac{1}{3}}$, donc l'intégrande vaut $\dfrac{1}{x^3}\left(\dfrac{1}{x^2} - 1\right)^{\frac{1}{3}}$.

Avec $u = \dfrac{1}{x^2} - 1$, $du = -\dfrac{2}{x^3}dx$; u va de 8 (pour $x = \frac{1}{3}$) à 0 :

$$\int_{1/3}^1 \ldots = \frac{1}{2}\int_0^8 u^{\frac{1}{3}}\,du = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4}\left[u^{\frac{4}{3}}\right]_0^8 = \frac{3}{8} \times 16 = 6.$$

Q10 ✔ Réponse A

$$\left(\frac{e^x}{x+1}\right)' = \frac{e^x(x+1) - e^x}{(x+1)^2} = \frac{xe^x}{(x+1)^2}.$$

L'intégrale vaut $\left[\dfrac{e^x}{x+1}\right]_0^1 = \dfrac{e}{2} - 1$.

Q11 ✔ Réponse D

Une droite orthogonale au plan est dirigée par son vecteur normal $\vec{n}(2,-3,4)$. Passant par $A(-1,2,-3)$: $x = -1 + 2t$, $y = 2 - 3t$, $z = -3 + 4t$.

Q12 ✔ Réponse A

Le point $M(t) = (-1+2t, 2-2t, 3+3t)$ de (D) est le projeté de A quand $\overrightarrow{AM}$ est orthogonal à $\vec{u}(2,-2,3)$:

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 2(2t) - 2(-1-2t) + 3(2+3t) = 17t + 8 = 0$$
$$\iff t = -\frac{8}{17}.$$

$M\left(-1 - \frac{16}{17},\ 2 + \frac{16}{17},\ 3 - \frac{24}{17}\right) = \left(-\frac{33}{17}, \frac{50}{17}, \frac{27}{17}\right)$.

Q13 ✔ Réponse C

La droite : $(1+3t, 2+2t, 3+t)$. Le plan (Oxy) a pour équation $z = 0$, donc $t = -3$ et $B(1-9, 2-6, 0) = (-8, -4, 0)$.

Q14 ✔ Réponse B

Premier tirage : Taha est désigné avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et tire 100 DH avec la probabilité $\frac{1}{4}$ ($\frac{3}{4}$ pour 50 DH) ; Jawad tire 100 DH avec la probabilité $\frac{1}{2}$. Le billet tiré ne revient pas dans la poche.
Le repas coûte 150 DH si le premier billet est de 50 DH et le second de 100 DH.

- Taha tire 50 DH ($\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$). Il lui reste deux billets de 50 et un de 100. Second tirage de 100 DH : $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{12}$. Contribution : $\frac{3}{8} \times \frac{5}{12} = \frac{5}{32}$.
- Jawad tire 50 DH ($\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$). Il ne lui reste que le billet de 100. Second tirage de 100 DH : $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times 1 = \frac{5}{8}$. Contribution : $\frac{1}{4} \times \frac{5}{8} = \frac{5}{32}$.

Total : $\dfrac{10}{32}$.

Q15 ✔ Réponse A

Premier tirage : Taha est désigné avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et tire 100 DH avec la probabilité $\frac{1}{4}$ ($\frac{3}{4}$ pour 50 DH) ; Jawad tire 100 DH avec la probabilité $\frac{1}{2}$. Le billet tiré ne revient pas dans la poche.
Ils paient la même somme seulement si chacun donne un billet de 50 DH : un premier tirage de 50 DH par l'un, puis un second de 50 DH par l'autre.

- Taha 50 puis Jawad 50 : $\frac{3}{8} \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{32}$.
- Jawad 50 puis Taha 50 : $\frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{4}\right) = \frac{3}{32}$.

Total : $\dfrac{6}{32}$.

Q16 ✔ Réponse C

Premier tirage : Taha est désigné avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et tire 100 DH avec la probabilité $\frac{1}{4}$ ($\frac{3}{4}$ pour 50 DH) ; Jawad tire 100 DH avec la probabilité $\frac{1}{2}$. Le billet tiré ne revient pas dans la poche.
L'un mange gratuitement si tous les billets viennent de la poche de l'autre :

- un seul tirage, de 100 DH : $\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{8}=\frac{12}{32}$;
- deux tirages par Taha (le premier de 50 DH) : $\frac{3}{8}\times\frac{1}{2}=\frac{6}{32}$;
- deux tirages par Jawad (le premier de 50 DH) : $\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{4}{32}$.

Total : $\dfrac{22}{32}$.

Q17 ✔ Réponse A

$$Z=\frac{(\sqrt{2}+i\sqrt{6})(2-2i)}{(2+2i)(2-2i)}=\frac{2\sqrt{2}+2\sqrt{6}+i(2\sqrt{6}-2\sqrt{2})}{8}=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(1+\sqrt{3}+i\sqrt{3}-i\right).$$

Q18 ✔ Réponse D

$|z_1|=\sqrt{2+6}=2\sqrt{2}$ et
$|z_2|=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$, donc $|Z|=1$.

Q19 ✔ Réponse A

$z_1=2\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\sqrt{2}\,e^{i\pi/3}$ et
$z_2=2\sqrt{2}\,e^{i\pi/4}$.
$\arg Z=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{12}\ [2\pi]$.

Q20 ✔ Réponse A

$Z=e^{i\pi/12}$, donc $Z^{24}=e^{2i\pi}=1$.
Comme $2017=24\times84+1$: $Z^{2017}=Z$, dont la forme algébrique est celle de Q17.

ÉCOLES NATIONALES DES SCIENCES APPLIQUÉES · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année des ENSA · Maroc

Session de juillet 2016

2016

Énoncé

Exercice 1 : Soient a, b, c trois nombres complexes distincts, A, B, C leurs images dans le plan. On note

$$t = \frac{c-a}{b-a}$$

Q1 Soient $r \in \mathbb{R}_+^*$, $\theta \in \mathbb{R}$, la relation $t = re^{i\theta}$ se traduit géométriquement par :

A $AC = rAB$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv 0[2\pi]$

B $AB = rAC$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \theta[2\pi]$

C $AC = rAB$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \theta[2\pi]$

D $AC = r^2AB$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \theta[2\pi]$

Q2 A, B, C sont alignés si et seulement si

A $t \in i\mathbb{R}$ B $t \in \mathbb{R}_+$
C $t \in i\mathbb{R}_+$ D $t \in \mathbb{R}$

Q3 Le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si

A $t \in i\mathbb{R}$ B $t \in \mathbb{R}_+$
C $t \in i\mathbb{R}_+$ D $t \in \mathbb{R}$

Exercice 2 : Soit E un ensemble à n éléments, et $A \subset E$ un sous-ensemble à p éléments.

Q4 Le nombre de parties de E est

A n^2 B 2^n C n^n D $n!$

Q5 Le nombre de parties de E qui contiennent un et un seul élément de A est

A $n\ 2^{n-p}$ B $p\ n\ 2^{n-p}$
C $p\ 2^{n-p}$ D 2^{n-p}

Q6 On part du point de coordonnées (0,0) pour rejoindre le point de coordonnées (p, q) (p et q entiers naturels donnés strictement supérieures à 1) en se déplaçant à chaque étape d'une unité vers la droite ou vers le haut. Combien y a-t-il de chemins possibles ?

A C_{p+q}^q B qC_{p+q}^q C C_{pq}^q D 2^{p+q}

Q7 Soit f la fonction réelle définit de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

A f est injective
B f est surjective
C f n'est pas injective
D f est injective et n'est pas surjective

Q8 Combien le nombre 15! admet-il de diviseurs ?

A 4032 B 3042 C 2034 D 3044

Q9 Un QCM comporte 20 questions, pour chacune d'elles 4 réponses sont proposées, une seule est exacte. Le nombre de grilles réponses possibles est :

A 4^{20} B 20^4 C 800 D 80

Q10 Soit $(x, y, z) \in ([0,1])^3$
$\alpha = \text{Minimum}\{x(1-y); y(1-z); z(1-x)\}$

A $\alpha = 0$ B $\alpha > \frac{1}{4}$
C $\frac{1}{8} < \alpha < \frac{1}{4}$ D $\alpha \leq \frac{1}{4}$

Q11 $\displaystyle\sum_{k=0}^{2016} (-1)^k C_{2016}^k =$

A 0 B 1 C 2 D 3

Q12 $\displaystyle\sum_{1\leq i\leq 10} \sum_{1\leq j\leq 10} (i+j)^2 =$

A 10000 B 10750
C 13000 D 13750

Q13 Toute fonction discontinue est :

A constante B non dérivable
C dérivable D périodique

Q14 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$

A f' n'est pas continue en 0
B f' est continue en 0
C f' admet une limite finie en 0
D f' a pour limite $+\infty$ en 0

Q15 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2} =$

A 1 B e^{-4} C $\sqrt{e}$ D 0

Q16 $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{2\cos^2\left(\frac{1}{x}\right) - \sin\left(\frac{1}{x}\right) + 3}{x + \sqrt{x}} =$

A $+\infty$ B 0 C 1 D 3

Q17 Soit r_i $(i = 1, 4)$ les quatres racines de l'équation réelle :

$$(x-7)(x-5)(x+4)(x+6) = 608$$

Le produit des racines

$$\prod_{i=1}^{4} r_i$$

vaut :

A 464 B 608 C 232 D 840

Q18 $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1+\ln x}{x \ln x}\, dx =$

A $1 - \ln 2$ B $1 + \ln 2$ C $\ln 2$ D 1

Q19 $\displaystyle\int_0^1 x^2 \sin(\pi x)\, dx =$

A $\frac{\pi^2 - 4}{\pi^3}$ B $\frac{\pi^2 + 4}{\pi^3}$
C $\frac{4}{\pi^3}$ D $\frac{-4}{\pi^3}$

Q20 Soient

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\cos(x) + \sin(x)}\, dx$$

et

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\cos(x) + \sin(x)}\, dx$$

A $I = J = 0$
B $I = \frac{\pi}{2}$ et $J = \frac{\pi}{4}$
C $I = J = \frac{\pi}{4}$
D $I = \frac{\pi}{3}$ et $J = \pi$

ÉCOLES NATIONALES DES SCIENCES APPLIQUÉES · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année des ENSA · Maroc

Session de juillet 2016

2016

Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14
C	D	A	B	C	A	C	A	A	D	A	D	B	A

Q15	Q16	Q17	Q18	Q19	Q20
B	A	C	B	A	C

Q1 ✔ Réponse C

$|t| = \dfrac{|c-a|}{|b-a|} = \dfrac{AC}{AB}$ et $\arg t = \arg(c-a) - \arg(b-a) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ $[2\pi]$.

$t = re^{i\theta}$ signifie donc $AC = rAB$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \theta$ $[2\pi]$.

Q2 ✔ Réponse D

A, B, C sont alignés si et seulement si $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv 0$ $[\pi]$, c'est-à-dire $\arg t \equiv 0$ $[\pi]$: t est réel (positif ou négatif).

Q3 ✔ Réponse A

ABC est rectangle en A si et seulement si $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{2}$ $[\pi]$: t est imaginaire pur ($t \neq 0$ car les points sont distincts). L'angle peut valoir $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$, d'où $i\mathbb{R}$ et non $i\mathbb{R}_+$.

Q4 ✔ Réponse B

Une partie est déterminée en décidant, pour chacun des n éléments, s'il y appartient ou non : 2^n parties.

Q5 ✔ Réponse C

On choisit l'unique élément de A (p façons), puis une partie quelconque de $E \setminus A$, qui a $n-p$ éléments (2^{n-p} façons) : $p\,2^{n-p}$.

Q6 ✔ Réponse A

Un chemin compte $p+q$ pas, dont q vers le haut. Il est déterminé par la position de ces q pas parmi les $p+q$: C_{p+q}^{q} chemins.

Q7 ✔ Réponse C

$f(2) = \dfrac{4}{5} = f\left(\dfrac{1}{2}\right)$: deux réels distincts ont la même image, f n'est pas injective. (Elle n'est pas surjective non plus : $|f(x)| \leq 1$ car $1 + x^2 \geq 2|x|$.)

Q8 ✔ Réponse A

$15! = 2^{11} \times 3^6 \times 5^3 \times 7^2 \times 11 \times 13$ (exposant de 2 : $7+3+1=11$; de 3 : $5+1=6$; de 5 : 3 ; de 7 : 2).
Nombre de diviseurs : $12 \times 7 \times 4 \times 3 \times 2 \times 2 = 4032$.

Q9 ✔ Réponse A

4 choix pour chacune des 20 questions : 4^{20} grilles.

Q10 ✔ Réponse D

Les trois nombres sont positifs, donc

$$\begin{aligned}\alpha^3 &\leq x(1-y)\,y(1-z)\,z(1-x)\\ &= \big(x(1-x)\big)\big(y(1-y)\big)\big(z(1-z)\big)\\ &\leq \left(\frac{1}{4}\right)^3,\end{aligned}$$

car $t(1-t) \leq \frac{1}{4}$ pour tout réel t. Donc $\alpha \leq \frac{1}{4}$ pour tout triplet.
A n'est pas toujours vraie : pour $x = y = z = \frac{1}{2}$, $\alpha = \frac{1}{4} \neq 0$. B et C ne sont pas toujours vraies (pour $x = 0$, $\alpha = 0$).

Remarque : Le corrigé de la bibliothèque (« Concours ENSA 2016 (corrigé) ») retient A (α = 0) en prenant x = 0, ce qui n'est qu'un cas particulier. La seule affirmation vraie pour tout triplet est D ($\alpha \leq 1/4$). À trancher par le professeur.

Q11 ✔ Réponse A

Formule du binôme : $\sum_{k=0}^{2016} C_{2016}^{k}(-1)^k\,1^{2016-k} = (1-1)^{2016} = 0$.

Q12 ✔ Réponse D

$(i+j)^2 = i^2 + 2ij + j^2$, avec $\sum_{i=1}^{10} i = 55$ et $\sum_{i=1}^{10} i^2 = 385$:

$$\begin{aligned}\sum_{i,j}(i+j)^2 &= 10 \times 385 + 2 \times 55^2 + 10 \times 385\\ &= 3850 + 6050 + 3850 = 13750.\end{aligned}$$

Q13 ✔ Réponse B

Une fonction dérivable en un point y est continue. Par contraposée, une fonction discontinue en un point n'y est pas dérivable : elle n'est pas dérivable (sur tout son domaine).

Q14 ✔ Réponse A

$f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$, et pour $x \neq 0$: $f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$.
$2x\sin\frac{1}{x} \to 0$ mais $\cos\frac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0 : f' n'a pas de limite en 0, elle n'est pas continue en 0.

Q15 ✔ Réponse B

$\left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)^{x+2} = e^{(x+2)\ln\left(1-\frac{4}{x+3}\right)}$ et $\ln\left(1-\frac{4}{x+3}\right) \sim -\frac{4}{x+3}$, donc l'exposant tend vers -4. La limite vaut e^{-4}.

Q16 ✔ Réponse A

Le numérateur est toujours $\geq 0 - 1 + 3 = 2$, et le dénominateur tend vers 0^+. Donc le quotient est $\geq \dfrac{2}{x + \sqrt{x}} \to +\infty$.

Q17 ✔ Réponse C

L'équation s'écrit $P(x) = (x-7)(x-5)(x+4)(x+6) - 608 = 0$, avec P unitaire de degré 4 : le produit des racines est $P(0) = 7 \times 5 \times 4 \times 6 - 608 = 840 - 608 = 232$.
(Les quatre racines sont bien réelles : avec $y = x^2 - x$, l'équation devient $(y-42)(y-20) = 608$, soit $y = 58$ ou $y = 4$.)

Q18 ✔ Réponse B

$\dfrac{1+\ln x}{x\ln x} = \dfrac{1/x}{\ln x} + \dfrac{1}{x}$, d'où l'intégrale $\Big[\ln(\ln x) + \ln x\Big]_e^{e^2} = (\ln 2 + 2) - (0 + 1) = 1 + \ln 2$.

Q19 ✔ Réponse A

Deux intégrations par parties donnent la primitive $-\dfrac{x^2\cos(\pi x)}{\pi} + \dfrac{2x\sin(\pi x)}{\pi^2} + \dfrac{2\cos(\pi x)}{\pi^3}$.
Entre 0 et 1 : $\left(\dfrac{1}{\pi} - \dfrac{2}{\pi^3}\right) - \dfrac{2}{\pi^3} = \dfrac{\pi^2 - 4}{\pi^3}$.

Q20 ✔ Réponse C

Le changement de variable $x \mapsto \frac{\pi}{2} - x$ échange sin et cos : $I = J$. Et $I + J = \displaystyle\int_0^{\pi/2} 1\,dx = \frac{\pi}{2}$.
Donc $I = J = \dfrac{\pi}{4}$.

ÉCOLES NATIONALES DES SCIENCES APPLIQUÉES · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année des ENSA · Maroc

Session de juillet 2015

2015 Énoncé

Q1 La somme

$$\frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{12} C_{12}^{k}\right) - 34 =$$

A 2012 B 2013 C 2014 D 2015

Q2 $n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}} \text{Min}(i,j) =$$

A $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
B $\dfrac{n(n+1)}{3}$
C $\dfrac{n(n+2)}{3}$
D $\dfrac{(n+1)(n+2)}{6}$

Q3 Soit le réel

$$\lambda = \sqrt[3]{3+\sqrt{9+\frac{125}{27}}} - \sqrt[3]{-3+\sqrt{9+\frac{125}{27}}}$$

En calculant λ^3, montrer que :

A $\lambda = 0$ B $\lambda = 1$
C $\lambda = 2$ D $\lambda = 3$

Q4 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\sin(n)}{3}\right)^n =$

A 1 B $\frac{1}{3}$ C $\frac{2}{3}$ D 0

Q5 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{2n+1}\dfrac{n}{n^2+k} =$

A 0 B 1 C 2 D k

Q6 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{10x}-e^{7x}}{x} =$

A 1 B 2 C 3 D 4

Q7 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+\sin^2\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)\ln x =$

A 1 B 0 C $-\infty$ D $+\infty$

Q8 $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{(10-3e^x)^2}\,dx =$

A $\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{10-3e}-\dfrac{1}{7}\right)$
B $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{10-3e}+\dfrac{1}{7}\right)$
C $\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{10-e}-\dfrac{1}{7}\right)$
D $\dfrac{1}{10-3e}$

Q9 $\displaystyle\int_1^e \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx =$

A $-\frac{5}{e}$ B $2+\frac{5}{e}$ C $\frac{5}{e}$ D $2-\frac{5}{e}$

Q10 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2+3x+2}\,dx =$

A $\ln\left(\frac{4}{3}\right)$ B $\frac{4}{3}$ C $\ln\left(\frac{5}{3}\right)$ D $\frac{5}{3}$

Problème 1 : On considère plusieurs urnes de boules $U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots$ telles que : la première urne, U_1, contient trois boules jaunes et deux boules vertes et chacune des autres urnes contient deux boules jaunes et deux boules vertes. On réalise des tirages successifs de la manière suivante :

- on tire au hasard une boule de U_1 ;
- on place la boule tirée de U_1 dans U_2, puis on tire une boule dans U_2 ;
- on place la boule tirée de U_2 dans U_3, puis on tire une boule dans U_3 ;
- … etc.

Pour tout entier $n \geq 1$, on note E_n l'événement « la boule tirée de U_n est verte » et $P_n = P(E_n)$ sa probabilité.

Q11 La valeur de P_1 est

A 0,54 B 0,40 C 0,44 D 0,64

Q12 Sachant qu'on a tiré une boule verte de U_1 et qu'on l'a placée dans U_2, la probabilité de tirer une boule verte de U_2 est

A 0,60 B 0,83 C 0,80 D 0,33

Q13 La valeur de P_2 est

A 0,44 B 0,46 C 0,48 D 0,45

Q14 La relation entre P_n et P_{n+1} est

A $P_{n+1} = 5 + 5P_n$
B $P_{n+1} = 2 + 5P_n$
C $P_{n+1} = 5 + 2P_n$
D $5P_{n+1} = 2 + P_n$

Q15 En étudiant le comportement de la suite P_n, peut-on confirmer qu'après un grand nombre de tirage on a

A une chance sur deux de tirer une boule verte
B une chance sur trois de tirer une boule verte
C une chance sur quatre de tirer une boule verte
D une chance sur cinq de tirer une boule verte

Problème 2 : Le plan complexe P est rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$; unité graphique 1 cm. Soient A, B et C les points d'affixes respectives $a = 2$, $b = 3 + i\sqrt{3}$ et $c = 2i\sqrt{3}$.

Q16 La mesure de l'angle $\widehat{ABC}$ vaut

A 90° B 95° C 85° D 180°

Q17 L'affixe ω du centre Ω du cercle circonscrit au triangle ABC est

A $1 - i\sqrt{3}$ B $1 + i\sqrt{3}$
C $-1 + i\sqrt{3}$ D $-1 - i\sqrt{3}$

Q18 On note A_n le point d'affixe z_n, où z_n est la suite de nombres complexes, de premier terme $z_0 = 0$, et telle que, pour tout entier naturel n :

$$z_{n+1} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} z_n + 2$$

On considère la suite $t_n = z_n - \omega$.
En faisant remarquer que ω est solution de l'équation $z = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2} z + 2$, la suite t_n vérifie la relation :

A $t_{n+1} = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2} t_n$
B $t_{n+1} = \dfrac{1-i\sqrt{3}}{2} t_n$
C $\left(1+i\sqrt{3}\right) t_{n+1} = 2t_n$
D $\left(1+i\sqrt{3}\right) t_n = 2t_{n+1}$

Q19 En déduire que pour tout entier naturel n, on a :

A $A_{n+6} = 2A_n$ B $A_{n+6} = -A_n$
C $A_{n+6} = A_n$ D $A_{n+6} = -2A_n$

Q20 La valeur de A_{2015} est

A $-1 + 2i\sqrt{3}$ B $3 + i\sqrt{3}$
C $3i\sqrt{2}$ D $-1 + i\sqrt{3}$

ÉCOLES NATIONALES DES SCIENCES APPLIQUÉES · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année des ENSA · Maroc

Session de juillet 2015

2015

Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14
C	A	B	D	C	C	C	A	D	A	B	A	C	D

Q15	Q16	Q17	Q18	Q19	Q20
A	A	B	A	C	D

Q1 ✔ Réponse C

$\sum_{k=0}^{12} C_{12}^k = (1+1)^{12} = 4096$, donc la somme vaut $2048 - 34 = 2014$.

Q2 ✔ Réponse A

$\mathrm{Min}(i,j) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{k\le i}\mathbf{1}_{k\le j}$, donc la somme vaut $\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)^2 = \sum_{m=1}^{n} m^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Vérification : pour $n=2$, Min vaut $1,1,1,2$, de somme $5 = \frac{2\times3\times5}{6}$.

Q3 ✔ Réponse B

Avec a et b les deux racines cubiques : $a^3 - b^3 = 6$ et $ab = \sqrt[3]{(9+\frac{125}{27})} - 9 = \sqrt[3]{\frac{125}{27}} = \frac{5}{3}$.

$\lambda^3 = (a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b) = 6 - 5\lambda$, donc

$\lambda^3 + 5\lambda - 6 = (\lambda-1)(\lambda^2+\lambda+6) = 0$, et $\lambda = 1$ (le second facteur est toujours positif).

Q4 ✔ Réponse D

$\left|\left(\frac{\sin n}{3}\right)^n\right| \le \left(\frac{1}{3}\right)^n \to 0$.

Q5 ✔ Réponse C

La somme compte $2n+2$ termes, chacun compris entre $\frac{n}{n^2+2n+1}$ et $\frac{n}{n^2}$:

$$\frac{(2n+2)n}{(n+1)^2} = \frac{2n}{n+1} \le \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{n}{n^2+k} \le \frac{2n+2}{n}.$$

Les deux bornes tendent vers 2.

Q6 ✔ Réponse C

$\frac{e^{10x}-e^{7x}}{x} = 10\,\frac{e^{10x}-1}{10x} - 7\,\frac{e^{7x}-1}{7x} \to 10 - 7 = 3$.

Q7 ✔ Réponse C

Pour $0 < x < 1$: $\ln x < 0$ et $1 \le 1 + \sin^2\frac{1}{x}$, donc $\left(1+\sin^2\frac{1}{x}\right)\ln x \le \ln x \to -\infty$.

Q8 ✔ Réponse A

$10 - 3e^x$ ne s'annule pas sur $[0,1]$ (car $3e < 10$), et $\left(\frac{1}{3(10-3e^x)}\right)' = \frac{e^x}{(10-3e^x)^2}$.

L'intégrale vaut $\left[\frac{1}{3(10-3e^x)}\right]_0^1 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{10-3e} - \frac{1}{7}\right)$.

Q9 ✔ Réponse D

Par parties ($u = (\ln x)^2$, $v' = \frac{1}{x^2}$) :

$\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x^2}dx = \left[-\frac{(\ln x)^2}{x}\right]_1^e + 2\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx = -\frac{1}{e} + 2\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx$.

De même, $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx = \left[-\frac{\ln x}{x}\right]_1^e + \int_1^e \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{e} + 1 - \frac{1}{e} = 1 - \frac{2}{e}$.

Total : $-\frac{1}{e} + 2 - \frac{4}{e} = 2 - \frac{5}{e}$.

Q10 ✔ Réponse A

$\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$, d'où $\left[\ln\frac{x+1}{x+2}\right]_0^1 = \ln\frac{2}{3} - \ln\frac{1}{2} = \ln\frac{4}{3}$.

Q11 ✔ Réponse B

U_1 contient 2 boules vertes sur 5 : $P_1 = \frac{2}{5} = 0{,}40$.

Q12 ✔ Réponse A

U_2 contient alors 2 jaunes et 3 vertes : $\frac{3}{5} = 0{,}60$.

Q13 ✔ Réponse C

Pour $n \ge 1$, l'urne U_{n+1} contient 2 jaunes, 2 vertes et la boule reçue de U_n (donc 5 boules). Si cette boule est verte, on tire une verte avec la probabilité $\frac{3}{5}$, sinon $\frac{2}{5}$. Formule des probabilités totales : $P_2 = 0{,}4 \times \frac{3}{5} + 0{,}6 \times \frac{2}{5} = 0{,}24 + 0{,}24 = 0{,}48$.

Q14 ✔ Réponse D

Pour $n \ge 1$, l'urne U_{n+1} contient 2 jaunes, 2 vertes et la boule reçue de U_n (donc 5 boules). Si cette boule est verte, on tire une verte avec la probabilité $\frac{3}{5}$, sinon $\frac{2}{5}$. $P_{n+1} = \frac{3}{5}P_n + \frac{2}{5}(1-P_n) = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}P_n$, soit $5P_{n+1} = 2 + P_n$.

Q15 ✔ Réponse A

Avec $5P_{n+1} = 2 + P_n$: $P_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{5}\left(P_n - \frac{1}{2}\right)$. La suite $\left(P_n - \frac{1}{2}\right)$ est géométrique de raison $\frac{1}{5}$, donc $P_n \to \frac{1}{2}$: une chance sur deux.

Q16 ✔ Réponse A

$\frac{c-b}{a-b} = \frac{-3+i\sqrt{3}}{-1-i\sqrt{3}} = \frac{(-3+i\sqrt{3})(-1+i\sqrt{3})}{4} = -i\sqrt{3}$: imaginaire pur, donc $\widehat{ABC} = 90°$.

Q17 ✔ Réponse B

Le triangle est rectangle en B : le centre du cercle circonscrit est le milieu de $[AC]$, $\omega = \frac{2+2i\sqrt{3}}{2} = 1 + i\sqrt{3}$.

Q18 ✔ Réponse A

Avec $q = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$: $\omega = q\omega + 2$ (vérification : $q\omega = -1 + i\sqrt{3}$). En soustrayant, $t_{n+1} = z_{n+1} - \omega = q(z_n - \omega) = q\,t_n$.

Q19 ✔ Réponse C

$q = e^{i\pi/3}$ donc $q^6 = 1$: $t_{n+6} = q^6 t_n = t_n$, d'où $z_{n+6} = z_n$ et $A_{n+6} = A_n$.

Q20 ✔ Réponse D

$2015 = 6 \times 335 + 5$, donc $A_{2015} = A_5$. $t_0 = -\omega$ et

$$t_5 = q^5 t_0 = -e^{-i\pi/3}(1+i\sqrt{3}) = -2,$$

donc $z_5 = t_5 + \omega = -1 + i\sqrt{3}$.

ÉCOLES NATIONALES DES SCIENCES APPLIQUÉES · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année des ENSA · Maroc

Session d'août 2014

2014 Énoncé

Exercice 1 : Soit u_n et v_n les suites réelles définies par :

$$u_0 = \alpha,\ v_0 = \beta \quad \text{avec } 0 < \alpha < \beta$$

$$\text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} : \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{u_n + v_n} \\ v_{n+1} = \dfrac{v_n^2}{u_n + v_n} \end{cases}$$

On pose : $x_n = \dfrac{u_n}{v_n}$ et $y_n = u_n - v_n$

Q1 La suite (x_n) :

A Converge vers $\dfrac{\alpha}{\beta}$ B Converge vers 1
C Converge vers 0 D Diverge

Q2 La suite (y_n) :

A Converge vers $\alpha - \beta$
B Converge vers $\alpha + \beta$
C Converge vers 0
D Diverge

Q3 La suite (u_n) :

A Converge vers α B Converge vers β
C Converge vers 0 D Diverge

Q4 La suite (v_n) :

A Converge vers $\alpha - \beta$
B Converge vers $\beta - \alpha$
C Converge vers β
D Diverge

Q5 Soit δ un élément de $]0, 1[$.

$$\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=0}^{n} \left(1 + \delta^{2^k}\right) =$$

A 1 B $+\infty$ C $\dfrac{1}{1-\delta}$ D $\dfrac{1}{1+\delta}$

Exercice 2 : Calculer les intégrales suivantes :

Q6 $\displaystyle\int_0^{\pi} e^t \cos 2t\, dt =$

A $\dfrac{e^\pi}{5}$ B $\dfrac{e^\pi + 1}{5}$
C $\dfrac{e^\pi - 2}{5}$ D $\dfrac{e^\pi - 1}{5}$

Q7 $\displaystyle\int_0^{\pi} e^t \cos^2 t\, dt =$

A $\dfrac{e^\pi - 1}{5}$ B $\dfrac{4(e^\pi + 1)}{5}$
C $\dfrac{3(e^\pi - 1)}{5}$ D $\dfrac{e^\pi + 2}{5}$

Exercice 3 : Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et telle que :
$\forall x \in [a, b],\ f(a + b - x) = f(x)$.

Q8 L'intégrale

$$\int_a^b t f(t)\, dt =$$

A $\dfrac{a+b}{2}\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ B $\dfrac{a-b}{2}\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$
C $\dfrac{a}{2}\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ D $\dfrac{b}{2}\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$

Q9 L'intégrale

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{3 + \cos^2 t}\, dt =$$

A $\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}$ B $\dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$ C $\dfrac{\pi}{3}$ D $\dfrac{\pi}{2\sqrt{3}}$

Q10 L'intégrale

$$\int_0^{\pi} \frac{t \sin t}{3 + \cos^2 t}\, dt =$$

A $\dfrac{\pi}{6\sqrt{3}}$ B $\dfrac{\pi^2}{6\sqrt{3}}$ C $\dfrac{\pi^3}{6\sqrt{3}}$ D $\dfrac{\pi^2}{2\sqrt{3}}$

Exercice 4 : On note

$$a = \frac{\sqrt[3]{41\sqrt{5} + 54\sqrt{3}}}{\sqrt{3}},$$

$$b = \frac{\sqrt[3]{54\sqrt{3} - 41\sqrt{5}}}{\sqrt{3}}$$

et $\lambda = a + b$.

Q11 Le produit ab vaut

A $\dfrac{1}{3}$ B $\dfrac{2}{3}$ C $\dfrac{7}{3}$ D 1

Q12 λ est solution de l'équation

A $x^3 - 7x - 36 = 0$
B $x^3 + 7x - 21 = 0$
C $x^3 - 7x = 0$
D $x^3 - 7x - 35 = 0$

Q13 La valeur de λ est alors

A nulle B un réel pair
C un réel impair D $\lambda > 4$

Exercice 5 : Un candidat se présentant à un concours, doit répondre d'une manière successive à une série de questions $(Q_n)_{n>0}$. L'épreuve est présentée en ligne et autre que Q_1, l'accès à Q_n n'est possible que si le candidat donne une réponse à Q_{n-1}. On admet que :

- la probabilité de donner une bonne réponse à Q_1 est $0{,}1$;
- pour $n > 1$: si le candidat donne une bonne réponse à Q_{n-1}, la probabilité de donner une bonne réponse à Q_n est $0{,}8$; si le candidat donne une mauvaise réponse à Q_{n-1}, la probabilité de donner une bonne réponse à Q_n est $0{,}6$.

On note pour tout entier naturel n non nul, B_n l'évènement « L'étudiant donne une bonne réponse à la question Q_n » et P_n la probabilité de B_n.

Q14 La valeur de P_2 est :

A $0{,}52$ B $0{,}59$ C $0{,}54$ D $0{,}62$

Q15 L'étudiant a répondu correctement à la deuxième question, la probabilité qu'il ait donné une mauvaise réponse à la première vaut

A $\dfrac{27}{37}$ B $\dfrac{21}{37}$ C $\dfrac{27}{31}$ D $\dfrac{21}{31}$

Q16 La probabilité que le candidat ait au moins une bonne réponse aux trois premières questions est

A $0{,}856$ B $0{,}865$ C $0{,}685$ D $0{,}585$

Exercice 6 : Le plan complexe P est rapporté au repère orthonormal direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$; unité graphique 1 cm. Soit A le point d'affixe $3i$. On appelle f l'application qui, à tout point M d'affixe z, distinct de A, associe le point M' d'affixe z' définie par

$$z' = \frac{3iz - 7}{z - 3i}$$

On dit que M est invariant si $M = M'$.

Q17 f admet deux points invariants B et C et on note z_B et z_C les affixes respectives. Montrer que la somme des parties imaginaires de z_B et z_C vaut

A -6 B 6 C 5 D -5

On admet que B et C sont tels que $|\mathrm{Im}(z_B)| > |\mathrm{Im}(z_C)|$ et on appelle $\mathcal{E}$ le cercle de diamètre $[BC]$. Soit M un point quelconque de $\mathcal{E}$ différent de B et de C et M' son image par f.

Q18 Il existe un réel Θ tel que l'affixe z de M s'écrit

A $3i - 4e^{i\Theta}$ B $-3i - 4e^{i\Theta}$
C $3i + 4e^{-i\Theta}$ D $3i + 4e^{i\Theta}$

Q19 Il existe un réel Θ tel que l'affixe z' de M' s'écrit

A $3i - 4e^{-i\Theta}$ B $-3i + 4e^{i\Theta}$
C $-3i + 4e^{-i\Theta}$ D $3i + 4e^{-i\Theta}$

Q20 Le point M'

A est à l'intérieur du cercle $\mathcal{E}$
B est à l'extérieur du cercle $\mathcal{E}$
C appartient au cercle $\mathcal{E}$
D est le centre du cercle $\mathcal{E}$

ÉCOLES NATIONALES DES SCIENCES APPLIQUÉES · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année des ENSA · Maroc

Session d'août 2014

2014

Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14
C	A	C	B	C	D	C	A	B	B	C	A	B	D

Q15	Q16	Q17	Q18	Q19	Q20
C	A	B	D	A	C

Q1 ✔ Réponse C

$y_{n+1} = \dfrac{u_n^2 - v_n^2}{u_n + v_n} = u_n - v_n = y_n : (y_n)$ est constante, égale à $\alpha - \beta$. Et $x_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{v_n^2} = x_n^2$, donc $x_n = \left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{2^n} \to 0$ car $0 < \frac{\alpha}{\beta} < 1$.

Q2 ✔ Réponse A

$y_{n+1} = \dfrac{u_n^2 - v_n^2}{u_n + v_n} = u_n - v_n = y_n : (y_n)$ est constante, égale à $\alpha - \beta$. Et $x_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{v_n^2} = x_n^2$, donc $x_n = \left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{2^n} \to 0$ car $0 < \frac{\alpha}{\beta} < 1$.

Q3 ✔ Réponse C

$y_{n+1} = \dfrac{u_n^2 - v_n^2}{u_n + v_n} = u_n - v_n = y_n : (y_n)$ est constante, égale à $\alpha - \beta$. Et $x_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{v_n^2} = x_n^2$, donc $x_n = \left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{2^n} \to 0$ car $0 < \frac{\alpha}{\beta} < 1$.

Comme $u_n = x_n v_n : y_n = v_n(x_n - 1)$, donc $v_n = \dfrac{\alpha - \beta}{x_n - 1} \to \beta - \alpha$, puis $u_n = v_n + y_n \to (\beta - \alpha) + (\alpha - \beta) = 0$.

Q4 ✔ Réponse B

$y_{n+1} = \dfrac{u_n^2 - v_n^2}{u_n + v_n} = u_n - v_n = y_n : (y_n)$ est constante, égale à $\alpha - \beta$. Et $x_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{v_n^2} = x_n^2$, donc $x_n = \left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{2^n} \to 0$ car $0 < \frac{\alpha}{\beta} < 1$.

$y_n = u_n - v_n = v_n(x_n - 1)$, donc $v_n = \dfrac{\alpha - \beta}{x_n - 1} \to \dfrac{\alpha - \beta}{-1} = \beta - \alpha$.

Q5 ✔ Réponse C

$(1-\delta)(1+\delta) = 1 - \delta^2$, puis $(1-\delta^2)(1+\delta^2) = 1 - \delta^4$, etc. Par récurrence :

$$(1-\delta)\prod_{k=0}^{n}\left(1+\delta^{2^k}\right) = 1 - \delta^{2^{n+1}} \to 1,$$

donc le produit tend vers $\dfrac{1}{1-\delta}$.

Q6 ✔ Réponse D

$e^t \cos 2t = \mathrm{Re}\left(e^{(1+2i)t}\right)$ et $\displaystyle\int_0^\pi e^{(1+2i)t}dt = \frac{e^{(1+2i)\pi} - 1}{1+2i} = \frac{e^\pi - 1}{1+2i}$ (car $e^{2i\pi} = 1$).

$\dfrac{1}{1+2i} = \dfrac{1-2i}{5}$, de partie réelle $\dfrac{1}{5}$: l'intégrale vaut $\dfrac{e^\pi - 1}{5}$.

Q7 ✔ Réponse C

$\cos^2 t = \dfrac{1 + \cos 2t}{2}$, donc l'intégrale vaut $\dfrac{1}{2}(e^\pi - 1) + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{e^\pi - 1}{5} = \dfrac{3(e^\pi - 1)}{5}$ (avec Q6).

Q8 ✔ Réponse A

Notons $I = \int_a^b t f(t)\,dt$. Avec $t \mapsto a + b - t$:

$$I = \int_a^b (a+b-t)f(a+b-t)\,dt = \int_a^b (a+b-t)f(t)\,dt.$$

En additionnant : $2I = (a+b)\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$.

Q9 ✔ Réponse B

Avec $u = \cos t$:

$$\int_{-1}^{1}\frac{du}{3+u^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\arctan\frac{u}{\sqrt{3}}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Q10 ✔ Réponse B

$f(t) = \dfrac{\sin t}{3 + \cos^2 t}$ vérifie $f(\pi - t) = f(t)$ sur $[0, \pi]$. D'après Q8 puis Q9 :

$$\int_0^\pi t f(t)\,dt = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(t)\,dt = \frac{\pi}{2}\times\frac{\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{\pi^2}{6\sqrt{3}}.$$

Q11 ✔ Réponse C

$$ab = \frac{\sqrt[3]{(54\sqrt{3})^2 - (41\sqrt{5})^2}}{3} = \frac{\sqrt[3]{8748 - 8405}}{3} = \frac{\sqrt[3]{343}}{3} = \frac{7}{3}.$$

Q12 ✔ Réponse A

$\lambda^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$, avec $a^3 + b^3 = \dfrac{(41\sqrt{5} + 54\sqrt{3}) + (54\sqrt{3} - 41\sqrt{5})}{3\sqrt{3}} = \dfrac{108\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = 36$ et $3ab = 7$.

Donc $\lambda^3 = 36 + 7\lambda$, soit $\lambda^3 - 7\lambda - 36 = 0$.

Q13 ✔ Réponse B

$4^3 - 7\times 4 - 36 = 64 - 28 - 36 = 0$, et $x^3 - 7x - 36 = (x-4)(x^2 + 4x + 9)$ où $x^2 + 4x + 9 > 0$. Donc $\lambda = 4$: un réel pair (et $\lambda > 4$ est faux).

Q14 ✔ Réponse D

$P_2 = 0{,}8 \times P_1 + 0{,}6 \times (1 - P_1) = 0{,}8\times 0{,}1 + 0{,}6\times 0{,}9 = 0{,}08 + 0{,}54 = 0{,}62$.

Q15 ✔ Réponse C

$P_{B_2}\left(\overline{B_1}\right) = \dfrac{P\left(\overline{B_1}\cap B_2\right)}{P(B_2)} = \dfrac{0{,}9\times 0{,}6}{0{,}62} = \dfrac{0{,}54}{0{,}62} = \dfrac{27}{31}$.

Q16 ✔ Réponse A

Événement contraire : trois mauvaises réponses, de probabilité $0{,}9\times 0{,}4\times 0{,}4 = 0{,}144$ (après une mauvaise réponse, la suivante est mauvaise avec la probabilité 0,4). $P = 1 - 0{,}144 = 0{,}856$.

Q17 ✔ Réponse B

z est invariant si $z(z - 3i) = 3iz - 7$, soit $z^2 - 6iz + 7 = 0$. Discriminant : $-36 - 28 = -64 = (8i)^2$, d'où $z = \dfrac{6i \pm 8i}{2}$: $z_B = 7i$ et $z_C = -i$. Le cercle $\mathcal{E}$ a pour centre le milieu $3i$ (c'est le point A) et pour rayon 4. $\mathrm{Im}(z_B) + \mathrm{Im}(z_C) = 7 - 1 = 6$ (c'est aussi la partie imaginaire de la somme des racines, $6i$).

Q18 ✔ Réponse **D**

z est invariant si $z(z-3i)=3iz-7$, soit $z^2-6iz+7=0$. Discriminant : $-36-28=-64=(8i)^2$, d'où $z=\dfrac{6i\pm 8i}{2}$: $z_B=7i$ et $z_C=-i$. Le cercle $\mathcal{E}$ a pour centre le milieu $3i$ (c'est le point A) et pour rayon 4.
Un point M de $\mathcal{E}$ vérifie $|z-3i|=4$, donc $z=3i+4e^{i\Theta}$ pour un réel Θ.
(Les écritures A et C décrivent aussi ce cercle, en remplaçant Θ par $\Theta+\pi$ ou $-\Theta$; la forme attendue, directement lue sur le centre et le rayon, est D.)

Remarque : A (3i − 4e^{iΘ}) et C (3i + 4e^{−iΘ}) décrivent aussi le cercle $\mathcal{E}$ pour un autre choix de Θ : plusieurs propositions sont vraies au sens strict. D est la forme attendue. À trancher par le professeur.

Q19 ✔ Réponse **A**

z est invariant si $z(z-3i)=3iz-7$, soit $z^2-6iz+7=0$. Discriminant : $-36-28=-64=(8i)^2$, d'où $z=\dfrac{6i\pm 8i}{2}$: $z_B=7i$ et $z_C=-i$. Le cercle $\mathcal{E}$ a pour centre le milieu $3i$ (c'est le point A) et pour rayon 4.
Avec $z=3i+4e^{i\Theta}$: $z-3i=4e^{i\Theta}$ et $3iz-7=3i(3i+4e^{i\Theta})-7=-16+12ie^{i\Theta}$. Donc

$$z'=\frac{-16+12ie^{i\Theta}}{4e^{i\Theta}}=3i-4e^{-i\Theta}.$$

Remarque : Pour le même Θ que celui de M (Q18), z′ = 3i − 4e^{−iΘ} (A). Mais « il existe un réel Θ » rend D (3i + 4e^{−iΘ}) vraie aussi, avec Θ remplacé par Θ + π. À trancher par le professeur.

Q20 ✔ Réponse **C**

D'après Q19, $|z'-3i|=\left|-4e^{-i\Theta}\right|=4$: M' appartient au cercle $\mathcal{E}$ de centre $3i$ et de rayon 4.

ÉCOLES NATIONALES DES SCIENCES APPLIQUÉES · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année des ENSA · Maroc

Session de juillet 2013

2013

Énoncé

Q1 Le comité du concours ENSA sait par expérience que la probabilité de réussir le concours est de $0{,}95$ pour l'étudiant(e) ayant mention "Très bien" au BAC, de $0{,}5$ pour celui ou celle qui a mention "Bien" au BAC et de $0{,}2$ pour les autres. Il estime, de plus, que parmi les candidats au concours ENSA 2013, 35% ont mention "Très bien" et 50% ont mention "Bien". Si l'on considère un(e) candidat(e) 2013 au hasard, ayant réussi le concours ENSA, la probabilité pour qu'il (ou elle) n'ait ni mention "Très Bien" ni mention "Bien" est :

A $0{,}0144$ B $0{,}0489$ C $0{,}1444$ D $0{,}0498$

Q2 Dans le conseil de l'établissement d'une ENSA, il y'a 5 mathématiciens et 6 physiciens. On doit former un comité concours, issu du conseil, composé de 3 mathématiciens et de 3 physiciens. Le règlement impose que les 2 physiciens les plus âgés doivent absolument faire partie du comité. Le nombre de comités différents à former est :

A 80 B 60 C 40 D 20

Q3 Le reste de la division euclidienne de $1234^{4321} + 4321^{1234}$ par 7 est égal à :

A 1 B 2 C 3 D 4

Q4 Le nombre $2^{100} - 1$

A est divisible par 31 et non par 3
B est divisible par 3 et non par 31
C est divisible par 3 et par 31
D n'est divisible ni par 3 ni par 31

Q5 La valeur de la somme

$$S = \sum_{k=1}^{35} k^2$$

est :

A 14512 B 14510 C 14910 D 14215

Q6 La valeur de la somme

$$\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k(k+1)}$$

est :

A $\frac{12}{11}$ B $\frac{11}{10}$ C $\frac{11}{12}$ D $\frac{10}{11}$

Q7 On note par $E(x)$ la partie entière du réel x

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} E(7k)$$

A 7 B $\frac{7}{2}$ C $\frac{7}{3}$ D $\frac{7}{4}$

Q8 $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2+(-1)^n} =$

A 1 B $\sqrt{2}$ C $\sqrt{3}$ D $+\infty$

Q9 Si z_1 et z_2 sont les deux solutions de l'équation complexe

$$z^2 = 5 - 12i$$

Alors la quantité $Re(z_1)Im(z_2)$ vaut

A 6 B 3 C -6 D 0

Q10 La partie imaginaire du nombre complexe

$$z = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$$

est :

A $\sqrt{3}^{20}$ B $-512\sqrt{3}$ C $-20\sqrt{3}$ D $+512\sqrt{3}$

Q11 $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\sqrt{x+x^2}-\sqrt{x}}{\sqrt{3x}\ln(1+x)} =$

A $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ B $\frac{1}{3\sqrt{3}}$ C $+\infty$ D 0

Q12 $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(\cos(2x))}{\ln(\cos(3x))} =$

A $\frac{3}{2}$ B $\frac{2}{3}$ C $\frac{4}{9}$ D $\frac{9}{4}$

Q13 $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(x)+x^2}{\ln(x+x^2)} =$

A 1 B 0 C $-\infty$ D $+\infty$

Q14 $\int_0^3 \dfrac{dx}{3+2^x} =$

A $-\dfrac{\ln(11)}{\ln(8)}$ B $\frac{5}{3}$
C $\frac{1}{5} - \dfrac{\ln(11)}{\ln(8)}$ D $\frac{5}{3} - \dfrac{\ln(11)}{\ln(8)}$

Q15 $\int_0^1 \ln\left(1+x^2\right) dx =$

A $\ln(2)$ B $\ln(2)-2$
C $\frac{\pi}{2}$ D $\ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}$

Q16 $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\, dx =$

A $\frac{\pi}{8}$ B π C 0 D $\frac{\pi}{16}$

Q17 Le plan $\mathcal{E}_2$ est rapporté à un repère orthonormal $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. Soient les points $A(4,5)$, $B(5,2)$ et $C(2,1)$. La distance du point C à la droite (AB) est égale à :

A $\sqrt{5}$ B $\sqrt{10}$ C $2\sqrt{10}$ D $10\sqrt{2}$

Q18 Soit ABC un triangle équilatéral du plan $\mathcal{E}_2$ rapporté à un repère orthonormal $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ de coté $4\sqrt{3}$ cm. Si M est un point intérieur quelconque du triangle ABC alors la valeur de la somme des distances de M aux cotés de ABC est

A $7\frac{\sqrt{3}}{2}$ B $6\sqrt{3}$ C 6 D $\sqrt{3}$

Q19 Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et H_1 et H_2 deux sous espaces vectoriels de E distincts.
Si $\dim E = 4$ et $\dim H_1 = \dim H_2 = 3$, alors

$$\dim(H_1 \cap H_2) =$$

$\dim X$ désigne la dimension de l'espace vectoriel X qui représente le nombre des vecteurs de l'une de ses bases

A 0 B 1 C 2 D 3

Q20 On considère la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice B^{13} vaut

A $\begin{pmatrix} 1 & 13 & 91 \\ 0 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ B $\begin{pmatrix} 1 & 13 & 92 \\ 0 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
C $\begin{pmatrix} 1 & 13 & 93 \\ 0 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ D $\begin{pmatrix} 1 & 13 & 94 \\ 0 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ÉCOLES NATIONALES DES SCIENCES APPLIQUÉES · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année des ENSA · Maroc

Session de juillet 2013

2013 — Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14
B	C	D	C	C	D	B	A	A	B	A	C	A	D

Q15	Q16	Q17	Q18	Q19	Q20
D	D	B	C	C	A

Q1 — ✔ Réponse B

Les « autres » représentent 15 % des candidats. Probabilité de réussir :

$$\begin{aligned} P(R) &= 0{,}35\times 0{,}95 + 0{,}5\times 0{,}5 + 0{,}15\times 0{,}2 \\ &= 0{,}3325 + 0{,}25 + 0{,}03 \\ &= 0{,}6125. \end{aligned}$$

$P_R(\text{autres}) = \dfrac{0{,}03}{0{,}6125} \approx 0{,}04898$, soit $0{,}0489$ (en tronquant à quatre décimales). La proposition $0{,}0498$ est trop grande.

Q2 — ✔ Réponse C

Mathématiciens : $\binom{5}{3} = 10$ choix.
Physiciens : les 2 plus âgés sont imposés, il reste à en choisir 1 parmi les 4 autres : 4 choix.
$10 \times 4 = 40$ comités.

Q3 — ✔ Réponse D

$1234 = 7\times 176 + 2$ et $4321 = 7\times 617 + 2$: les deux sont congrus à 2 modulo 7. Or $2^3 = 8 \equiv 1\ [7]$.
$4321 = 3\times 1440 + 1$ donc $2^{4321} \equiv 2$;
$1234 = 3\times 411 + 1$ donc $2^{1234} \equiv 2$. La somme est congrue à 4 : le reste est 4.

Q4 — ✔ Réponse C

$2^2 = 4 \equiv 1\ [3]$, donc
$2^{100} = (2^2)^{50} \equiv 1\ [3]$: 3 divise $2^{100} - 1$.
$2^5 = 32 \equiv 1\ [31]$, donc
$2^{100} = (2^5)^{20} \equiv 1\ [31]$: 31 divise aussi $2^{100} - 1$.

Q5 — ✔ Réponse C

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, donc

$$S = \frac{35\times 36\times 71}{6} = 35\times 6\times 71 = 14910.$$

Q6 — ✔ Réponse D

$\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$: la somme télescope et vaut $1 - \dfrac{1}{11} = \dfrac{10}{11}$.

Q7 — ✔ Réponse B

$7k$ est un entier, donc $E(7k) = 7k$ et

$$\sum_{k=1}^{n} E(7k) = \frac{7n(n+1)}{2}.$$

$$\frac{1}{n^2}\times\frac{7n(n+1)}{2} \to \frac{7}{2}.$$

Q8 — ✔ Réponse A

Pour n pair, le terme vaut $3^{1/n} \to 1$; pour n impair, il vaut $1^{1/n} = 1$. La limite est 1.

Q9 — ✔ Réponse A

$(3-2i)^2 = 9 - 12i - 4 = 5 - 12i$: les solutions sont $3-2i$ et $-3+2i$.
$\mathrm{Re}(z_1)\,\mathrm{Im}(z_2) = 3\times 2 = 6$, et l'on trouve aussi $(-3)\times(-2) = 6$ en échangeant z_1 et z_2.

Q10 — ✔ Réponse B

$1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\pi/3}$ et $1 - i = \sqrt{2}\,e^{-i\pi/4}$, donc $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i} = \sqrt{2}\,e^{7i\pi/12}$.
$z = 2^{10}e^{140i\pi/12} = 1024\,e^{35i\pi/3} = 1024\,e^{-i\pi/3}$ (car $\frac{35\pi}{3} = 12\pi - \frac{\pi}{3}$).
$\mathrm{Im}(z) = 1024\times\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -512\sqrt{3}$.

Q11 — ✔ Réponse A

$\sqrt{x+x^2} - \sqrt{x} = \sqrt{x}\left(\sqrt{1+x} - 1\right) = \dfrac{x\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}+1}$. Le quotient vaut

$$\frac{x\sqrt{x}}{(\sqrt{1+x}+1)\sqrt{3}\sqrt{x}\ln(1+x)} = \frac{1}{\sqrt{3}(\sqrt{1+x}+1)}\cdot\frac{x}{\ln(1+x)} \to \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

Q12 — ✔ Réponse C

Quand $u \to 0$: $\cos u - 1 \sim -\dfrac{u^2}{2}$ et

$\ln(1+h) \sim h$, donc $\ln(\cos u) \sim -\dfrac{u^2}{2}$.
Le quotient est équivalent à $\dfrac{-(2x)^2/2}{-(3x)^2/2} = \dfrac{4}{9}$.

Q13 — ✔ Réponse A

La limite se prend pour $x \to 0^+$.
$\ln(x+x^2) = \ln x + \ln(1+x)$, donc

$$\frac{\ln x + x^2}{\ln x + \ln(1+x)} = \frac{1 + \frac{x^2}{\ln x}}{1 + \frac{\ln(1+x)}{\ln x}} \to \frac{1+0}{1+0} = 1.$$

Q14 — ✔ Réponse D

$\dfrac{1}{3+2^x} = \dfrac{1}{3}\left(1 - \dfrac{2^x}{3+2^x}\right)$ et une primitive de $\dfrac{2^x}{3+2^x}$ est $\dfrac{\ln(3+2^x)}{\ln 2}$.
L'intégrale vaut

$$\frac{1}{3}\left[x - \frac{\ln(3+2^x)}{\ln 2}\right]_0^3 = \frac{1}{3}\left(3 - \frac{\ln 11 - \ln 4}{\ln 2}\right) = 1 + \frac{2}{3} - \frac{\ln 11}{3\ln 2} = \frac{5}{3} - \frac{\ln 11}{\ln 8}.$$

Q15 — ✔ Réponse D

Par parties :

$$\left[x\ln(1+x^2)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x^2}{1+x^2}dx = \ln 2 - 2\int_0^1\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx = \ln 2 - 2 + 2\times\frac{\pi}{4}.$$

Q16 — ✔ Réponse D

Avec $x = \sin t$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 t\cos^2 t\,dt = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\sin^2(2t)\,dt = \frac{1}{4}\times\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{16}.$$

Q17 — ✔ Réponse B

$\overrightarrow{AB}(1,-3)$ dirige (AB), donc
$(AB) : 3(x-4) + (y-5) = 0$, soit $3x + y - 17 = 0$.

$$d(C,(AB)) = \frac{|6+1-17|}{\sqrt{10}} = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}.$$

Q18 — ✔ Réponse C

En découpant ABC en trois triangles de sommet M :
$\text{Aire}(ABC) = \frac{1}{2}a(d_1+d_2+d_3)$, où a est le côté. Donc $d_1+d_2+d_3$ est la hauteur du triangle équilatéral :

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}\times 4\sqrt{3} = 6 \text{ cm}.$$

Q19 — ✔ Réponse C

$H_1 \neq H_2$ et tous deux de dimension 3 : $H_1 + H_2$ contient strictement H_1, donc $\dim(H_1+H_2) = 4$.
Formule de Grassmann :
$\dim(H_1 \cap H_2) = 3 + 3 - 4 = 2$.

Q20 ✔ Réponse **A**

$B = I + N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = 0$. Comme I et N commutent :

$$\begin{aligned} B^{13} &= I + 13N + \binom{13}{2} N^2 \\ &= I + 13N + 78N^2. \end{aligned}$$

Le coefficient en haut à droite vaut $13 + 78 = 91$.

ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES DE TANGER · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année · ENSA Tanger

Édition 2012

2012

Énoncé

Q1 Soit L une liste finie d'entiers relatifs **consécutifs** dont le premier terme est -15.
$L = \{-15, -14, \dots\}$. Si la somme de tous les éléments de L est égale à 51 alors **le nombre total des termes** de liste L est égale

A 34 B 50 C 18

Q2 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n 3^{n+1}}{\pi^n} =$

A 3 B 0 C $\dfrac{3}{\pi}$

Q3 Soit $Z_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{e^{k-1}}{\pi^{k+1}}$; alors
$\lim\limits_{n\to\infty} Z_n =$

A $+\infty$ B $\dfrac{1}{\pi(\pi-e)}$ C $\dfrac{1}{\pi-e}$

Q4 Une entreprise de fabrication de mixeurs a adopté pour l'année 2012 la stratégie de production suivante : la production connaitre une diminution mensuelle de 10% ; mais grâce à une commande destinée à l'export, l'entreprise produira chaque mois 150 mixeurs de plus.
On note à présent par t_n la production de l'usine relative au moins $N^\circ\, n$.
L'expression reliant t_{n+1} et t_n est donnée par

A $t_{n+1} = 0{,}1\, t_n - 150$
B $t_{n+1} = 0{,}9\, t_n + 150$
C $t_{n+1} = 0{,}1\, t_n$

Q5 suite de la question 4).
A Long terme la production mensuelle des mixeurs est estimée à $P =$

A $P = 10$ mixeurs
B $P = 90$ mixeurs
C $P = 1500$ mixeurs

Q6 Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite nulmérique à termes strictement positifs $(u_n > 0)$ vérifiant
$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{2}$, Alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = L$ avec

A $L = \dfrac{1}{2}$ B $L = 0$ C $0 < L < \dfrac{1}{2}$

Q7 Soit $T_n = \sum\limits_{p=1}^{n} 2^{\frac{1}{2p-1}} - 2^{\frac{1}{2p+1}}$; alors
$\lim\limits_{n\to\infty} T_n =$

A 1 B 0 C $+\infty$

Q8 On considère la courbe représentative de la fonction $f(x) = e^{-x^2}$. On désigne par $R(x)$, $x > 0$ le rectangle symétrique inscrit à l'intérieur de la courbe et dont l'un des côtés est le segment d'extrémités $(-x, 0)$ et $(x, 0)$. La surface maximale de ce rectangle est égale à

A $\sqrt{2e}$ B $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ C $\sqrt{\dfrac{2}{e}}$

Q9 $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin \pi x}{1 - \cos\sqrt{\pi x}} =$

A 0 B 2 C $\sqrt{\pi}$

Q10 $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{h} \displaystyle\int_e^{e+h} \dfrac{1}{(\ln x)^2}\, dx =$

A 1 B e C 0

Q11 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \dfrac{1+\sin x}{1+\cos x}\, dx =$

A $\dfrac{\sqrt{\pi}}{\pi}$ B 0 C $\ln \pi$

Q12 $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \dfrac{dx}{4x^2+4x+5}$

A $\dfrac{\pi}{16}$ B $\dfrac{\pi\sqrt{3}}{18}$ C $\dfrac{\sqrt{\pi}}{6}$

Q13 La surface formée par la courbe de $f(x) = (\ln x)^2$ et par les droites $x = 1$ et $x = e$ est égale

A e B $3e - 2$ C $e - 2$

Q14 Soit $(V_n)_{n\geq 3}$ la suite définie par $V_n = \displaystyle\int_e^n \dfrac{1}{x\sqrt{(\ln x)^3}}\, dx$. Alors $\lim\limits_{n\to\infty} V_n =$

A $\dfrac{1}{2}$ B $+\infty$ C $\dfrac{2}{\sqrt{e}}$

Q15 Soit $g(x) = \displaystyle\int_1^{\tan x} \dfrac{1}{\arctan u}\, du$, alors la tangente à la courbe de g en $x = \dfrac{\pi}{4}$ admet pour équation

A $y = \dfrac{8}{\pi}x - 2$
B $y = \dfrac{\pi}{4}(x-1)$
C $y = \dfrac{\pi}{2}x - 1$

Q16 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{dx}{\cos^2 x + 4\sin^2 x} =$

A $\dfrac{\ln 2}{2}$ B $\dfrac{1}{2}\arctan 2$ C $\dfrac{1}{2}$

Q17 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n!)^2}{(2n)!} =$

A 0 B $\dfrac{1}{2}$ C $+\infty$

Q18 Soit $B = \{u, v, w\}$ une base de $(\mathbb{R}^3, +, .)$. On considère les familles suivantes
- $E = \{u+v, v+w, u+w\}$
- $N = \{u, v, u+w\}$
- $S = \{-u, v+w, v-u+w\}$
- $A = \{u-v-w, u+v+w, u\}$

Alors laquelle (ou lesquelles) des familles forme une base ?

A Toutes les 4
B Seulement E
C Seulement E et N

Q19 Soit
$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + 2y = 0\}$.
Lequel des systèmes suivants forme une base pour E ?

A $\{(-2, 1, 0); (0, 1, 0); (0, 0, 1)\}$
B $\{(-2, 1, 0); (0, 0, 1)\}$
C $\{(-2, 1, 0)\}$

Q20 On considère les ensembles suivants
- $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + yz = 0\}$
- $N = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / xyz = 0\}$
- $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = 2\}$
- $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y = z\}$

Lesquels parmi ces ensembles sont des sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?

A Seulement A
B Seulement A et N
C Tous E, N, S et A

Q21 Soit A une matrice carrée d'ordre n vérifiant $A^2 = 2I_n - A$ (I_n est la matrice identité)
On considère les égalités suivantes
- (I) $\det A = 0$
- (II) $A^{-1} = \dfrac{1}{2}(A + I_n)$
- (III) $\det A \neq 0$
- (IV) $A^{-1} = 2I_n + A$
- (V) $\det(A + I_n) = \dfrac{2}{\det A}$

Alors

A Seulement (I) et (IV) sont vraies
B Seulement (II), (III) et (V) sont vraies
C Seulement (III), (IV) et (V) sont vraies

Q22 $\sqrt{12345^2 - 12343 \times 12347} =$

A 4 B 2 C 42

Q23 $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{2}\right)\left(\sqrt[4]{2}\right)\left(\sqrt[8]{2}\right)\dots\left(\sqrt[2^n]{2}\right) =$

A 1 B 2 C $\sqrt{2}$

Q24 Si $\displaystyle\int_0^x h(t)\, dt = x\arctan x$ alors $h(1) =$

A $\dfrac{1}{2}$ B $\dfrac{\pi}{4}$ C $\dfrac{\pi+2}{4}$

Q25 $\displaystyle\int \dfrac{dx}{\tan^3 x}$ (K une constante)

A $-\left[\dfrac{1}{2\sin^2 x} + \ln|\sin x|\right] + K$
B $-\dfrac{1}{2\tan^2 x} + K$
C $\dfrac{1}{2\arctan^2 x} + K$

ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES DE TANGER · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année · ENSA Tanger

Édition 2012

2012

Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14
A	B	B	B	C	B	A	C	B	A	B	A	C	–

Q15	Q16	Q17	Q18	Q19	Q20	Q21	Q22	Q23	Q24	Q25
A	B	A	C	B	A	B	B	B	C	A

Q1 ✔ Réponse A

Avec n termes $-15, -14, \dots, n-16$ (suite arithmétique de raison 1) :

$$S = \frac{n\,(-15 + (n-16))}{2} = \frac{n(n-31)}{2}.$$

$S = 51 \iff n^2 - 31n - 102 = 0$.
Discriminant : $961 + 408 = 1369 = 37^2$, donc $n = \dfrac{31+37}{2} = 34$ (l'autre racine est négative).
Vérification : la liste va de -15 à 18 ; les termes de -15 à 15 s'annulent et il reste $16 + 17 + 18 = 51$.

Q2 ✔ Réponse B

$\dfrac{(-1)^n 3^{n+1}}{\pi^n} = 3\left(-\dfrac{3}{\pi}\right)^n$ et $\left|-\dfrac{3}{\pi}\right| < 1$ car $3 < \pi$. La suite géométrique tend vers 0.

Q3 ✔ Réponse B

$Z_n = \dfrac{1}{\pi^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{e}{\pi}\right)^{k-1}$: somme géométrique de raison $\dfrac{e}{\pi} \in]0,1[$. Donc

$$\lim_{n\to\infty} Z_n = \frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{e}{\pi}} = \frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{\pi}{\pi-e} = \frac{1}{\pi(\pi-e)}.$$

Q4 ✔ Réponse B

Une diminution de 10 % multiplie la production par $1 - 0{,}1 = 0{,}9$, puis on ajoute les 150 mixeurs de la commande : $t_{n+1} = 0{,}9\,t_n + 150$.

Q5 ✔ Réponse C

La suite arithmético-géométrique converge (coefficient $0{,}9$ de valeur absolue < 1) vers le point fixe P :

$$\begin{aligned} P &= 0{,}9\,P + 150 \\ &\iff 0{,}1\,P = 150 \\ &\iff P = 1500. \end{aligned}$$

En effet
$t_n - 1500 = 0{,}9^n\,(t_0 - 1500) \to 0$.

Q6 ✔ Réponse B

Comme le rapport tend vers $\frac{1}{2} < \frac{3}{4}$, il existe un rang N tel que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \le \dfrac{3}{4}$ pour $n \ge N$. Alors $0 < u_n \le \left(\frac{3}{4}\right)^{n-N} u_N$ pour $n \ge N$, et le majorant tend vers 0. Donc $L = 0$.

Q7 ✔ Réponse A

Avec $a_p = 2^{\frac{1}{2p-1}}$, on a $2^{\frac{1}{2p+1}} = a_{p+1}$: la somme télescope.

$$\begin{aligned} T_n &= a_1 - a_{n+1} \\ &= 2^1 - 2^{\frac{1}{2n+1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 2 - 2^0 = 1. \end{aligned}$$

Q8 ✔ Réponse C

Le rectangle a pour base $2x$ et pour hauteur $f(x) = e^{-x^2}$: $S(x) = 2x\,e^{-x^2}$.
$S'(x) = 2e^{-x^2}(1 - 2x^2)$ s'annule en $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (S croît avant, décroît après). Le maximum vaut

$$S\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2}{\sqrt{2}}\,e^{-1/2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{e}} = \sqrt{\frac{2}{e}}.$$

Q9 ✔ Réponse B

Quand $x \to 0^+$: $\sin \pi x \sim \pi x$ et, avec $u = \sqrt{\pi x} \to 0$, $1 - \cos u \sim \dfrac{u^2}{2} = \dfrac{\pi x}{2}$. Le quotient tend vers $\dfrac{\pi x}{\pi x/2} = 2$.

Q10 ✔ Réponse A

Si F est une primitive de $f(x) = \dfrac{1}{(\ln x)^2}$ (continue près de e), la quantité vaut $\dfrac{F(e+h) - F(e)}{h} \to F'(e) = f(e) = \dfrac{1}{(\ln e)^2} = 1$.

Q11 ✔ Réponse B

Le changement de variable $x = \frac{\pi}{2} - t$ échange sin et cos :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\frac{1+\cos t}{1+\sin t}\,dt = -I.$$

Donc $I = 0$.

Q12 ✔ Réponse A

$4x^2 + 4x + 5 = (2x+1)^2 + 4$. Une primitive est $\dfrac{1}{4}\arctan\dfrac{2x+1}{2}$ (dériver pour vérifier). Donc

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{4x^2+4x+5} &= \frac{1}{4}\,(\arctan 1 - \arctan 0) \\ &= \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{16}. \end{aligned}$$

Q13 ✔ Réponse C

$f \ge 0$, donc l'aire est $\displaystyle\int_1^e (\ln x)^2\,dx$. Deux intégrations par parties donnent la primitive $x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x$. D'où

$$\begin{aligned} \int_1^e (\ln x)^2\,dx &= (e - 2e + 2e) - (0 - 0 + 2) \\ &= e - 2. \end{aligned}$$

Q14 ✔ Réponse –

Avec $u = \ln x$: $V_n = \displaystyle\int_1^{\ln n} u^{-3/2}\,du = \left[-\frac{2}{\sqrt{u}}\right]_1^{\ln n} = 2 - \frac{2}{\sqrt{\ln n}} \to 2$. Aucune proposition n'est juste (erreur du sujet).

Q15 ✔ Réponse A

$g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \displaystyle\int_1^1 \cdots = 0$. Pour x proche de $\frac{\pi}{4}$:

$$g'(x) = \frac{1+\tan^2 x}{\arctan(\tan x)} = \frac{1+\tan^2 x}{x},$$

$$g'\left(\tfrac{\pi}{4}\right) = \frac{2}{\pi/4} = \frac{8}{\pi}.$$

Tangente : $y = \dfrac{8}{\pi}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{8}{\pi}x - 2$.

Q16 ✔ Réponse B

On divise par $\cos^2 x$: l'intégrande devient $\dfrac{1+\tan^2 x}{1+4\tan^2 x}$. Avec $t = \tan x$, $dt = (1+\tan^2 x)\,dx$:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dt}{1+4t^2} &= \left[\frac{1}{2}\arctan(2t)\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}\arctan 2. \end{aligned}$$

Q17 ✔ Réponse **A**

Avec $u_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{n+1}{2(2n+1)} \leq \frac{1}{2} \text{ pour } n \geq 1.$$

Donc $0 < u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u_1$ et $u_n \to 0$.

Q18 ✔ Réponse **C**

Trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ forment une base si et seulement s'ils sont libres. Dans la base B :

- E : $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$: base.
- N : $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$: base.
- S : $v - u + w = (-u) + (v + w)$: famille liée.
- A : $(u - v - w) + (u + v + w) = 2u$: famille liée.

Seules E et N sont des bases.

Q19 ✔ Réponse **B**

L'ensemble défini dans l'énoncé (noté S, puis E dans la question) est le plan d'équation $x + 2y = 0$: $(x, y, z) = (-2y, y, z) = y(-2, 1, 0) + z(0, 0, 1)$. La famille $\{(-2, 1, 0); (0, 0, 1)\}$ est génératrice et libre : c'est une base (dimension 2). A contient $(0, 1, 0)$, qui n'est pas dans le plan ; C n'engendre qu'une droite.

Q20 ✔ Réponse **A**

- A est défini par une équation linéaire : c'est un sous-espace vectoriel (un plan).
- S ne contient pas $(0, 0, 0)$.
- N : $(1, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$ sont dans N, mais leur somme $(1, 1, 1)$ ne l'est pas.
- E : $(-1, 1, 1) \in E$ mais $2 \cdot (-1, 1, 1) = (-2, 2, 2)$ donne $-2 + 4 = 2 \neq 0$.

Seul A est un sous-espace vectoriel.

Q21 ✔ Réponse **B**

$A^2 + A = 2I_n$ s'écrit $A \cdot \dfrac{1}{2}(A + I_n) = I_n$: A est inversible, $A^{-1} = \dfrac{1}{2}(A + I_n)$. Donc (II) et (III) sont vraies, (I) est fausse, et (IV) est fausse (l'inverse est unique). Pour (V) : $A + I_n = 2A^{-1}$, donc $\det(A + I_n) = 2^n \det(A^{-1}) = \dfrac{2^n}{\det A}$. Cela vaut $\dfrac{2}{\det A}$ seulement si $n = 1$; la proposition B suppose donc $n = 1$ (ou un oubli du facteur 2^n).

Remarque : (V) n'est vraie que pour n = 1 : en général $\det(A + I_n) = 2^n/\det A$ (par exemple $A = I_n$ vérifie $A^2 = 2I_n - A$ et $\det(2I_n) = 2^n$). Pour $n \geq 2$ aucune proposition n'est exacte ; B est la réponse visée par le sujet. À trancher par le professeur.

Q22 ✔ Réponse **B**

Avec $a = 12345$:
$12343 \times 12347 = (a - 2)(a + 2) = a^2 - 4$.
Donc $\sqrt{a^2 - (a^2 - 4)} = \sqrt{4} = 2$.

Q23 ✔ Réponse **B**

Le produit vaut $2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}} = 2^{1 - \frac{1}{2^n}}$, qui tend vers $2^1 = 2$.

Q24 ✔ Réponse **C**

En dérivant (h continue) : $h(x) = \arctan x + \dfrac{x}{1 + x^2}$. Donc $h(1) = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi + 2}{4}$.

Q25 ✔ Réponse **A**

$$\frac{1}{\tan^3 x} = \frac{\cos^3 x}{\sin^3 x} = \frac{\cos x\,(1 - \sin^2 x)}{\sin^3 x} = \frac{\cos x}{\sin^3 x} - \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Une primitive est donc $-\dfrac{1}{2\sin^2 x} - \ln|\sin x|$, c'est-à-dire A. (B est la primitive de $\dfrac{1 + \tan^2 x}{\tan^3 x}$, pas de $\dfrac{1}{\tan^3 x}$.)

ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES DE TANGER · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'entrée en 1re année du cycle préparatoire · ENSA Tanger

Tanger, le 08/08/2011

2011 — Énoncé

Q1 Soient z_1, z_2 deux nombres complexes. On suppose que : $|z_1| = |z_2| = 1$ et $|2 + z_1 z_2| = 1$. Alors $z_1.z_2 =$

A 0 B -1 C $+1$

Q2 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n =$

A $\begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ B $\begin{pmatrix} 1 & 2^n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ C $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Q3 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$; alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $A^n =$

A $\begin{pmatrix} 2^{n+1}-1 & 2^n-1 \\ 2-2^{n+1} & 2-2^n \end{pmatrix}$

B $\begin{pmatrix} 2^n-1 & 2^n-1 \\ 2-2^{n+1} & 2-2^n \end{pmatrix}$

C $\begin{pmatrix} 2^{n+1}-1 & 2^n-1 \\ 1-2^{n+1} & 2-2^n \end{pmatrix}$

Q4 Soient a et b deux nombres complexes tels que $a \neq b$, et $|a| = 1$. Alors, on a

A $\left|\dfrac{a-b}{1-\overline{a}b}\right| = 1$

B $\left|\dfrac{a-b}{1-\overline{a}b}\right| = |ab|$

C $\left|\dfrac{a-b}{1-\overline{a}b}\right| = \left|\overline{ab}\right|$

Q5 Si $|a| = |b| = |c| = 1$, alors : $|ab + bc + ca| =$

A $|abc|$ B $|a+b+c|$ C $\left|\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}\right|$

Q6 La somme de la série $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$ est :

A $+\infty$
B e
C $\operatorname{Log} e$ (e : nombre d'Euler)

Q7 $\displaystyle\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{2\cos x - \sqrt{2}} =$

A $-\sqrt{2}$ B $+\sqrt{2}$ C 1

Q8 $\displaystyle\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{cotan} x}{x - \frac{\pi}{2}}$

A -1 B $+1$ C 0

Q9

A $\displaystyle\lim_{x \to 3} \frac{x^4 - 81}{x - 3} = 108$

B $\displaystyle\lim_{x \to 3} \frac{x^4 - 81}{x - 3} = 0$

C $\displaystyle\lim_{x \to 3} \frac{x^4 - 81}{x - 3} = 1$

Q10

A $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} (x^2 \ln x) = 1$

B $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} (x^2 \ln x) = -\infty$

C $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} (x^2 \ln x) = 0$

Q11

A $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$

B $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 1$

C $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 2$

Q12

A $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1$

B $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

C $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = +\infty$

Q13

A $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$

B $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$

C $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 + \tan a \tan b}$

Q14

A $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$

B $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$

C $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 - \tan a \tan b}$

Q15 La dérivée première de $\arctan 3x^2$ est :

A $\dfrac{6x}{1+9x^4}$ B $\dfrac{6x}{1+x^4}$ C $\dfrac{6x}{1-9x^4}$

Q16 Pour calculer la dérivée première de la fonction $y = (x^2+2)^2 (1-x^3)^4$, on utilise la dérivation logarithmique et on obtient :

A $y' = 6x(x^2+2)^2(1-x^3)^3(1-4x-3x^3)$

B $y' = 6x(x^2+2)^2(1-x^3)^3(1-4x-3x^2)$

C $y' = x(x^2+2)^2(1-x^3)^3(1-4x-3x^3)$

Q17 Soit $f(x) = \dfrac{2}{1-x}$. Alors $f^{(n)}(x) =$

A $2(n!)(1-x)^{-n}$
B $2(n!)(1-x)^{-(n+1)}$
C $(n!)(1-x)^{-(n+1)}$

Q18 Trouver y' à partir de l'équation $xy + x - 2y - 1 = 0$:

A $y' = \dfrac{1+y}{1-x}$

B $y' = \dfrac{1+y}{2-x}$

C $y' = \dfrac{1+y}{2+x}$

Q19 Évaluation de l'intégrale $I = \displaystyle\int \sin^2 x \, dx$:

A $I = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}\sin 2x + C$, C constante.

B $I = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}\sin 2x + C$, C constante.

C $I = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{4}\sin 2x + C$, C constante.

Q20 Évaluation de l'intégrale $I = \displaystyle\int \frac{dx}{x^2-4}$:

A $I = \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-2}{x+2}\right| + C$, C constante.

B $I = \dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{x+2}{x-2}\right| + C$, C constante.

C $I = \dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{x-2}{x+2}\right| + C$, C constante.

Q21

A $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

B $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n-1)}{2}$

C $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

Q22

A $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

B $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{3}$

C $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+2)}{6}$

Q23

A $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(2n+1)}{2}\right)^2$

B $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^3$

C $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

Q24 L'aire $\mathcal{A}$ de la région délimitée par la courbe $y = x^2$, la droite $y = \dfrac{-x}{2}$ et la droite $x = 3$ est :

A $\mathcal{A} = \dfrac{45}{4}$ B $\mathcal{A} = \dfrac{45}{2}$ C $\mathcal{A} = 45$

Q25 Le nombre d'Euler e correspond à :

A $e = 2{,}71628$
B $e = 2{,}717828$
C $e = 2{,}71828$

ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES DE TANGER · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'entrée en 1re année du cycle préparatoire · ENSA Tanger

Tanger, le 08/08/2011

2011

Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14
B	A	A	A	BC	–	A	A	A	C	A	B	A	A

Q15	Q16	Q17	Q18	Q19	Q20	Q21	Q22	Q23	Q24	Q25
A	–	B	B	A	C	C	A	C	A	C

Q1 ✔ Réponse B

$w = z_1 z_2$ vérifie $|w| = 1$ et $|w + 2| = 1$: w est sur le cercle unité et sur le cercle de centre -2 et de rayon 1, dont le seul point commun est -1.

Q2 ✔ Réponse A

$A = I + N$ avec $N^2 = 0$: $A^n = I + nN = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Q3 ✔ Réponse A

Pour $n = 1$, A donne $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ (B et C non). On vérifie par récurrence que la formule A est stable par multiplication par A (valeurs propres 1 et 2).

Q4 ✔ Réponse A

$|a| = 1$ donne $\overline{a}a = 1$ et $1 - \overline{a}b = \overline{a}(a - b)$, donc le quotient a pour module $\dfrac{1}{|\overline{a}|} = 1$.

Q5 ✔ Réponse BC

$|ab + bc + ca| = |abc| \left|\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right| = |\overline{a} + \overline{b} + \overline{c}|$ car $\dfrac{1}{a} = \overline{a}$.

Comme un nombre et son conjugué ont même module, c'est aussi $|a + b + c|$: B et C sont justes.

Q6 ✔ Réponse –

$\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e$, donc la somme à partir de $k = 1$ vaut $e - 1$. Aucune proposition n'est juste (erreur du sujet).

Q7 ✔ Réponse A

Taux d'accroissement : $\tan'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$ et $(2\cos)'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$. La limite vaut $\dfrac{2}{-\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$.

Q8 ✔ Réponse A

Avec $h = x - \frac{\pi}{2}$: $\operatorname{cotan} x = -\tan h \sim -h$. La limite vaut -1.

Q9 ✔ Réponse A

C'est la dérivée de x^4 en 3 : $4 \times 27 = 108$.

Q10 ✔ Réponse C

Croissances comparées : $x^2 \ln x \to 0$.

Q11 ✔ Réponse A

e^x l'emporte sur x^2 : la limite est 0.

Q12 ✔ Réponse B

$n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \to 1$: la limite est e.

Q13 ✔ Réponse A

Formule d'addition : $\tan(a + b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$.

Q14 ✔ Réponse A

On remplace b par $-b$: $\tan(a - b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$.

Q15 ✔ Réponse A

$(\arctan u)' = \dfrac{u'}{1 + u^2}$ avec $u = 3x^2$: $\dfrac{6x}{1 + 9x^4}$.

Q16 ✔ Réponse –

$\dfrac{y'}{y} = \dfrac{4x}{x^2 + 2} - \dfrac{12x^2}{1 - x^3}$, d'où

$$y' = 4x(x^2 + 2)(1 - x^3)^3 \left(1 - 6x - 4x^3\right).$$

Aucune proposition n'est juste (erreur du sujet).

Q17 ✔ Réponse B

$f(x) = 2(1 - x)^{-1}$, $f'(x) = 2(1 - x)^{-2}$, $f''(x) = 2 \cdot 2(1 - x)^{-3}$… Par récurrence $f^{(n)}(x) = 2\,n!\,(1 - x)^{-(n+1)}$.

Q18 ✔ Réponse B

En dérivant : $y + xy' + 1 - 2y' = 0$, d'où $y'(2 - x) = 1 + y$ et $y' = \dfrac{1 + y}{2 - x}$.

Q19 ✔ Réponse A

$\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$: $I = \dfrac{x}{2} - \dfrac{\sin 2x}{4} + C$.

Q20 ✔ Réponse C

$\dfrac{1}{x^2 - 4} = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{x - 2} - \dfrac{1}{x + 2}\right)$: $I = \dfrac{1}{4} \ln\left|\dfrac{x - 2}{x + 2}\right| + C$.

Q21 ✔ Réponse C

$1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n + 1)}{2}$.

Q22 ✔ Réponse A

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$ (vérifier avec $n = 1$: 1).

Q23 ✔ Réponse C

$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ (vérifier avec $n = 2 : 9$).

Q24 ✔ Réponse A

La courbe et la droite se coupent en 0 ; sur $[0,3]$, $x^2 \geq -\frac{x}{2}$:

$$\mathcal{A} = \int_0^3 \left(x^2 + \frac{x}{2}\right) dx = 9 + \frac{9}{4} = \frac{45}{4}.$$

Q25 ✔ Réponse C

$e \approx 2{,}71828$.

ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES DE TANGER · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'entrée en 1re année du cycle préparatoire · ENSA Tanger

Tanger, le 23/07/2010

2010 — Énoncé

Q1 Soit $S(m)$ la fonction qui associe à chaque réel m strictement positif, la surface délimitée par le graphe $y = \frac{1}{x}$ et les droites $x = m$ et $x = 2m$ alors

A $S(m)$ est strictement croissante
B $S(m)$ est strictement décroissante
C $S(m)$ est une fonction constante

Q2 $\lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{h} \ln\left(1 + \frac{h}{\pi}\right) =$

A $\frac{1}{\pi}$ B 0 C n'existe pas

Q3 $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{3}\right)\left(\sqrt[6]{3}\right)\left(\sqrt[12]{3}\right)\ldots\left(\sqrt[3\cdot 2^n]{3}\right) =$

A $\sqrt[3]{6}$ B 1 C $\sqrt[3]{9}$

Q4 Soit $f(x) = x^{\ln x}$. La tangente à la courbe de f au point $x = e$ est donnée par

A $y = e(x - e)$ B $y = x$ C $y = 2x - e$

Q5 Soit $(x_n)_n$ une suite numérique telle que $x_0 = 1$. Alors : $\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_{i-1} + \frac{1}{2}\right) =$

A $\frac{3n}{2}$ B $\frac{n^2+5n}{4}$ C $\frac{2n-1}{4}$

Q6 Soit $(u_n)_n$ une suite numérique à termes strictement positifs vérifiant $(u_n)^{\frac{1}{n}} \leq M$; $\forall n \in \mathbb{N}$ tel que $M < 1$. On définit la suite $(w_n)_n$ par $w_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$. On considère les assertions suivantes :
(I) $(w_n)_n$ est convergente
(II) $(u_n)_n$ est bornée
(III) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$
Laquelle (lesquelles) des assertions est (sont) VRAIE(S) ?

A Seulement II
B Seulement II et III
C I, II et III.

Q7 Pour quelle valeur de x, la fonction définie par $f(x) = \int_{-2}^{x^2-3x} e^{t^2}\,dt$ prend une valeur minimale

A $\frac{3}{2}$ B -2 C 2

Q8 Soit $f(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t^3+2}}\,dt$. Laquelle parmi ces trois assertions est FAUSSE ?

A $f(0) = 0$
B $f'(1) = \frac{1}{2\sqrt{3}}$
C $f(1) > 0$

Q9 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{\tan x} =$

A N'existe pas B 2 C 0

Q10 $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{x^2-1}\int_1^x e^{u^2}\,du =$

A 0 B $\frac{e}{2}$ C N'existe pas

Q11 Soit f une fonction deux fois dérivable telle que $f''(x) = 2f'(x)$ avec $f'(0) = f(0) = e$. Alors $f(1) =$

A $\frac{e}{2}(e^2+1)$ B $2e$ C $\frac{e^3}{2}$

Q12 $\int_1^2 (\ln x)^2\,dx$

A $\frac{(\ln 2)^3}{3}$ B $2(1-\ln 2)^2$ C $\frac{8}{3}$

Q13 Soient f, g et h trois fonctions telles que : $\begin{cases} h(x) = f(x^3) \\ f'(x) = g(x) \\ g'(x) = f(x^2) \end{cases}$ Alors $h''(x) =$

A $3x^2 g(x^3)$
B $6xg(x^3) + 9x^4 f(x^6)$
C $3x^2 g(x^3) + 6x^3 f(x^5)$

Q14 Soit $(v_n)_{n\geq 3}$ la suite définie par $v_n = \int_1^n \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx$. Alors $\lim\limits_{n\to\infty} v_n =$

A $\frac{1}{4}$ B $\frac{1}{2}$ C $+\infty$

Q15 Soit $H(x) = \int_{\sqrt{x}}^{e^x} \frac{1}{\sqrt{\ln t}}\,dt$, alors $H'(x) =$

A $\frac{1}{\sqrt{\ln x}}$
B $\frac{e^x}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{2x\ln x}}$
C $\frac{e^x}{\sqrt{\ln x}} - \sqrt{\frac{x}{\ln x}}$

Q16 Soit $h(x) = \sqrt{e^x - 1}$. Une primitive de $h(x)$ est donnée par

A $2(x - \arctan x)$
B $\sin\sqrt{h(x)}$
C $2h(x) - 2\arctan h(x)$

Q17 La fonction $f(x) = a\cos x + b\sin x$ admet comme amplitude le nombre

A $\sqrt{a^2+b^2}$ B $a+b$ C $\frac{a+b}{2}$

Q18 Soit $B = \{u, v, w\}$ une base de $(\mathbb{R}^3, +, .)$. On considère les familles suivantes
$A = \{u - v, u + w, v + w\}$;
$B = \{u, v - 2u, v\}$;
$C = \{u + v + w, v + w, w\}$ et
$D = \{v + w, -v, -w\}$.
Alors laquelle (ou lesquelles) des familles forme une base ?

A Seulement B
B Seulement A et C
C Seulement A et D

Q19 Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - 3z = 0\}$. Lequel des systèmes suivants forme une base pour F ?

A $\{(3, 0, 1)\}$
B $\{(3, 0, 1); (0, 1, 0)\}$
C $\{(3, 0, 1); (1, 0, 3); (0, 1, 3)\}$

Q20 On considère les ensembles suivants
$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = 0\}$;
$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 - 2y + z = 1\}$;
$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / xz - y = 0\}$ et
$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + z = 0\}$. Lesquels parmi ces ensembles sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?

A Seulement A et C
B Seulement A et D
C Seulement A, C et D

Q21 Soit $w = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - z = 0 \text{ et } 2x - y = 0\}$

A $\dim w = 1$
B $\dim w = 2$
C $\dim w = 3$

Q22 Soit A une matrice carrée d'ordre n vérifiant $A^3 - A = -I_n$. Soit $B = (I_n - A)(I_n + A)$. On considère les égalités suivantes
(I) $B^{-1} = A$
(II) $B^{-1} = (I_n - A)^{-1}(I_n + A)^{-1}$
(III) $B^{-1} = (I_n + A)^{-1}(I_n - A)^{-1}$
Parmi lesquelles ou laquelle de ces égalités est VRAIE ?

A (I) et (III)
B Seulement (II)
C Seulement (III)

Q23 Soient A, B deux matrices carrées d'ordre n, telles que $I_n - AB$ est inversible. Alors $(I_n - BA)^{-1} =$

A $(I_n - AB)^{-1}$
B $B(I_n - AB)^{-1}A$
C $I_n + B(I_n - AB)^{-1}A$

Q24 Soit g une fonction décroissante sur $]0, +\infty[$ et $G(x) = \int_0^x tg'(t)\,dt$ définie sur $]0, +\infty[$. Laquelle parmi ces trois assertions est FAUSSE ?

A $G(x) \leq 0$ pour tout $x > 0$
B G est croissante sur $]0, +\infty[$
C $G(x) = xg(x) - \int_0^x g(t)\,dt$

Q25 $\int \frac{1}{\cos x}\,dx = (K \text{ une constante})$

A $\ln(|\cos x|) + K$
B $\ln\left(\left|\tan x + \frac{1}{\cos x}\right|\right) + K$
C $\ln\left|\frac{1}{\sin x}\right| + K$

ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES DE TANGER · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'entrée en 1re année du cycle préparatoire · ENSA Tanger

Tanger, le 23/07/2010

2010 — Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14
C	A	C	C	–	C	A	B	B	B	A	B	B	A

Q15	Q16	Q17	Q18	Q19	Q20	Q21	Q22	Q23	Q24	Q25
B	C	A	–	B	B	A	–	C	B	B

Q1 ✔ Réponse C

$S(m) = \int_m^{2m} \frac{dx}{x} = \ln(2m) - \ln m = \ln 2$: constante.

Q2 ✔ Réponse A

$\ln\left(1+\frac{h}{\pi}\right) \sim \frac{h}{\pi}$: la limite vaut $\frac{1}{\pi}$.

Q3 ✔ Réponse C

Le produit vaut $3^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\cdots}$ et la somme géométrique tend vers $\frac{1/3}{1-1/2} = \frac{2}{3}$: limite $3^{2/3} = \sqrt[3]{9}$.

Q4 ✔ Réponse C

$f(x) = e^{(\ln x)^2}$, $f(e) = e$ et $f'(x) = \frac{2\ln x}{x} f(x)$, $f'(e) = 2$.
Tangente : $y = 2(x-e)+e = 2x-e$.

Q5 ✔ Réponse –

La somme dépend des termes $x_1, \ldots, x_{n-1}$, que l'énoncé ne donne pas : elle ne peut pas être calculée (erreur du sujet). B correspond au cas où (x_n) est arithmétique de raison $\frac{1}{2}$ ($x_n = 1 + \frac{n}{2}$).

Q6 ✔ Réponse C

$0 < u_n \leq M^n$ avec $0 \leq M < 1$: (u_n) est bornée et tend vers 0, et (w_n) est croissante majorée par $\frac{1}{1-M}$, donc convergente.

Q7 ✔ Réponse A

$f'(x) = (2x-3)e^{(x^2-3x)^2}$ change de signe de $-$ à $+$ en $x = \frac{3}{2}$: minimum.

Q8 ✔ Réponse B

$f'(1) = \frac{1}{\sqrt{1+2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \neq \frac{1}{2\sqrt{3}}$. ($f(0) = 0$ et $f(1) > 0$ sont vraies.)

Q9 ✔ Réponse B

$e^{2x} - 1 \sim 2x$ et $\tan x \sim x$: la limite vaut 2.

Q10 ✔ Réponse B

$\int_1^x e^{u^2} du \sim e(x-1)$ et $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$: la limite vaut $\frac{e}{2}$.

Q11 ✔ Réponse A

$f' = ee^{2x}$, donc $f = \frac{e}{2}e^{2x} + c$ et $f(0) = e$ donne $c = \frac{e}{2}$.
$f(1) = \frac{e}{2}\left(e^2+1\right)$.

Q12 ✔ Réponse B

Une primitive est $x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x$:

$$\int_1^2 (\ln x)^2 dx = 2(\ln 2)^2 - 4\ln 2 + 2 = 2(1-\ln 2)^2.$$

Q13 ✔ Réponse B

$h'(x) = 3x^2 g\left(x^3\right)$, puis $h''(x) = 6xg\left(x^3\right) + 3x^2 \cdot 3x^2 f\left(x^6\right)$.

Q14 ✔ Réponse A

$v_n = \left[-\frac{1}{2(1+x^2)}\right]_1^n = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(1+n^2)} \to \frac{1}{4}$.

Q15 ✔ Réponse B

$H'(x) = \frac{e^x}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\ln x}} = \frac{e^x}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{2x\ln x}}$.

Q16 ✔ Réponse C

$(2h - 2\arctan h)' = 2h'\left(1 - \frac{1}{1+h^2}\right) = \frac{2h'h^2}{e^x}$ avec $h' = \frac{e^x}{2h}$: on obtient h.

Q17 ✔ Réponse A

$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\varphi)$: amplitude $\sqrt{a^2+b^2}$.

Q18 ✔ Réponse –

A : $(u+w)-(v+w) = u-v$, famille liée. B et D sont liées. Seule C (triangulaire) est une base. Aucune proposition n'est juste (erreur du sujet).

Q19 ✔ Réponse B

F : $x = 3z$, de dimension 2 ; $(3,0,1)$ et $(0,1,0)$ sont dans F et libres.

Q20 ✔ Réponse B

A et D sont définis par des équations linéaires homogènes. B ne contient pas 0 et C ($y = xz$) n'est pas stable par somme.

Q21 ✔ Réponse A

Deux équations indépendantes dans $\mathbb{R}^3$: $\dim w = 1$ (droite dirigée par $(1,2,3)$).

Q22 ✔ Réponse –

$B = I_n - A^2$ et $A(I_n - A^2) = -I_n$, d'où $B^{-1} = -A$: (I) est fausse. $I_n - A$ et $I_n + A$ commutent, donc (II) et (III) sont vraies toutes les deux. Aucune proposition n'est exacte.

Q23 ✔ Réponse C

$(I_n - BA)\left(I_n + B(I_n - AB)^{-1}A\right) =$
$I_n - BA + B(I_n - AB)(I_n - AB)^{-1}A = I_n.$

Q24 ✔ Réponse B

$g' \leq 0$ donne $G'(x) = xg'(x) \leq 0$: G est décroissante, B est fausse. A ($tg' \leq 0$) et C (intégration par parties) sont vraies.

Q25 ✔ Réponse B

$$\left(\ln\left|\tan x + \frac{1}{\cos x}\right|\right)' = \frac{\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\sin x}{\cos^2 x}}{\frac{\sin x + 1}{\cos x}} = \frac{1}{\cos x}.$$

ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES DE TANGER · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'entrée en 1re année du cycle préparatoire · ENSA Tanger

Session du 24 juillet 2009

2009 — Énoncé

Q1 Soit L une liste d'entiers relatifs **consécutifs** dont le premier terme est -22 et le dernier terme est noté par x. $L = \{-22, \ldots, x\}$. Si la somme de tous les éléments de L est égale à 72 alors $x =$

A -72 B 25 C 22

Q2 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n e^n}{\pi^{n+1}} =$

A $\dfrac{1}{\pi}$ B 0 C n'existe pas

Q3 Soit $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{2^k}{e^{k+1}}$; alors $\lim\limits_{n\to\infty} x_n =$

A $+\infty$ B $\dfrac{1}{e-2}$ C $\dfrac{2}{e(e-2)}$

Q4 On considère un carré C_0 dont les côtés mesurent a cm. Soit C_1 le carré inscrit dans C_0 dont les sommets sont les milieux des côtés de C_0. Nous procédons de la même manière et nous formons une famille infinie de carrés (C_i) tel que C_{i+1} est le carré inscrit dans C_i dont les sommets sont les milieux des côtés de C_i. **La somme totale des périmètres des carrés C_i est égale à**

A $4a\left(2+\sqrt{2}\right)$ B $4a\left(1+\sqrt{2}\right)$ C $4a$

Q5 Soit $w_n = \sum\limits_{p=2}^{n} \dfrac{1}{p^2-1}$; alors $\lim\limits_{n\to\infty} w_n =$

A $\dfrac{3}{2}$ B $\dfrac{3}{4}$ C $+\infty$

Q6 Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite numérique à termes strictement positifs ($u_n > 0$) vérifiant $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq k$, $\forall n \in \mathbb{N}$ avec k une constante strictement inférieure à 1 ($k < 1$). On définit la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ par $v_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$. On considère les assertions suivantes :
(I) $(u_n)_n$ est bornée
(II) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$
(III) $(v_n)_{n\geq 0}$ est convergente
Laquelle (lesquelles) des assertions est (sont) vraie(s) ?

A Seulement I
B Seulement I et II
C I, II et III

Q7 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{(9+\tan^2 x)\cos^2 x}\,dx$

A $\dfrac{\pi}{9}$ B $\dfrac{\pi}{18}$ C $\dfrac{1}{3}\arctan\dfrac{1}{3}$

Q8 $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\arctan \pi x}{x} =$

A π B 1 C 0

Q9 $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin^2 3x}{3x^2} =$

A 1 B $\dfrac{1}{3}$ C 3

Q10 $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{h} \displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}+h} \frac{1}{\tan x}\,dx =$

A $\dfrac{\pi\sqrt{2}}{2}$ B $\sqrt{2}$ C 0

Q11 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{\pi}x}{1-\cos \pi x} =$

A $\sqrt{\pi}$ B $\dfrac{\sqrt{\pi}}{\pi}$ C 0

Q12 $\displaystyle\int_{-2}^{0} \frac{dx}{x^2+6x+12}$

A $\dfrac{\pi}{6}$ B $\dfrac{\pi\sqrt{3}}{18}$ C $\dfrac{1}{6}$

Q13 La surface formée par la courbe de $f(x) = \dfrac{1}{x(1+\ln x)}$ et par les droites $x = 1$ et $x = e^2$ est égale à

A $\ln 3$ B $\ln\left(e^2+1\right) - \ln 2$ C $e^2 - 1$

Q14 Soit $(u_n)_{n\geq 3}$ la suite définie par $u_n = \displaystyle\int_e^n \frac{1}{x(\ln x)^3}\,dx$. Alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n =$

A $+\infty$ B $\dfrac{1}{2}$ C $\dfrac{1}{2e^2}$

Q15 Soit $g(x) = \displaystyle\int_{\sqrt{x}}^{x^2} e^{u^2}\,du$, alors la tangente à la courbe de g en $x = 1$ admet pour équation

A $y = \dfrac{3e}{2}(x-1)$
B $y = ex - (e+1)$
C Les données sont insuffisantes pour la déterminer

Q16 $\displaystyle\int \frac{\tan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = (K \text{ une constante})$

A $\ln\left(\dfrac{1}{\cos^2 x}\right) + K$
B $-\ln\left(\cos\sqrt{x}\right) + K$
C $\ln\left(\dfrac{1}{\cos^2\sqrt{x}}\right) + K$

Q17 $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n}{3n-1}\right)^{2n-1} =$

A 0 B $\dfrac{1}{3}$ C $+\infty$

Q18 Soit $B = \{i, j, k\}$ une base de $(\mathbb{R}^3, +, .)$. On considère les familles suivantes
$E = \{i+j, i+k, j+k\}$;
$N = \{i, j+k, i+j+k\}$;
$S = \{i, 2j, 3k\}$ et $A = \{i, 2j-k, j\}$.
Alors laquelle (ou lesquelles) des familles forme une base ?

A Aucune
B Seulement S
C Seulement E, S et A

Q19 Soit $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + 2y - z = 0\}$. Lequel des systèmes suivants forme une base pour S ?

A $\{(1,0,1); (0,1,2)\}$
B $\{(0,1,2); (1,0,2); (1,2,0)\}$
C $\{(0,1,2)\}$

Q20 On considère les ensembles suivants
$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / y = 0\}$;
$N = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 1\}$;
$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = 2\}$ et
$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\}$. Lesquels parmi ces ensembles sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?

A Seulement E et A
B Seulement N et S
C Tous (E, N, S et A)

Q21 Soit A une matrice carrée d'ordre n vérifiant $A^2 = A + 3I_n$ (I_n est la matrice identité). On considère les égalités suivantes
(I) $\det A = 0$ (II) $A^{-1} = 3I_n - A$
(III) $\det A \neq 0$ (IV) $A^{-1} = \dfrac{1}{3}(A - I_n)$
Alors

A (II) et (III) sont vraies
B (III) et (IV) sont vraies
C (I) et (IV) sont vraies

Q22 Soit A une matrice carrée d'ordre n vérifiant $A^2 - A - I_n = 0_n$ (I_n est la matrice identité et 0_n est la matrice nulle). Alors $\det(A - I_n) =$

A $\det(A) - 1$ B $\sqrt{\det(A)}$ C $\dfrac{1}{\det(A)}$

Q23 Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice carrée d'ordre n. On appelle la trace de A notée par $\mathrm{Tr}(A)$ le nombre $\mathrm{Tr}(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}$.
Alors $\mathrm{Tr}(A + I_n) =$

A $\mathrm{Tr}(A) + n$ B $n\,\mathrm{Tr}(A)$ C $\mathrm{Tr}(A) + 1$

Q24 Si $\displaystyle\int_0^x h(t)\,dt = x\ln\left(1+x^2\right)$ alors $h(1) =$

A $\ln 2$
B $1 + \ln 2$
C Les données sont insuffisantes

Q25 $\displaystyle\int \sin(\ln x)\,dx = (K \text{ une constante})$

A $\dfrac{e^x}{2}[\sin x - \cos x] + K$
B $\dfrac{x}{2}[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] + K$
C $\dfrac{\cos(\ln x)}{x} + K$

ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES DE TANGER · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'entrée en 1re année du cycle préparatoire · ENSA Tanger

Session du 24 juillet 2009

2009 — Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14
B	B	C	A	B	C	B	A	C	–	–	B	A	B

Q15	Q16	Q17	Q18	Q19	Q20	Q21	Q22	Q23	Q24	Q25
A	C	A	C	A	A	B	C	A	B	B

Q1 ✔ Réponse B

Les termes de -22 à 22 ont une somme nulle ; il reste $23+24+25=72$: $x=25$.

Q2 ✔ Réponse B

$\left|\dfrac{(-1)^n e^n}{\pi^{n+1}}\right| = \dfrac{1}{\pi}\left(\dfrac{e}{\pi}\right)^n \to 0$ car $e<\pi$.

Q3 ✔ Réponse C

$$x_n = \frac{1}{e}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{e}\right)^k \to \frac{1}{e}\cdot\frac{2/e}{1-2/e} = \frac{2}{e(e-2)}.$$

Q4 ✔ Réponse A

Le côté est multiplié par $\frac{1}{\sqrt{2}}$ à chaque étape :

$$\sum_{i\geq 0} 4a\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^i = \frac{4a\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = 4a\left(2+\sqrt{2}\right).$$

Q5 ✔ Réponse B

$\dfrac{1}{p^2-1} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p-1}-\dfrac{1}{p+1}\right)$: somme télescopique de limite $\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{4}$.

Q6 ✔ Réponse C

$0<u_n\leq u_0 k^n$: (u_n) est bornée et tend vers 0, et (v_n) est croissante majorée par $\dfrac{u_0}{1-k}$, donc convergente.

Q7 ✔ Réponse B

Avec $t=\tan x$: $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dt}{9+t^2} = \frac{1}{3}\arctan\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{18}$.

Q8 ✔ Réponse A

$\arctan \pi x \sim \pi x$: la limite vaut π.

Q9 ✔ Réponse C

$\sin^2 3x \sim 9x^2$: la limite vaut $\dfrac{9}{3}=3$.

Q10 ✔ Réponse –

C'est la valeur de l'intégrande en $\frac{\pi}{4}$: $\dfrac{1}{\tan\frac{\pi}{4}}=1$. Aucune proposition n'est juste (erreur du sujet).

Q11 ✔ Réponse –

Le numérateur est d'ordre x et le dénominateur $\sim \dfrac{\pi^2 x^2}{2}$: le quotient tend vers $\pm\infty$ (pas de limite finie). Aucune proposition n'est juste (erreur du sujet).

Q12 ✔ Réponse B

$x^2+6x+12=(x+3)^2+3$:

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\arctan\frac{x+3}{\sqrt{3}}\right]_{-2}^{0} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi\sqrt{3}}{18}.$$

Q13 ✔ Réponse A

$$\int_1^{e^2}\frac{dx}{x(1+\ln x)} = \left[\ln(1+\ln x)\right]_1^{e^2} = \ln 3.$$

Q14 ✔ Réponse B

$$u_n = \left[-\frac{1}{2(\ln x)^2}\right]_e^n = \frac{1}{2}-\frac{1}{2(\ln n)^2}\to\frac{1}{2}.$$

Q15 ✔ Réponse A

$g(1)=0$ et $g'(x)=2xe^{x^4}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}e^x$, $g'(1)=2e-\dfrac{e}{2}=\dfrac{3e}{2}$.

Q16 ✔ Réponse C

Avec $u=\sqrt{x}$: $\displaystyle\int 2\tan u\,du = -2\ln(\cos u) = \ln\frac{1}{\cos^2\sqrt{x}}$.

Q17 ✔ Réponse A

$\dfrac{n}{3n-1}\to\dfrac{1}{3}<1$ et l'exposant tend vers $+\infty$: la limite est 0.

Q18 ✔ Réponse C

E : déterminant $-2\neq 0$; S : diagonale ; A : déterminant $1\neq 0$. N est liée ($i+j+k=i+(j+k)$).

Q19 ✔ Réponse A

S est un plan (dimension 2) ; $(1,0,1)$ et $(0,1,2)$ vérifient $x+2y-z=0$ et sont libres. (L'énoncé écrit E pour S.)

Q20 ✔ Réponse A

E et A sont définis par des équations linéaires homogènes ; N et S ne contiennent pas 0.

Q21 ✔ Réponse B

$A(A-I_n)=3I_n$: A est inversible et $A^{-1}=\dfrac{1}{3}(A-I_n)$.

Q22 ✔ Réponse C

$A(A - I_n) = I_n$, donc $\det A \det(A - I_n) = 1$.

Q23 ✔ Réponse A

On ajoute 1 à chacun des n termes diagonaux : $\mathrm{Tr}(A) + n$.

Q24 ✔ Réponse B

$h(x) = \ln(1 + x^2) + \dfrac{2x^2}{1 + x^2}$, donc $h(1) = \ln 2 + 1$.

Q25 ✔ Réponse B

$\left(\dfrac{x}{2}(\sin \ln x - \cos \ln x)\right)' =$
$\dfrac{1}{2}(\sin \ln x - \cos \ln x) + \dfrac{1}{2}(\cos \ln x + \sin \ln x) = \sin \ln x.$

ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES DE KHOURIBGA · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'entrée en 1re année · ENSA Khouribga

Année 2011–2012

2011 Énoncé

Q1 Pour tout vecteur $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ on pose

$$< x, y >= \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \quad \text{et} \quad \|x\| = \sqrt{< x, x >} = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

et on a

- **A** $| < x, y > | \geq \|x\| \, \|y\|$
- **B** $(1 + \|x\|) \leq \sqrt{2}\sqrt{1 + \|x\|^2}$
- **C** $< x, y >= \|x\| \, \|y\|$
- **D** $(1 + \|x\|) \leq \dfrac{1}{\sqrt{2}} (1 + \|x\|^2)$

Q2 L'ensemble S des solutions de l'équation en « x »

- **A** $6x^3 + 5x^2 - 2x - 1 = 0$ est $S = \left\{\dfrac{-1}{3}, \dfrac{1}{2}, 1\right\}$
- **B** $6\cos^3 x + 5\cos^2 x - 2\cos x - 1 = 0$ est $S = \left\{0, \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{3}\right\}$
- **C** $6\ln^3 x + 5\ln^2 x - 2\ln x - 1 = 0$ est $S = \left\{\dfrac{1}{\sqrt[3]{e}}, \dfrac{1}{e}, \sqrt{e}\right\}$
- **D** $6e^{3x} + 5e^{2x} - 2e^x - 1 = 0$ est $S = \{-\ln 3, -\ln 2, 0\}$

Q3 On considère la suite récurrente de nombres réels $(u_n)_n$ donnée par $\begin{cases} u_0 = a \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = qu_n + r \end{cases}$ avec $q \neq 1$ et $r \neq 0$. Alors la suite $(v_n)_n$ définie par $v_n = u_n - \dfrac{r}{1-q}$ est

- **A** Géométrique de raison (rq)
- **B** Géométrique de raison q
- **C** Arithmétique de raison r
- **D** Arithmétique de raison $(r - q)$

Q4 On a $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{x^3} =$

A $\dfrac{-1}{2}$ **B** $\dfrac{1}{2}$ **C** -1 **D** 1

Q5 La solution générale de l'équation différentielle homogène du second ordre

- **A** $y'' + 6y' + 9y = 0$ est $y = (ax + b)e^{-3x}$
- **B** $y'' - 4y' + 4y = 0$ est $y = (a\cos 2x + b\sin 2x)e^{2x}$
- **C** $y'' + 2y' + 3y = 0$ est $y = \left(a\cos\sqrt{2}x + b\sin\sqrt{2}x\right)$
- **D** $y'' + 5y' + 6y = 0$ est $y = (a\cos 3x - b\sin 3x)e^{-2x}$

Q6 On a

- **A** $\lim\limits_{t \to 0} (|t| \ln |t|) = -\infty$
- **B** $\lim\limits_{t \to \infty} \left(\dfrac{\ln t}{t}\right) = +\infty$
- **C** $\lim\limits_{t \to \infty} \left(\dfrac{e^t}{t}\right) = 0$
- **D** $\lim\limits_{t \to +\infty} \left(t^3 e^{-t}\right) = 0$

Q7 On considère les intégrales $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^2 x \, dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \, dx$. Alors on a

- **A** $I + J = 1$
- **B** $I - J = 1$
- **C** $I = J$
- **D** $I = -J$

Q8 La suite de nombre réels $(u_n)_n$ donnée par

- **A** $u_n = (-1)^n \left(\dfrac{5^n}{3^n}\right)$ est majorée
- **B** $u_n = (-1)^n \ln\left(1 + n^2\right)$ est convergente
- **C** $u_n = (-1)^n \ln\left(1 + n^2\right)$ est bornée
- **D** $u_n = \left(n^2 - n\cos n\right)$ est divergente.

Q9 Toute suite de nombres réels

- **A** Convergente est bornée
- **B** Croissante est majorée
- **C** Décroissante est minorée
- **D** Bornée est convergente

Q10 Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$, un point M est sur le cercle de diamètre $[AB]$ si, et seulement, si

- **A** Le triangle AMB est isocèle
- **B** Le triangle AMB est équilatéral
- **C** Le triangle AMB est droit
- **D** Le triangle AMB est quelconque

Q11 Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$, on considère les points M_1 et M_2 d'affixe respectifs z_1 et z_2 dans $\mathbb{C}$ solutions de l'équation en « z » : $3z^2 + z + 5 = 0$. Et soit I le milieu du segment $[M_1, M_2]$. Alors on a

- **A** Le triangle OM_1M_2 est équilatéral
- **B** $(z_1 + z_2)$ est imaginaire pur
- **C** L'affixe de I est imaginaire pur
- **D** Le triangle OM_1M_2 est isocèle

Q12 On a $\lim\limits_{t \to 0} \left(\dfrac{t \sin t}{1 - \cos t}\right) =$

A $\dfrac{-1}{2}$ **B** -2 **C** $\dfrac{1}{2}$ **D** 2

Q13 Dans un espace vectoriel de dimension n :

- **A** Une partie libre de moins de n éléments est génératrice
- **B** Une partie génératrice de plus de n éléments est libre
- **C** Une partie libre de n éléments est une base
- **D** Une partie génératrice de n éléments n'est pas une base

Q14 Pour tout $a < b$ dans $\mathbb{R}$ et toute fonction f continue sur $]a; b[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$,

- **A** La fonction f est bornée sur $]a; b[$
- **B** $\forall x, y \in]a; b[, \exists z \in]a; b[$ / $f(x) + 2f(y) = 3f(z)$
- **C** $\forall x, y \in]a; b[$ si $f(x) = f(y)$ alors $\exists z \in]a; b[$ / $f(z) = 0$
- **D** $\forall x, y \in]a; b[, \exists z \in]a; b[$ / $f(x) - f(y) = (x - y)f(z)$

Q15 Une fonction strictement monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est

- **A** Bijective
- **B** Inversible
- **C** Injective
- **D** Surjective

Q16 Dans une urne à 52 jetons numérotés de 1 à 13 et de quatre couleurs différentes : noire, blanche, rouge et verte. On tire un jeton rouge. La probabilité pour qu'il porte le numéro est de

- **A** $P = \dfrac{1}{52}$
- **B** $P = \dfrac{4}{52}$
- **C** $P = \dfrac{1}{13}$
- **D** $P = \dfrac{4}{13}$

Q17 Pour tout réel $a > 0$, la fonction f donnée par $f(x) = \ln\left|\dfrac{x - a}{x + a}\right|$ est

- **A** Paire sur son domaine
- **B** Impaire sur son domaine
- **C** Croissante sur son domaine
- **D** Décroissante sur son domaine

Q18 On considère la fonction $f(t) = \arctan(t) + \arctan\left(\dfrac{1}{t}\right)$; $t \neq 0$. Alors on a

- **A** La fonction f ne prend que deux valeurs distinctes sur son domaine
- **B** La fonction f est constante sur son domaine
- **C** La fonction f prend plus de deux valeurs distinctes sur son domaine
- **D** La fonction f est non bornée sur son domaine

Q19 La dérivée $f'(t)$ de la fonction $f(t) = \dfrac{2\arctan\left(\sqrt{t}\right)}{1 + \sqrt{t}}$; $t > 0$ est

- **A** $f'(t) = \dfrac{1}{(1 + \sqrt{t})}\left(\dfrac{1}{1 + t} - \dfrac{\arctan\left(\sqrt{t}\right)}{1 + \sqrt{t}}\right)$
- **B** $f'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}\,(1 + \sqrt{t})}\left(\dfrac{1}{1 + t} + \dfrac{\arctan\left(\sqrt{t}\right)}{1 + \sqrt{t}}\right)$
- **C** $f'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}\,(1 + \sqrt{t})^2}\left(\dfrac{1}{1 + t} - \dfrac{\arctan\left(\sqrt{t}\right)}{1 + \sqrt{t}}\right)$
- **D** $f'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}\,(1 + \sqrt{t})}\left(\dfrac{1}{1 + t} - \dfrac{\arctan\left(\sqrt{t}\right)}{1 + \sqrt{t}}\right)$

ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES DE KHOURIBGA · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'entrée en 1re année · ENSA Khouribga

Année 2011–2012

2011 — Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14
B	C	B	B	A	D	A	D	A	C	D	D	C	B

Q15	Q16	Q17	Q18	Q19
C	C	B	A	D

Q1 ✔ Réponse B

Inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^2$: $1\cdot 1+1\cdot\|x\|\le\sqrt{1+1}\sqrt{1+\|x\|^2}$. (A et C sont fausses en général ; D est fausse pour $x=0$.)

Q2 ✔ Réponse C

$6X^3+5X^2-2X-1=(X+1)(3X+1)(2X-1)$: racines -1, $-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$. Avec $X=\ln x$: $x\in\left\{\frac{1}{e},\frac{1}{\sqrt[3]{e}},\sqrt{e}\right\}$. (A ne contient pas -1 ; B : $\cos 0=1$ n'est pas racine ; D : seul $e^x=\frac{1}{2}$ convient.)

Q3 ✔ Réponse B

$$v_{n+1}=qu_n+r-\frac{r}{1-q}=qu_n-\frac{qr}{1-q}=q\,v_n.$$

Q4 ✔ Réponse B

$\tan x-\sin x=\tan x\,(1-\cos x)\sim x\cdot\dfrac{x^2}{2}$: la limite vaut $\dfrac{1}{2}$.

Q5 ✔ Réponse A

$r^2+6r+9=(r+3)^2$: racine double -3, d'où $y=(ax+b)e^{-3x}$. (B : racine double 2 ; C : $r=-1\pm i\sqrt{2}$, il manque e^{-x} ; D : racines réelles -2, -3.)

Q6 ✔ Réponse D

Croissances comparées : $t^3e^{-t}\to 0$. ($|t|\ln|t|\to 0$, $\frac{\ln t}{t}\to 0$, $\frac{e^t}{t}\to+\infty$.)

Q7 ✔ Réponse A

$$I=\left[\frac{\sin^3 x}{3}\right]_0^{\pi/2}=\frac{1}{3}\text{ et }I+J=\int_0^{\pi/2}\cos x\,dx=1.$$

Q8 ✔ Réponse D

$n^2-n\cos n\ge n^2-n\to+\infty$. (Les suites de A, B, C ne sont pas bornées.)

Q9 ✔ Réponse A

Toute suite convergente est bornée. Les réciproques B, C, D sont fausses ($u_n=n$, $u_n=-n$, $u_n=(-1)^n$).

Q10 ✔ Réponse C

M (distinct de A et B) est sur le cercle de diamètre $[AB]$ si et seulement si $\widehat{AMB}$ est droit : le triangle est rectangle en M.

Q11 ✔ Réponse D

Les racines sont conjuguées : $|z_1|=|z_2|$, donc $OM_1=OM_2$. $z_1+z_2=-\frac{1}{3}$ est réel et $z_I=-\frac{1}{6}$. $|z_1|=\sqrt{\frac{5}{3}}$ mais $|z_1-z_2|=\frac{\sqrt{59}}{3}$: pas équilatéral.

Q12 ✔ Réponse D

$t\sin t\sim t^2$ et $1-\cos t\sim\dfrac{t^2}{2}$: la limite vaut 2.

Q13 ✔ Réponse C

En dimension n, une famille libre de n vecteurs est une base.

Q14 ✔ Réponse B

$\dfrac{f(x)+2f(y)}{3}$ est compris entre $f(x)$ et $f(y)$; par le théorème des valeurs intermédiaires, il est atteint en un z entre x et y. (A : $f(x)=\frac{1}{x}$ sur $]0,1[$; D demande la dérivabilité.)

Q15 ✔ Réponse C

Strictement monotone $\Rightarrow$ injective. Elle n'est bijective que sur son image.

Q16 ✔ Réponse C

Il y a 13 jetons rouges équiprobables : un numéro donné a la probabilité $\dfrac{1}{13}$. (L'énoncé omet le numéro.)

Q17 ✔ Réponse B

$$f(-x)=\ln\left|\frac{-x-a}{-x+a}\right|=\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right|=-f(x)\text{ : }f\text{ est impaire.}$$

Q18 ✔ Réponse A

f est de dérivée nulle sur chaque intervalle : $f(t)=\dfrac{\pi}{2}$ pour $t>0$ et $-\dfrac{\pi}{2}$ pour $t<0$.

Q19 ✔ Réponse D

Avec $(\arctan\sqrt{t})'=\dfrac{1}{2\sqrt{t}(1+t)}$:

$$f'(t)=\frac{\frac{1+\sqrt{t}}{\sqrt{t}(1+t)}-\frac{\arctan\sqrt{t}}{\sqrt{t}}}{(1+\sqrt{t})^2}=\frac{1}{\sqrt{t}(1+\sqrt{t})}\left(\frac{1}{1+t}-\frac{\arctan\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}\right).$$

ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES DE KHOURIBGA · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'entrée en 1re année · ENSA Khouribga

Année 2010–2011

2010 Énoncé

Q1 Soient a et b deux nombres réels donnés. On a

A $(a-b)^2 \leq 2\left(a^2-b^2\right)$
B $(a+b)^2 \leq 2\left(a^2+b^2\right)$
C $|a-b| \leq |a|-|b|$
D $|a+b| \leq a+b$

Q2 La partie $\mathcal{E}$ ci-après est un espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$:

A $\mathcal{E}=\{(s,t,x,y)\in\mathbb{R}^4/\ 7s+t-x-2y=1\}$
B $\mathcal{E}=\{(s,t,x,y)\in\mathbb{R}^4/\ s=-5\}$
C $\mathcal{E}=\{(s,t,x,y)\in\mathbb{R}^4/\ -3s-2t+x-y=0\}$
D $\mathcal{E}=\{(s,t,x,y)\in\mathbb{R}^4/\ -5s-3t=8\}$

Q3 Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$; soit M le point d'affixe $z=x+iy\in\mathbb{C}$. Le point N d'affixe $\overline{z}\in\mathbb{C}$ est :

A sur le cercle centré à l'origine et passant par le point M
B le symétrique du point M par rapport à l'axe oy
C le symétrique du point M par rapport à l'origine
D sur la droite passant par l'origine et le point M.

Q4 Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$; soit M le point d'affixe $z=x+iy\in\mathbb{C}$. Le point N d'affixe $(2iz)\in\mathbb{C}$ est :

A sur le cercle centré en M et de rayon $|z|$
B sur la droite passant par l'origine et le point M
C sur le cercle centré à l'origine et passant par le point M
D sur la droite passant par l'origine et orthogonale à OM

Q5 L'équation en $z\in\mathbb{C}$, le corps des nombres complexes $z^5+z^3-z^2+1=0$ admet pour ensemble de solutions

A $S=\left\{1,i,-i,\frac{-1+i\sqrt{3}}{2},\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right\}$
B $S=\left\{1,i,-i,\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right\}$
C $S=\left\{i,-i,\frac{-1+i\sqrt{3}}{2},\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right\}$
D $S=\left\{1,i,\frac{-1+i\sqrt{3}}{2},\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right\}$

Q6 Toute suite de nombres réels

A majorée est convergente
B minorée est convergente
C croissante majorée est convergente
D croissante minorée est convergente

Q7 On a

A $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\sin t}{t^2}=1$
B $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\sin t^2}{t}=1$
C $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\sin^2 t}{t}=1$
D $\lim\limits_{t\to0}\left(\dfrac{\sin(-t)}{t}\right)^2=1$

Q8 Pour tout $0<a<1$; le domaine de la fonction $f(x)=\ln\left(\sqrt[3]{\dfrac{x-a}{a^3-x}}\right)$ est

A $D_f=[a^3,a[$ B $D_f=]a^3,a[$
C $D_f=]a^3,a]$ D $D_f=[a^3,a]$

Q9 On a $\lim\limits_{|x|\to1}\dfrac{1-2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}x\right)}{1-x^2}=$

A $+\infty$ B $\dfrac{-\pi}{4}$ C $-\infty$ D $\dfrac{\pi}{4}$

Q10 On a $\lim\limits_{|x|\to\infty}\dfrac{x^2+\cos^2 x}{x^2+\sin^2 x}=$

A $-\pi$ B π C -1 D 1

Q11 La fonction f définie par

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-2}\ln\left(\dfrac{1+x^2}{5}\right) & \text{si } x\neq2\\ \ell & \text{si } x=2\end{cases}$$

est continue si

A $\ell=\dfrac{5}{4}$ B $\ell=\dfrac{-5}{4}$
C $\ell=\dfrac{4}{5}$ D $\ell=\dfrac{-4}{5}$

Q12 Toute fonction f continue sur $\mathbb{R}$ et vérifiant $\lim\limits_{|x|\to\infty}f(x)=\ell\in\mathbb{R}$ est nécessairement

A bornée
B majorée et non minorée
C non bornée
D minorée et non majorée

Q13 La dérivée $f'(t)$ de la fonction $f(t)=\dfrac{2\ln\left(1+\sqrt{t}\right)}{1+\sqrt{t}}$ est

A $f'(t)=\dfrac{1-\ln\left(1+\sqrt{t}\right)}{\sqrt{t}(1+t)}$
B $f'(t)=\dfrac{1-\ln\left(1+\sqrt{t}\right)}{2\left(1+\sqrt{t}\right)^2}$
C $f'(t)=\dfrac{1-\ln\left(1+\sqrt{t}\right)}{\sqrt{t}\left(1+\sqrt{t}\right)^2}$
D $f'(t)=\dfrac{1-\ln\left(1+\sqrt{t}\right)}{2(1+t)^2}$

Q14 La primitive $F(x)=\displaystyle\int\frac{x\,dx}{(1+x^2)\sqrt{\ln(1+x^2)}}$

A $F(x)=\sqrt{\ln\left(1+x^2\right)}+c$
B $F(x)=2x\sqrt{\ln\left(1+x^2\right)}+c$
C $F(x)=\sqrt{\ln|1+x|}+c$
D $F(x)=\sqrt{\ln(1+|x|)}+c$

Q15 Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$; pour tout $a>0$, l'aire géométrique $\mathcal{A}$ de la région délimitée par les quatre droites d'équations $x=-a$; $x=a$; $y=3ax$; et $y=5ax$ est

A $\mathcal{A}=2\sqrt{a}$ B $\mathcal{A}=2a$
C $\mathcal{A}=2a^2$ D $\mathcal{A}=2a^3$

Q16 La solution générale de l'équation différentielle homogène du second ordre

A $y''-2y'+2y=0$ est $y=(a\cos3x+b\sin2x)$
B $y''-4y'+13y=0$ est $y=e^{2x}(a\cos3x+b\sin3x)$
C $y''+y'+y=0$ est $y=ae^{2x}+be^{-2x}$
D $y''+5y'+6y=0$ est $y=(a\cos3x-b\sin3x)e^{-2x}$

Q17 Dans un jeu à trois cartes dont une est la gagnante ; un joueur tire une carte, sachant que nécessairement une des deux autres est une carte perdante ; la probabilité pour que la carte tirée soit la carte gagnante est

A $P=\dfrac{1}{2}$ B $P=\dfrac{2}{3}$
C $P=\dfrac{1}{3}$ D $P=1$

ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES DE KHOURIBGA · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'entrée en 1re année · ENSA Khouribga

Année 2010–2011

2010 — Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14
B	C	A	D	A	C	D	B	B	D	C	A	C	A

Q15	Q16	Q17
D	B	C

Q1 ✔ Réponse B

$2(a^2+b^2)-(a+b)^2=(a-b)^2\geq 0$. (A est faux pour $a=0$, $b=1$; C et D sont faux en général.)

Q2 ✔ Réponse C

Seule l'équation linéaire homogène $-3s-2t+x-y=0$ définit un sous-espace (les autres ne contiennent pas 0).

Q3 ✔ Réponse A

$|\overline{z}|=|z|$: N est sur le cercle de centre O passant par M (c'est le symétrique de M par rapport à l'axe Ox).

Q4 ✔ Réponse D

$2iz=2e^{i\pi/2}z$: $\overrightarrow{ON}$ est orthogonal à $\overrightarrow{OM}$ (et $ON=2OM$).

Q5 ✔ Réponse A

L'équation imprimée n'a pas 1 pour racine ($1+1-1+1=2$) : coquille probable pour $z^5+z^3-z^2-1=0$, qui se factorise en

$$(z^2+1)(z^3-1)=0,$$

de racines $\pm i$, 1 et $\dfrac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$: réponse A.

Q6 ✔ Réponse C

Théorème de la limite monotone : toute suite croissante majorée converge.

Q7 ✔ Réponse D

$\left(\dfrac{\sin(-t)}{t}\right)^2=\left(\dfrac{\sin t}{t}\right)^2\to 1$. (A tend vers l'infini, B et C vers 0.)

Q8 ✔ Réponse B

Il faut $\dfrac{x-a}{a^3-x}>0$. Comme $a^3<a$, cela équivaut à $a^3<x<a$.

Q9 ✔ Réponse B

$1-2\cos^2\left(\frac{\pi x}{4}\right)=-\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$. Près de $x=1$: $-\cos\frac{\pi x}{2}\sim\frac{\pi}{2}(x-1)$ et $1-x^2\sim-2(x-1)$. La limite vaut $-\dfrac{\pi}{4}$ (même valeur en -1 par parité).

Q10 ✔ Réponse D

Numérateur et dénominateur sont équivalents à x^2 : la limite vaut 1.

Q11 ✔ Réponse C

$\ln\dfrac{1+x^2}{5}$ s'annule en 2 ; la limite est sa dérivée en 2 : $\dfrac{2x}{1+x^2}=\dfrac{4}{5}$.

Q12 ✔ Réponse A

Hors d'un segment $[-A,A]$, f reste proche de ℓ ; sur le segment elle est continue donc bornée : f est bornée.

Q13 ✔ Réponse C

Avec $u=1+\sqrt{t}$, $u'=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}$:

$$f'(t)=\frac{2u'(1-\ln u)}{u^2}=\frac{1-\ln\left(1+\sqrt{t}\right)}{\sqrt{t}\left(1+\sqrt{t}\right)^2}.$$

Q14 ✔ Réponse A

Avec $u=\ln(1+x^2)$, $u'=\dfrac{2x}{1+x^2}$: l'intégrande vaut $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$, de primitive $\sqrt{u}$.

Q15 ✔ Réponse D

$\mathcal{A}=\displaystyle\int_{-a}^{a}|5ax-3ax|\,dx=2a\int_{-a}^{a}|x|\,dx=2a\cdot a^2=2a^3$.

Q16 ✔ Réponse B

$r^2-4r+13=0$: $r=2\pm 3i$, donc $y=e^{2x}(a\cos 3x+b\sin 3x)$.

Q17 ✔ Réponse C

L'information donnée est toujours vraie (deux des trois cartes sont perdantes) : elle ne change rien, $P=\dfrac{1}{3}$.

ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES DE KHOURIBGA · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'entrée en 1re année · ENSA Khouribga

Année 2009-2010

2009 — Énoncé

Q1 On considère a et b deux nombres réels quelconques. Laquelle des propositions suivantes est la proposition correcte :

A $|ab| \leq |a| - |b|$ B $|ab| \leq \dfrac{a^2+b^2}{2}$

C $|ab| \leq |a| + |b|$ D $|ab| \leq a^2 - b^2$

Q2 Laquelle des propositions suivantes est la proposition correcte : deux nombres réels dont la somme est S et le produit est P sont solutions de l'équation

A $t^2 - St - P = 0$
B $t^2 + St + P = 0$
C $-t^2 + St - P = 0$
D $t^2 + St - P = 0$

Q3 Laquelle des propositions suivantes est la proposition correcte : la partie S ci-après est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$:

A $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 2x - y = 0 \text{ et } z = 1\}$
B $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / y = z = 1\}$
C $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 1\}$
D $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 2x + 3y - z = 0\}$

Q4 Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$; on considère les points $A = (1,2)$; $B = (-2,-1)$ et $M = (x,y)$. Laquelle des propositions suivantes est la proposition correcte : le point M est

A sur le cercle de diamètre $[AB]$ si $x^2 + y^2 + x - y = 4$
B sur le cercle de centre A et passant par B si $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 18$
C le milieu de $[AB]$ si $x = y = \dfrac{1}{2}$
D sur la droite passant par A et B si $y = 3x - 1$

Q5 Dans $\mathbb{C}$, on considère l'équation en « z » suivante : $z^3 - z^2 + (3+2i)z + (1-2i) = 0$. L'ensemble S des solutions est :

A $S = \{0, i, (1-2i)\}$
B $S = \{i, (1-2i)\}$
C $S = \{i, 1, (1-2i)\}$
D $S = \{-1, -i, (1-2i), 3\}$

Q6 Dans $\mathbb{C}$, on considère l'équation en « z » donnée par : $z^3 = 8$. L'ensemble S des solutions est :

A $S = \left\{2, \left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right), \left(-\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right\}$
B $S = \left\{2, \left(-1 + i\sqrt{3}\right), \left(-1 - i\sqrt{3}\right)\right\}$
C $S = \{-1 + i\sqrt{3}, -1 - i\sqrt{3}, 1 - i\sqrt{3}\}$
D $S = \left\{2, \left(-1 + i\sqrt{3}\right), \left(-1 - i\sqrt{3}\right)\right\}$

Q7 Laquelle des propositions suivantes est la proposition correcte :

A Toute suite de nombres réels convergente est bornée
B Toute suite de nombres réels bornée est convergente
C Toute suite de nombres réels croissante est bornée
D Toute suite de nombres réels convergente est monotone

Q8 Laquelle des propositions suivantes est la proposition correcte : la suite

A $\left((\cos k)\ln\left(1 + \dfrac{\sin k}{k}\right)\right)_{k\geq 1}$ est divergente
B $\left(\ln\left(1 + \dfrac{\sin k}{k}\right)^k\right)_{k\geq 1}$ est convergente
C $\left(\ln\left(1 + \dfrac{\sin k}{k}\right)^k\right)_{k\geq 1}$ est bornée
D $\left(\ln\left(1 + \dfrac{\sin k}{k}\right)\right)_{k\geq 1}$ est divergente

Q9 Pour $a > 1$; on considère la fonction f donnée par $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-a}{x-a^3}}$. Laquelle des propositions suivantes est la proposition correcte :

A Le domaine D_f est $D_f = [a, a^3[$
B $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x-a^3}}$; $\forall x \in]a^3, +\infty[$
C Le domaine D_f est $D_f =]a^3, +\infty[$
D $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x-a^3}}$; $\forall x \in D_f$

Q10 $\lim\limits_{|x|\to 1} \dfrac{1 - 4\sin^2\left(\frac{\pi}{6}x\right)}{1-x^2}$ est

A $\dfrac{\sqrt{3}}{6}\pi$ B $\dfrac{1}{2}$ C n'existe pas D $\dfrac{\pi}{6}$

Q11 $\lim\limits_{|x|\to\infty} \dfrac{x - \sin x}{x + \cos x}$ est

A $\dfrac{1}{6}$ B π C 1 D n'existe pas

Q12 On considère la fonction f donnée par

$$f(x) = \begin{cases} 4\sqrt{1+x^2} & \text{si } x \leq 1 \\ \dfrac{x^2-1}{\sqrt{x^2+a^2} - \sqrt{x+a^2}} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

A Si $a = \pm\sqrt{3}$, la fonction f est continue en $x = 1$
B $\forall a \in \mathbb{R}$, la fonction f est discontinue en $x = 1$
C $\forall a \in \mathbb{R}$, la fonction f est continue en $x = 1$
D Si $a = \pm 1$, la fonction f est continue en $x = 1$

Q13 On considère f une fonction dérivable en un point a ; $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a-h)}{h}$ est

A $2f'(a)$ B $f'(a)$ C $f(a)$ D $f'(0)$

Q14 On considère f la fonction dérivable donnée par $f(x) = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

A $f'(x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2} + x\arcsin(x)}{(1-x^2)^2}$
B $f'(x) = \dfrac{1 - x^2 + x\arcsin(x)}{1-x^2}$
C $f'(x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2} - x\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$
D $f'(x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2} + x\arcsin(x)}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$

Q15 Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$; on désigne par C_f la courbe de $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in \mathbb{R}_+$ et C_g celle de $g(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$. On note $\mathcal{A}$ l'aire géométrique de la région du plan délimitée par les droites d'équations $x = \dfrac{1}{2}$ et $x = 2$ et par les courbes C_f et C_g.

A $\mathcal{A} = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(t^2 - \sqrt{t}\right) dt$
B $\mathcal{A} = \dfrac{27}{8} - \dfrac{3}{2}\sqrt{2}$
C $\mathcal{A} = \dfrac{21}{8} - \dfrac{7}{6}\sqrt{2}$
D $\mathcal{A} = \left|\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(t^2 - \sqrt{t}\right) dt\right|$

Q16 La solution générale de l'équation différentielle

A $y'' - 4y' + 5y = 0$ est $y = ae^{2x} + be^{-2x}$
B $y'' - 5y' + 6y = 0$ est $y = a\cos 3x + b\sin 2x$
C $y'' - 6y' + 9y = 0$ est $y = (ax+b)e^{3x}$
D $y'' + 5y' + 6y = 0$ est $y = (a\cos 3x + b\sin 3x)e^{-2x}$

Q17 Un jeu de dominos comprend 28 pièces. Une des faces de chaque pièce compte deux cases. Sur chacune de ces deux cases est inscrit un chiffre compris entre 0 et 6. Un joueur tire une pièce. Pour $k = 0, 1, \ldots, 12$; on désigne par $P(k)$ la probabilité pour que la somme des chiffres sur ses cases soit exactement k.

A $P(6) = \dfrac{1}{7}$ B $P(12) = \dfrac{1}{14}$
C $P(3) = \dfrac{1}{28}$ D $P(8) = \dfrac{1}{7}$

ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES DE KHOURIBGA · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'entrée en 1re année · ENSA Khouribga

Année 2009–2010

2009 — Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14
B	C	D	A	B	BD	A	C	B	A	C	D	A	D

Q15	Q16	Q17
B	C	A

Q1 ✔ Réponse B

$a^2+b^2-2|ab| = (|a|-|b|)^2 \geq 0$.

Q2 ✔ Réponse C

Ils sont racines de $t^2 - St + P = 0$, équation équivalente à $-t^2 + St - P = 0$.

Q3 ✔ Réponse D

Seule $2x+3y-z=0$ est linéaire homogène ; les autres ensembles ne contiennent pas 0.

Q4 ✔ Réponse A

Centre $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et $R^2 = \frac{18}{4} = \frac{9}{2}$: $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{2} \iff x^2+y^2+x-y = 4$. (B est centré en B ; le milieu est $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$; $(AB) : y = x+1$.)

Q5 ✔ Réponse B

On vérifie que i et $1-2i$ sont racines. Somme des racines $= 1$: la troisième est $1-i-(1-2i) = i$. Racine double i : $S = \{i, 1-2i\}$.

Q6 ✔ Réponse BD

$z^3 = 8 \iff z = 2e^{2ik\pi/3}$: 2, $-1+i\sqrt{3}$, $-1-i\sqrt{3}$. B et D sont identiques et justes.

Q7 ✔ Réponse A

Toute suite convergente est bornée ; B, C, D sont fausses ($(-1)^n$, n, $\frac{(-1)^n}{n}$).

Q8 ✔ Réponse C

$k\ln\left(1+\frac{\sin k}{k}\right) = \sin k + O\left(\frac{1}{k}\right)$: bornée mais sans limite (B faux). A et D tendent vers 0.

Q9 ✔ Réponse B

$a < a^3$. $D_f =]-\infty, a] \cup]a^3, +\infty[$. Pour $x > a^3$, les deux termes sont positifs et $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x-a^3}}$; ce n'est pas vrai pour $x < a$ (D faux).

Q10 ✔ Réponse A

Le numérateur s'annule en 1 ; sa dérivée y vaut $-\frac{2\pi}{3}\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$, celle du dénominateur -2 : limite $\dfrac{\pi\sqrt{3}}{6}$ (même valeur en -1 par parité).

Q11 ✔ Réponse C

$\dfrac{1-\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\cos x}{x}} \to 1$.

Q12 ✔ Réponse D

Pour $x > 1$, en multipliant par la quantité conjuguée :

$$f(x) = \frac{(x+1)\left(\sqrt{x^2+a^2}+\sqrt{x+a^2}\right)}{x} \to 4\sqrt{1+a^2}.$$

Continuité : $4\sqrt{1+a^2} = f(1) = 4\sqrt{2}$, soit $a = \pm 1$.

Q13 ✔ Réponse A

$\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} + \dfrac{f(a)-f(a-h)}{h} \to 2f'(a)$.

Q14 ✔ Réponse D

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-x^2} + \arcsin x \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{\sqrt{1-x^2}+x\arcsin x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}.$$

Q15 ✔ Réponse B

$\sqrt{t} \geq t^2$ sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ et l'inverse sur $[1,2]$. Avec $F(t) = \frac{t^3}{3} - \frac{2}{3}t^{3/2}$:

$$\mathcal{A} = \left(F\left(\tfrac{1}{2}\right) - F(1)\right) + (F(2) - F(1)) = \frac{27}{8} - \frac{3}{2}\sqrt{2}.$$

(A et D ne tiennent pas compte du changement de signe.)

Q16 ✔ Réponse C

$r^2 - 6r + 9 = (r-3)^2$: racine double 3, $y = (ax+b)e^{3x}$.

Q17 ✔ Réponse A

Les 28 pièces sont les paires $\{i, j\}$ avec $0 \leq i \leq j \leq 6$. Somme 6 : $\{0,6\}, \{1,5\}, \{2,4\}, \{3,3\}$, soit $\frac{4}{28} = \frac{1}{7}$. ($P(12) = \frac{1}{28}$, $P(3) = \frac{2}{28}$, $P(8) = \frac{3}{28}$.)

ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES DE KHOURIBGA · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'entrée en 1re année · ENSA Khouribga

Année 2008-2009

2008

Énoncé

Q1 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\left(\pi\sqrt{1+x}\right)}{x}=$

A n'existe pas
B $\dfrac{-\pi}{2}$
C $\dfrac{\pi}{2}$
D $+\infty$

Q2 Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_0\in\mathbb{R}$ et $v_{n+1}=f(v_n)$, alors :

A Si de plus f est décroissante alors (v_n) est décroissante
B Si $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=+\infty$
C Si f est continue sur $\mathbb{R}$ et (v_n) converge vers ℓ alors $\ell=f(\ell)$
D Si f est dérivable sur $\mathbb{R}$ alors (v_n) est bornée

Q3 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0=0$ et $u_{n+1}=\sqrt{1+u_n}$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers :

A $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$
B $\sqrt{2}$
C $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$
D (u_n) ne converge pas

Q4 L'ensemble des solutions de l'équation $iz^2-2z+2-i=0$ est :

A $\{1,1+2i\}$
B $\{i,\bar{i}=-i\}$
C $\{1,-(1+2i)\}$
D $\varnothing$

Q5 Soit f la fonction définie sur $D=]-\infty,-2[\cup]3,+\infty[$ par $f(x)=\ln\left(\dfrac{x+2}{x-3}\right)$.

A $f(x)=\ln(x+2)-\ln(x-3)\ \forall x\in D$
B f est une primitive de la fonction $h(x)=\dfrac{5}{6+x-x^2}$ $(x\in D)$
C f est croissante sur $]3,+\infty[$
D L'équation $f(x)=-1$ admet une solution dans $]3,+\infty[$

Q6 Soit f la fonction définie par : $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2+x}}{x+2} & x\geq 0\\ \dfrac{\cos(x)-\sqrt{1+\sin(ax)}}{x} & x<0\end{cases}$

La valeur de a pour laquelle la fonction f est continue au point zéro est :

A $a=1$
B $a=\sqrt{2}$
C $a=\pi$
D $a=0$

Q7 Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=\sqrt[3]{8-x^3}$. Alors :

A $h^{-1}(x)=\sqrt[3]{8-x^3}$
B h est dérivable sur $\mathbb{R}$
C Domaine de définition de h est $[2,+\infty[$
D $h\circ h(x)=x^2$

Q8 Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[1,+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{(x-1)^2}{x}$. Alors :

A g est décroissante sur $[1,+\infty[$
B $g^{-1}(2)=2+\sqrt{3}$
C Une primitive de g est $G(x)=\dfrac{x^2}{2}-x+\ln(x)$
D La droite d'équation $y=2x$ est une asymptote à la courbe de g au voisinage de $+\infty$

Q9

A L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $3e^{2x}+4e^x+1=0$ est $\{0,\ln(3)\}$
B L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $3e^{2x}+4e^x+1=0$ est $\varnothing$
C L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $e^{2x}-2e^x-3=0$ est $\{0,\ln(3)\}$
D L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $e^{2x}-2e^x-3=0$ est $\varnothing$

Q10 Soit l'équation différentielle : (E) $y''+2y'+4y=0$

A La solution générale de (E) est $y(x)=[\alpha\cos(x)+\beta\sin(x)]e^x$, $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$
B La solution générale de (E) est $y(x)=\left[\alpha\cos(\sqrt{3}x)+\beta\sin(\sqrt{3}x)\right]e^{-x}$, $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$
C L'équation différentielle (E) n'admet pas de solutions
D La solution générale de (E) est $y(x)=\left[\alpha e^{x\sqrt{5}}+\beta e^{-x\sqrt{5}}\right]e^{-x}$, $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$

Q11 Soit f une fonction définie sur l'ensemble des réels, dont la courbe représentative dans un repère orthonormé est symétrique par rapport au point $\Omega\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right)$. Alors :

A $f(0)=0$ et $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{2}$
B La courbe de $f\circ f$ est symétrique par rapport au point $\Omega\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right)$
C $f(x)=3-f(1-x)$ pour $x\in\mathbb{R}$
D La courbe de $f\circ f$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $x=\dfrac{1}{2}$

Q12 Soit h une fonction définie sur l'ensemble des réels, dont la courbe représentative dans un repère orthonormé est symétrique par rapport à la droite d'équation $x=\dfrac{1}{2}$. Alors :

A La courbe de $h\circ h$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $x=1$
B $h\left(x-\dfrac{1}{2}\right)=h\left(\dfrac{1}{2}-x\right)$ pour $x\in\mathbb{R}$
C $h(x)=h(1-x)$ pour $x\in\mathbb{R}$
D $h\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$

Q13 Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}$

A F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $F'(x)=-\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$
B Pour tout réel x, $F(x)\geq 0$
C Pour tout réel x, $|F(x)|\leq\pi$
D $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\pi$

ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES DE KHOURIBGA · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'entrée en 1re année · ENSA Khouribga

Année 2008–2009

2008

Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13
B	C	C	C	B	B	A	B	B	B	C	C	C

Q1 ✔ Réponse B

C'est la dérivée en 0 de $\sin\left(\pi\sqrt{1+x}\right)$: $\cos(\pi)\cdot\dfrac{\pi}{2}=-\dfrac{\pi}{2}$.

Q2 ✔ Réponse C

Si $v_n\to\ell$ et f est continue, $v_{n+1}=f(v_n)\to f(\ell)$, donc $\ell=f(\ell)$. Les autres affirmations sont fausses en général.

Q3 ✔ Réponse C

La suite est croissante, majorée par 2 ; sa limite vérifie $\ell=\sqrt{1+\ell}$, $\ell^2-\ell-1=0$, $\ell=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Q4 ✔ Réponse C

$z=1$ est racine : $i-2+2-i=0$. Le produit des racines vaut $\dfrac{2-i}{i}=-1-2i$, donc l'autre racine est $-(1+2i)$: $S=\{1,-(1+2i)\}$.

Q5 ✔ Réponse B

$f'(x)=\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x-3}=\dfrac{-5}{(x+2)(x-3)}=\dfrac{5}{6+x-x^2}$. (A est faux pour $x<-2$; f décroît sur $]3,+\infty[$ et $f>0$ y.)

Q6 ✔ Réponse B

À droite : $f(0)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. À gauche : $\cos x-\sqrt{1+\sin ax}\sim-\dfrac{ax}{2}$, d'où la limite $-\dfrac{a}{2}$. Continuité : $a=\sqrt{2}$.

Q7 ✔ Réponse A

$h\circ h(x)=\sqrt[3]{8-(8-x^3)}=x$, donc $h^{-1}=h$. (h n'est pas dérivable en $x=2$, tangente verticale ; h est définie sur $\mathbb{R}$.)

Q8 ✔ Réponse B

$g(x)=2\iff x^2-4x+1=0$, $x=2+\sqrt{3}\geq 1$. (g est croissante ; $g(x)=x-2+\frac{1}{x}$, primitive $\frac{x^2}{2}-2x+\ln x$, asymptote $y=x-2$.)

Q9 ✔ Réponse B

$3e^{2x}+4e^x+1>0$: pas de solution. ($e^{2x}-2e^x-3=0$ donne seulement $e^x=3$, $S=\{\ln 3\}$.)

Q10 ✔ Réponse B

$r^2+2r+4=0$: $r=-1\pm i\sqrt{3}$,
$y=e^{-x}\left(\alpha\cos\sqrt{3}x+\beta\sin\sqrt{3}x\right)$.

Q11 ✔ Réponse C

Symétrie de centre Ω : $f(1-x)+f(x)=2\cdot\dfrac{3}{2}=3$. (On a $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}$, mais $f(0)$ n'est pas connu.)

Q12 ✔ Réponse C

Symétrie par rapport à $x=\frac{1}{2}$: $h(x)=h(1-x)$. (B est la parité de h, qui n'est pas acquise.)

Q13 ✔ Réponse C

$F(x)=\arctan x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$: $|F(x)|\leq\pi$. ($F'(x)=\frac{1}{1+x^2}$; $F<0$ pour $x<0$; $F\to\frac{\pi}{2}$.)

ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES DE OUJDA · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année · ENSA Oujda

Session du mercredi 1er août 2012

2012

Énoncé

Q1 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \ln(e^x + x) - x$ la dérivée de f est :

A $f'(x) = \dfrac{1}{e^x + x}$

B $f'(x) = \dfrac{e^x}{e^x + x}$

C $f'(x) = \dfrac{1 - x}{e^x + x}$

D $f'(x) = \dfrac{e^x}{\ln(e^x + x)} - 1$

Q2 On considère l'équation différentielle $(E) : y'' - 5y' + 4y = 0$, alors la solution de (E) s'écrit sous la forme :

A $y = \lambda e^t + \mu e^{4t}$.

B $y = \lambda e^{-t} + \mu e^{2t}$.

C $y = e^t(\lambda \cos(4t) + \mu \sin(4t))$.

D $y = (\lambda t + \mu)e^{4t}$.

Q3 L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.
Pour tout réel t de l'intervalle $[-\pi, \pi[$, l'ensemble Γ_t des point $M(x, y, z)$ vérifiant l'équation :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2tx - 2y\sin t + 2z + t^2 + \sin^2 t - 1 = 0$$

A Est une sphère de centre $\Omega(t, t, 1)$ et de rayon $R = 2$.

B Est une sphère de centre $\Omega(0, 0, -1)$ et de rayon $R = \sqrt{2}$.

C Est un cercle de centre $\Omega(t, t, 1)$ et de rayon $R = 2$.

D Est une sphère de centre $\Omega(t, \sin t, -1)$ et de rayon $R = \sqrt{2}$.

Q4 L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.
Soient (P) et (P') les plans d'équations respectives $x + 2y - z + 1 = 0$ et $-x + y + z = 0$.
Les plans (P) et (P') sont :

A Sécants mais ils ne sont pas perpendiculaires.

B Perpendiculaires.

C Strictement parallèles.

D Confondus.

Q5 Soit n un entier naturel :

A $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k = 0$

B $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k = -1$

C $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k = 1$

D $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k = -2$

Q6 Dans l'espace $\mathcal{E}$ on donne un tétraèdre $OABC$. Soit G le barycentre du système de points pondérés
$S = \{(O, 3), (A, 1), (B, 1), (C, 1)\}$
L'ensemble Γ des points M tels que :
$\|3\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 5$ est :

A Le triangle ABC

B Un cercle de centre G et de rayon 5

C Cube de côté $\dfrac{5}{6}$

D Sphère de centre G et de rayon $\dfrac{5}{6}$.

Q7 Soit $p(x)$ un polynôme du troisième degré tel que 2 et -3 sont ses racines.
$p(x)$ peut se mettre sous la forme :

A $(x + 2)(x - 3)(ax + b)$.

B $(x + 2)(x - 3)(ax^2 + bx + c)$.

C $(x - 2)(x + 3)(ax + b)$.

D $(x - 2)(x + 3)(ax^2 + bx + c)$.

Q8 Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ avec : $a > b > 0$.
La limite en $+\infty$ de la fonction $\left(\dfrac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ est égale à :

A $\dfrac{1}{2}$ B $\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)$ C a D $+\infty$

Q9 Soient x et y deux réels strictement positifs.
On pose $a = \dfrac{x + y}{2}$; $b = \sqrt{xy}$;
$c = \sqrt{\dfrac{1}{2}(x^2 + y^2)}$ alors

A $a \leq b \leq c$ B $b \leq a \leq c$
C $a \leq c \leq b$ D $c \leq a \leq b$

Q10 La limite $\displaystyle\lim_{x \to \frac{\pi}{2}+} \frac{1 + \cos(x)}{x \sin(x)}$ vaut

A 0 B -2 C $\dfrac{1}{2}$ D $+\infty$

Q11 La limite de la suite $\dfrac{1 + 2 + 3 + \cdots + n}{n^2}$ est :

A 0 B $\dfrac{1}{2}$ C 2 D $+\infty$

Q12 Pour tout $a, b > 0$, on a :

A $\dfrac{1}{2}(\ln a + \ln b) = \ln\dfrac{a + b}{2}$

B $\dfrac{1}{2}(\ln a + \ln b) > \ln\dfrac{a + b}{2}$

C $\dfrac{1}{2}(\ln a + \ln b) \leq \ln\dfrac{a + b}{2}$

D $\dfrac{1}{2}(\ln a + \ln b) \geq \ln\dfrac{a + b}{2}$

Q13 Soit $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \cos(x) \cdot e^{-x}\, dx$

A $I = 0$ B $I = -1$
C $I = e^{-\pi} + 1$ D $I = \dfrac{e^{-\pi} + 1}{2}$

Q14 Un sac contient 3 boules blanches, 4 boules noires et 1 boule rouge, indiscernables au toucher. On tire, au hasard, successivement, trois boules du sac, en remettant chaque boule tirée dans le sac avant le tirage suivant. La probabilité de tirer trois boules noires est :

A $\dfrac{C_3^4}{C_3^8}$ B $\dfrac{9}{8}$ C $\left(\dfrac{1}{2}\right)^3$ D $\dfrac{4 \times 3 \times 2}{8 \times 7 \times 6}$

Q15 Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on désigne par A et B les deux points d'affixes respectives -1 et $-i$.
L'ensemble des points M d'affixe z telle que $\dfrac{z + i}{z + 1}$ soit un imaginaire pur est :

A La droite (AB) privée du point A.

B Le cercle de diamètre $[AB]$ privé du point A.

C Le segment $[AB]$ privé du point A.

D La médiatrice du segment $[AB]$.

Q16 Soient A et B deux évènements tels que : $p(A \cup B) = 0{,}8$, $p(A) = 0{,}6$ et $p(B) = 0{,}3$:

A $p_A(B) = \dfrac{1}{6}$

B $p_B(A) = \dfrac{1}{6}$

C $p(A \cap B) = \dfrac{1}{6}$

D A et B sont indépendants

Q17 On considère les nombres complexes : $z_1 = 1 - 2i$, $z_2 = 2 + i$ et $z_3 = \dfrac{1}{z_1} + \dfrac{1}{z_2}$, la forme algébrique du nombre complexe z_3 est :

A $z_3 = \dfrac{3}{5} - \dfrac{1}{5}i$ B $z_3 = \dfrac{3}{5} + \dfrac{1}{5}i$
C $z_3 = \dfrac{1}{5} - \dfrac{3}{5}i$ D $z_3 = \dfrac{1}{5} + \dfrac{3}{5}i$

Q18 La courbe de la fonction définie sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$ par : $f(x) = 2x - \dfrac{\ln(\sqrt{x}) - 1}{\ln(\sqrt{x})}$ admet pour asymptote la droite d'équation :

A $y = 2x + 1$ B $x = 2$
C $y = 2$ D $y = 2x - 1$

Q19 La négation de l'assertion :
$\forall x \in I,\ \forall y \in I,\ f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y$ est :

A $\exists x \in I,\ \exists y \in I,\ f(x) = f(y)$ et $x \neq y$.

B $\exists x \notin I,\ \exists y \notin I,\ f(x) \neq f(y) \Longrightarrow x = y$.

C $\exists x \in I,\ \exists y \in I,\ f(x) = f(y)$ ou $x \neq y$.

D $\exists x \in I,\ \exists y \in I,\ f(x) \neq f(y)$ et $x \neq y$.

Q20 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{2x} - (x + 1)e^x$ alors :

A $\displaystyle\int_{-4}^{0} f(x)\, dx = e^{-8} + 3e^{-4}$.

B $\displaystyle\int_{-4}^{0} f(x)\, dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-8} - 4e^{-4}$.

C $\displaystyle\int_{-4}^{0} f(x)\, dx = 5e^{-4} - 1$.

D $\displaystyle\int_{-4}^{0} f(x)\, dx = 1 + e^{-8} + 2e^{-4}$.

ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES DE OUJDA · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année · ENSA Oujda

Session du mercredi 1er août 2012

2012 — Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14
C	A	D	B	A	D	C	C	B	–	B	C	D	C

Q15	Q16	Q17	Q18	Q19	Q20
B	A	B	D	A	B

Q1 — Réponse C

$$f'(x) = \frac{e^x+1}{e^x+x} - 1 = \frac{e^x+1-e^x-x}{e^x+x} = \frac{1-x}{e^x+x}.$$

Q2 — Réponse A

Équation caractéristique : $r^2-5r+4=0$, soit $(r-1)(r-4)=0$. Deux racines réelles distinctes 1 et 4 : $y=\lambda e^t+\mu e^{4t}$.

Q3 — Réponse D

On complète les carrés :

$$(x-t)^2-t^2+(y-\sin t)^2-\sin^2 t+(z+1)^2-1+t^2+\sin^2 t-1=0,$$

soit $(x-t)^2+(y-\sin t)^2+(z+1)^2=2$: sphère de centre $\Omega(t,\sin t,-1)$ et de rayon $\sqrt{2}$.

Q4 — Réponse B

Vecteurs normaux : $\vec{n}(1,2,-1)$ et $\vec{n}'(-1,1,1)$. Ils ne sont pas colinéaires (plans sécants) et $\vec{n}\cdot\vec{n}' = -1+2-1=0$: les plans sont perpendiculaires.

Q5 — Réponse A

Formule du binôme : $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k = (1-1)^n = 0$ pour $n \geq 1$.

Remarque : pour $n=0$, la somme se réduit à $C_0^0=1$.

Remarque : L'énoncé dit « n un entier naturel » : pour n = 0 la somme vaut 1 (proposition C), pour n ≥ 1 elle vaut 0 (proposition A, réponse visée). À trancher par le professeur (valider A ou retirer la question).

Q6 — Réponse D

Soit G le barycentre de S (somme des poids $3+1+1+1=6$). Pour tout point M : $3\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=6\overrightarrow{MG}$. La condition devient $6MG=5$, soit $MG=\frac{5}{6}$: sphère de centre G et de rayon $\frac{5}{6}$.

Q7 — Réponse C

2 racine donne le facteur $(x-2)$, -3 racine donne $(x+3)$. Le quotient de p (degré 3) par $(x-2)(x+3)$ (degré 2) est de degré 1 : $p(x)=(x-2)(x+3)(ax+b)$ avec $a\neq 0$. D serait de degré 4.

Q8 — Réponse C

On factorise a^x :

$$\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = a\left(\frac{1+(b/a)^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

Comme $0<\frac{b}{a}<1$, $\frac{1+(b/a)^x}{2}\to\frac{1}{2}$, et $\frac{1}{x}\ln\frac{1+(b/a)^x}{2}\to 0$. La limite est $a\cdot e^0 = a$.

Q9 — Réponse B

- $a-b=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{2}\geq 0$, donc $b\leq a$.
- $c^2-a^2=\frac{x^2+y^2}{2}-\frac{(x+y)^2}{4}=\frac{(x-y)^2}{4}\geq 0$, et $a,c>0$, donc $a\leq c$.

D'où $b\leq a\leq c$ (moyennes géométrique, arithmétique et quadratique).

Q10 — Réponse –

Quand $x\to\frac{\pi}{2}^+$: $1+\cos x\to 1$ et $x\sin x\to\frac{\pi}{2}$, donc la limite vaut $\frac{2}{\pi}$.

Aucune proposition n'est juste (erreur du sujet).

Q11 — Réponse B

$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$, donc la suite vaut $\frac{n+1}{2n}\to\frac{1}{2}$.

Q12 — Réponse C

$\frac{1}{2}(\ln a+\ln b)=\ln\sqrt{ab}$ et $\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}$ (car $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geq 0$). La fonction ln étant croissante, $\ln\sqrt{ab}\leq\ln\frac{a+b}{2}$, avec égalité seulement si $a=b$: A et D sont fausses en général, B est toujours fausse.

Q13 — Réponse D

Une primitive de $e^{-x}\cos x$ est $F(x)=\frac{e^{-x}(\sin x-\cos x)}{2}$ (on vérifie $F'(x)=e^{-x}\cos x$, ou on fait deux intégrations par parties). Donc

$$I=F(\pi)-F(0)=\frac{e^{-\pi}}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{e^{-\pi}+1}{2}.$$

Q14 — Réponse C

Les tirages sont indépendants (avec remise) et à chaque tirage $P(\text{noire})=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$. Donc $P=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$. (D correspondrait à des tirages sans remise ; B est supérieur à 1.)

Q15 — Réponse B

$\frac{z+i}{z+1}=\frac{z-z_B}{z-z_A}$ (défini pour $M\neq A$). Il vaut 0 en $M=B$; pour $M\neq A,B$ il est imaginaire pur si et seulement si $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})=\pm\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire si M voit $[AB]$ sous un angle droit.

L'ensemble est le cercle de diamètre $[AB]$ privé de A.

Q16 — Réponse A

$p(A\cap B)=p(A)+p(B)-p(A\cup B)=0{,}6+0{,}3-0{,}8=0{,}1$.

- $p_A(B)=\frac{0{,}1}{0{,}6}=\frac{1}{6}$: A est vraie.
- $p_B(A)=\frac{0{,}1}{0{,}3}=\frac{1}{3}$; $p(A\cap B)=\frac{1}{10}$.
- $p(A)\,p(B)=0{,}18\neq 0{,}1$: pas indépendants.

Q17 — Réponse B

$\frac{1}{1-2i}=\frac{1+2i}{5}$ et $\frac{1}{2+i}=\frac{2-i}{5}$. Donc $z_3=\frac{3+i}{5}=\frac{3}{5}+\frac{1}{5}i$.

Q18 — Réponse D

$f(x)=2x-1+\frac{1}{\ln\sqrt{x}}$ et $\frac{1}{\ln\sqrt{x}}\to 0$ quand $x\to+\infty$: la droite $y=2x-1$ est asymptote oblique.

(La courbe a aussi l'asymptote verticale $x=1$, mais pas $x=2$, où f est définie.)

Q19 ✔ Réponse **A**

Les quantificateurs $\forall$ deviennent $\exists$ (sur le même ensemble I), et la négation de « $P \Longrightarrow Q$ » est « P et non Q ». On obtient : $\exists x \in I,\ \exists y \in I,\ f(x) = f(y)$ et $x \neq y$.

Q20 ✔ Réponse **B**

Une primitive de e^{2x} est $\frac{1}{2}e^{2x}$; une primitive de $(x+1)e^x$ est xe^x (dériver : $e^x + xe^x$). Donc $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - xe^x$ et

$$\begin{aligned}\int_{-4}^{0} f(x)\,dx &= F(0) - F(-4)\\ &= \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}e^{-8} + 4e^{-4}\right)\\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-8} - 4e^{-4}.\end{aligned}$$

ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES D'OUJDA · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année · ENSA Oujda

Session du 24 juillet 2009

2009

Énoncé

Q1 Les nombres a et b sont des réels non nuls. Alors :

- **A** $\forall a \in]0;+\infty[,\ \sqrt{a} < a < a^2$
- **B** Si $0 < a < b \leq 1$ alors $\sqrt{b} - \sqrt{a} < b - a$
- **C** Si $1 \leq a < b$ alors $\sqrt{b} - \sqrt{a} < b - a$

Q2 Les fonctions f et g sont définies par $f(x) = xe^{1-x^2}$ et $g(x) = ax^2 + bx$ admettent respectivement (C) et (Γ) pour courbes représentatives. On recherche tous les couples (a, b) de réels tels que (C) et (Γ) aient la même tangente au point d'abscisse 1.

- **A** Si (a, b) est une solution alors $a + b = 1$
- **B** Tout couple (a, b) tel que $2a + b = -1$ est solution
- **C** Le couple $(1, 0)$ est solution

Q3 Soit $f(x) = 2\cos^2 x - \sin x - 1$. On désigne par (E) l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) < 0$.

- **A** $f(x) < 0 \iff \sin x > \dfrac{1}{2}$
- **B** $E = \left]\dfrac{\pi}{6}, +\infty\right[$
- **C** Si $x \in \left]\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}\right[$ alors $f(x) \geq 0$

Q4 Le plan (P) est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative (C) est symétrique par rapport au point $A(1, 0)$. Alors :

- **A** $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(2 - x)$
- **B** $\forall x \in \mathbb{R},\ f(1 + x) + f(1 - x) = 0$
- **C** $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(1 + x) + f'(1 - x) = 0$

Q5 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{e^{2x+1} - e}{x}$, (C) sa courbe représentative et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{2x+1}$.

- **A** La limite en 0 de f est égale à e
- **B** L'axe des abscisses est asymptote à (C)
- **C** $\forall x \neq 0,\ f'(x) = \dfrac{e}{x^2}\left[(x-1)e^{2x} + 1\right]$

Q6 Soit l'équation (E), d'inconnue z, définie par $z^3 = \overline{z}$.

- **A** Si $|\alpha| = 1$ alors α est solution de (E).
- **B** Si $\theta = k\dfrac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, alors $\cos\theta - i\sin\theta$ est solution de (E)
- **C** Les solutions de (E) sont les nombres α tels que $\alpha = 1$ ou $\alpha^4 = 1$

Q7 Soit f l'application qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{2z + 1}{z - 1}$

- **A** L'ensemble des points M tels que z' est réel est l'axe des réels
- **B** L'ensemble des points M tels que z' est imaginaire pur est contenu dans un cercle
- **C** L'ensemble des points M tels que $|z'| = 2$ est un cercle

Q8 On considère l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^e \frac{\ln t}{t^2}\,dt$.

- **A** $I \leq \dfrac{1}{e^2}\displaystyle\int_1^e \ln t\,dt$
- **B** $I = 1 - \dfrac{2}{e^3}$
- **C** $I = -\dfrac{1}{e} + \displaystyle\int_1^e \frac{dt}{t^2}$

Q9 Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3\sqrt{u_n}$

- **A** La suite (u_n) est décroissante
- **B** La suite (v_n) définie par $v_n = \ln u_n - \ln 9$ est une suite arithmétique
- **C** La limite en $+\infty$ de (u_n) est 9

Q10 Quatre points M, N, P et Q distincts forment un parallélogramme $MNPQ$ dont les diagonales se coupent en O. Alors :

- **A** $2\left(MN^2 + MQ^2\right) = NQ^2 + MP^2$
- **B** N est le barycentre de $\{(M, 1), (P, 1), (Q, -2)\}$
- **C** $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{MN} = \vec{0}$

ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES D'OUJDA · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année · ENSA Oujda

Session du 24 juillet 2009

2009 — Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10
C	A	A	B	B	B	AB	C	C	A

Q1 ✔ Réponse C

$\sqrt{b}-\sqrt{a}=\dfrac{b-a}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}$. Si $1\le a<b$, $\sqrt{a}+\sqrt{b}>1$: C vraie. Pour a,b petits ($a=0{,}01$, $b=0{,}04$) : $0{,}1>0{,}03$, B fausse. A est fausse pour $a<1$.

Q2 ✔ Réponse A

$f(1)=1$ et $f'(x)=(1-2x^2)e^{1-x^2}$, $f'(1)=-1$. Il faut $a+b=1$ et $2a+b=-1$: seule solution $(a,b)=(-2,3)$.

Q3 ✔ Réponse A

Avec $s=\sin x$: $f(x)=1-s-2s^2=-(2s-1)(s+1)$. Comme $s+1\ge 0$ (et $f=0$ si $s=-1$) : $f(x)<0 \iff \sin x>\dfrac{1}{2}$.

Q4 ✔ Réponse B

Symétrie par rapport à $A(1,0)$: $f(2-x)=-f(x)$, soit $f(1+x)+f(1-x)=0$. En dérivant : $f'(1+x)-f'(1-x)=0$ (C fausse).

Q5 ✔ Réponse B

En $-\infty$, $f(x)\sim -\dfrac{e}{x}\to 0$: l'axe des abscisses est asymptote. En 0, $f\to 2e$; et

$$f'(x)=\frac{e\left[(2x-1)e^{2x}+1\right]}{x^2}.$$

Q6 ✔ Réponse B

$|z|^3=|z|$: $z=0$ ou $|z|=1$; dans ce cas $\overline{z}=\frac{1}{z}$ et $z^4=1$. Les solutions sont $0,1,i,-1,-i$. $\cos\theta-i\sin\theta=e^{-ik\pi/2}$ en fait partie. (A et C oublient des conditions ou la solution 0.)

Q7 ✔ Réponse AB

z' réel $\iff$ z réel ($z\neq 1$) : l'axe des réels privé du point 1. z' imaginaire pur décrit un cercle (privé d'un point) : B vraie. $|z'|=2 \iff |z+\frac{1}{2}|=|z-1|$: c'est une droite (médiatrice), C fausse.

Q8 ✔ Réponse C

Par parties : $I=\left[-\dfrac{\ln t}{t}\right]_1^e+\displaystyle\int_1^e\frac{dt}{t^2}=-\frac{1}{e}+\int_1^e\frac{dt}{t^2}$, d'où $I=1-\dfrac{2}{e}$ (B fausse).

Q9 ✔ Réponse C

$v_{n+1}=\ln 3+\frac{1}{2}\ln u_n-\ln 9=\frac{1}{2}v_n$: géométrique (pas arithmétique), $v_n\to 0$, donc $u_n\to 9$ (en croissant).

Q10 ✔ Réponse A

Identité du parallélogramme : la somme des carrés des quatre côtés égale celle des diagonales. Le système de B a une somme de poids nulle ; C donne $\overrightarrow{QN}\neq\vec{0}$.

ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES DE SAFI · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année · ENSA Safi

Session du mercredi 1er août 2012

2012

Énoncé

Q1 La fonction y solution de l'équation différentielle $y'(x)+2y(x)=6$ avec la condition initiale $y(0)=1$ est définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

A $y(x)=-2e^{-2x}+3$
B $y(x)=-2e^{2x}+3$
C $y(x)=-2e^{-2x}-3$

Q2 Soit (E) l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $z=1-2i+e^{i\theta}$, θ étant un nombre réel.

A (E) est une droite passant par le point d'affixe $2-2i$.
B (E) est le cercle de centre d'affixe $-1+2i$ et de rayon 1.
C (E) est le cercle de centre d'affixe $1-2i$ et de rayon 1.

Q3 On pose $z=e^{i\theta}$. La valeur de $1+z$ est :

A $2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$
B $2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$
C $3\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$

Q4 On pose $z=e^{i\theta}$. La valeur de $1+z+z^2$ est :

A $\frac{\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}e^{i\theta}$
B $\frac{\cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}e^{i\theta}$
C $\frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)}e^{i\theta}$

Q5 La valeur de l'intégrale $I_n=\int_1^n \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx$ est donnée par :

A $I_n=1-\frac{\ln(n)}{n}$
B $I_n=1-\frac{\ln(n)}{n}-\frac{1}{n}$
C $I_n=1-\frac{\ln(n)}{n^2}-\frac{1}{n^2}$

Q6 La valeur de l'intégrale $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\cos(x)+\sin(x)}\,dx$ est donnée par :

A $J=1$ B $J=\frac{\pi}{4}$
C $J=\frac{\pi}{2}$ D $J=2$

Q7 La limite l de la suite $u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ est :

A $l=1$ B $l=\frac{e}{2}$
C $l=e^2$ D $l=e$

Q8 La limite de l de la suite $u_n=\frac{\sum_{k=1}^{n}k^2}{n^3}$ est :

A $l=1$ B $l=\frac{1}{3}$
C $l=\frac{1}{6}$ D $l=e$

Q9 Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher : 7 blanches et 3 noires. On tire simultanément 3 boules de l'urne. La probabilité de tirer 2 boules blanches et une boule noire est égale à :

A $\frac{21}{40}$ B $\frac{42}{60}$ C $\frac{21}{60}$ D $\frac{45}{56}$

Soit f la fonction définie par $f(x)=\frac{1}{x}\ln\left(1+\sin^2(x)\right)$ si $x\neq 0$ et $f(0)=0$.

Q10.1 La limite de f au point 0 vaut :

A 1 B $\frac{\pi}{2}$ C 0 D $\frac{\pi}{4}$

Q10.2 Choisissez l'un des réponses suivantes :

A f est dérivable en 0 et $f'(0)=0$.
B f est dérivable en 0 et $f'(0)=1$.
C f n'est pas dérivable en 0.

Q10.3 f est périodique de période :

A π B 2π C f n'as pas de période

Q11 Choisissez l'une des réponses suivantes pour la linéarisation de $\sin^4(x)$:

A $\frac{1}{8}\cos(4x)-\frac{1}{2}\cos(2x)+\frac{3}{8}$
B $\frac{1}{8}\cos(4x)+\frac{1}{2}\cos(2x)+5$
C $\frac{1}{8}\cos(-4x)-\frac{1}{2}\cos(-2x)+\frac{3}{8}$

Q12 La valeur de $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4(x)\,dx$ est

A $\frac{\pi}{16}$ B $\frac{5\pi}{16}$ C $\frac{3\pi}{8}$ D $\frac{3\pi}{16}$

Q13 La valeur de l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\cos(x)}\,dx$ est :

A 4 B 3 C 1 D 0

Q14 Quatre points M, N, P et Q distincts forment un parallélogramme $MNPQ$ dont les diagonales se coupent en O. Alors :

A N est le barycentre de $\{(M,1),(P,1),(Q,-2)\}$.
B $\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{MN}=\vec{0}$.
C $MQ^2-PQ^2=2\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{MQ}$.
D $2(MN^2+MQ^2)=NQ^2+MP^2$.

ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES DE SAFI · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année · ENSA Safi

Session du mercredi 1er août 2012

2012 — Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10.1	Q10.2	Q10.3	Q11	Q12
A	C	B	A	B	B	D	B	A	C	B	C	A	D

Q13	Q14
C	D

Q1 ✔ Réponse A

Les solutions de $y' + 2y = 6$ sont $y(x) = Ce^{-2x} + 3$ (solution constante 3 plus solution de l'équation homogène). $y(0) = C + 3 = 1$ donne $C = -2$: $y(x) = -2e^{-2x} + 3$.

Q2 ✔ Réponse C

$z - (1 - 2i) = e^{i\theta}$, donc $|z - (1 - 2i)| = 1$; quand θ décrit $\mathbb{R}$, $e^{i\theta}$ décrit tout le cercle unité. (E) est le cercle de centre d'affixe $1 - 2i$ et de rayon 1.

Q3 ✔ Réponse B

Factorisation par l'angle moitié :

$$1 + e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}\right) = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}.$$

Q4 ✔ Réponse A

Pour $z \neq 1$ (c'est-à-dire $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$) : $1 + z + z^2 = \dfrac{z^3 - 1}{z - 1} = \dfrac{e^{3i\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1}$. Avec $e^{ia} - 1 = 2i\sin\left(\frac{a}{2}\right)e^{i\frac{a}{2}}$:

$$1 + z + z^2 = \frac{2i\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)e^{i\frac{3\theta}{2}}}{2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}} = \frac{\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}e^{i\theta}.$$

Q5 ✔ Réponse B

Intégration par parties avec $u = \ln x$, $v' = \dfrac{1}{x^2}$ $\left(v = -\dfrac{1}{x}\right)$:

$$I_n = \left[-\frac{\ln x}{x}\right]_1^n + \int_1^n \frac{dx}{x^2} = -\frac{\ln n}{n} + \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{\ln n}{n} - \frac{1}{n}.$$

Q6 ✔ Réponse B

Soit $K = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x}\,dx$. Le changement $x = \frac{\pi}{2} - t$ échange sin et cos, donc $J = K$. Et $J + K = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dx = \frac{\pi}{2}$. Donc $J = \dfrac{\pi}{4}$.

Q7 ✔ Réponse D

$u_n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$ et $n\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \dfrac{\ln(1+h)}{h} \to 1$ avec $h = \frac{1}{n} \to 0$. Donc $l = e^1 = e$.

Q8 ✔ Réponse B

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, donc $u_n = \dfrac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} \to \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$.

Q9 ✔ Réponse A

Nombre de tirages : $\binom{10}{3} = 120$. Tirages favorables : $\binom{7}{2} \times \binom{3}{1} = 21 \times 3 = 63$. Probabilité : $\dfrac{63}{120} = \dfrac{21}{40}$.

Q10.1 ✔ Réponse C

Quand $x \to 0$: $\sin^2 x \to 0$ et $\ln(1 + u) \sim u$, donc $\ln(1 + \sin^2 x) \sim \sin^2 x \sim x^2$. Ainsi $f(x) \sim \dfrac{x^2}{x} = x \to 0$. (La limite est égale à $f(0)$: f est continue en 0.)

Q10.2 ✔ Réponse B

Taux d'accroissement en 0 :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{\ln(1 + \sin^2 x)}{x^2} \sim \frac{\sin^2 x}{x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} 1.$$

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$.

Q10.3 ✔ Réponse C

$x \mapsto \ln(1 + \sin^2 x)$ est π-périodique, mais le facteur $\dfrac{1}{x}$ ne l'est pas : par exemple $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \dfrac{2\ln 2}{\pi}$ alors que $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \dfrac{2\ln 2}{3\pi}$. Plus généralement, $|f(x)| \leq \dfrac{\ln 2}{|x|} \to 0$ en $+\infty$: une fonction périodique qui tend vers 0 serait identiquement nulle, ce qui n'est pas le cas. f n'a pas de période.

Q11 ✔ Réponse A

$\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$, donc

$$\sin^4 x = \frac{1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x}{4} = \frac{1 - 2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}}{4} = \frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}.$$

Remarque : comme cos est paire, la proposition C est exactement la même expression que A.

Remarque : Les propositions A et C sont égales (cos(−4x) = cos 4x et cos(−2x) = cos 2x) : les deux sont justes, alors que le QCM n'accepte qu'une réponse. À trancher par le professeur (garder A comme réponse attendue ou retirer la question).

Q12 ✔ Réponse D

Avec la linéarisation $\sin^4 x = \dfrac{1}{8}\cos 4x - \dfrac{1}{2}\cos 2x + \dfrac{3}{8}$: les intégrales de $\cos 4x$ et de $\cos 2x$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ sont nulles ($\left[\frac{\sin 4x}{4}\right]$ et $\left[\frac{\sin 2x}{2}\right]$ valent 0 aux bornes). Il reste $\dfrac{3}{8} \times \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{3\pi}{16}$.

Q13 ✔ Réponse C

$1 + \cos x = 2\cos^2\dfrac{x}{2}$, donc $\dfrac{1}{1 + \cos x} = \dfrac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}$, dont une primitive est $\tan\dfrac{x}{2}$. L'intégrale vaut $\tan\dfrac{\pi}{4} - \tan 0 = 1$.

Q14 ✔ Réponse D

Les diagonales sont $[MP]$ et $[NQ]$. Avec $\vec{a} = \overrightarrow{MN}$ et $\vec{b} = \overrightarrow{MQ}$: $\overrightarrow{MP} = \vec{a} + \vec{b}$ et $\overrightarrow{QN} = \vec{a} - \vec{b}$, donc

$$MP^2 + NQ^2 = \|\vec{a} + \vec{b}\|^2 + \|\vec{a} - \vec{b}\|^2 = 2\left(\|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2\right) = 2(MN^2 + MQ^2).$$

D est vraie (identité du parallélogramme). A : la somme des poids est nulle, il n'y a pas de barycentre. B : $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QM} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QN} \neq \vec{0}$. C : $MQ^2 - PQ^2 = 4\,\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$, différent de $2\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{MQ}$ en général.

ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES DE SAFI · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année · ENSA Safi

Date : 23/07/2010

2010

Énoncé

Q1 La valeur de $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2^x}{\ln(x^2+1)}$ vaut :

A $+\infty$ B $-\infty$ C 1 D -1

Q2 La limite en $+\infty$ de la fonction f définie sur l'intervalle $\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ par $f(x)=\dfrac{-2x^3+3x}{(2x-1)^3}$ est :

A $+\infty$ B $-\infty$ C -1 D $-\dfrac{1}{4}$

Soit la fonction $f(x)=\dfrac{\cos 3x-\sin 3x}{\cos 3x+\sin 3x}$.

Q3.1 La période de $f(x)$ vaut :

A $\dfrac{2\pi}{3}$ B $\dfrac{\pi}{3}$ C $\dfrac{4\pi}{3}$ D π

Q3.2 La valeur de $f\left(x+\dfrac{\pi}{12}\right)$ est :

A $\tan 3x$ B $\operatorname{cotan} 6x$
C $-\tan 3x$ D $\tan 6x$

Q3.3 La dérivée de $f(x)$ est :

A $-\dfrac{6}{(\cos 3x+\sin 3x)^2}$
B $-\dfrac{6}{(\cos 3x)^2}$
C $\dfrac{-\tan 3x}{(\cos 3x+\sin 3x)^2}$
D $\dfrac{3}{(\cos 3x+\sin 3x)^2}$

Q4 L'équation $e^{2x}-2e^x-3=0$, $x\in\mathbb{R}$, admet pour ensemble solution :

A $S=\{\ln 3,\ln 2\}$ B $S=\{\ln 1,0\}$
C $S=\{\ln 3,2\}$ D $S=\{\ln 3\}$

Q5 L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $(e^x-1)(1-x)\geq 0$ est l'intervalle :

A $]0;+\infty[$ B $[1;2]$
C $]-\infty;1]$ D $[0;1]$

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$u_n=\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}\,dx.$

Q6.1 u_0+u_1 égale à :

A 1 B 0 C -1 D 2

Q6.2 Pour tout entier naturel n non nul u_n+u_{n+1} égale à :

A $\dfrac{1-e^{-n}}{n}$ B $\dfrac{1-e^{-2n}}{2n}$
C $\dfrac{2+e^{-n}}{n}$ D $\dfrac{1-e^{-n}}{2n}$

Q6.3 La valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

A $+\infty$ B 1 C 2 D 0

Q7 La valeur de $\displaystyle\int_0^2 (x+2)e^{-x}\,dx$ est :

A $5e^{-2}-3$ B $-5e^{-2}+1$
C $-5e^{-2}$ D $-5e^{-2}+3$

Q8 Soit f la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x)=3\ln x-2x+5$.
Dans le plan muni d'un repère, la tangente à la courbe représentative de la fonction f en son point d'abscisse 1 admet pour équation :

A $y=x+2$ B $y=-x+4$
C $y=3x+1$ D $y=x+3$

Q9 La valeur du déterminant $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \end{vmatrix}$ vaut :

A $(a+b+c)(2a-b)$
B $(a+b+c)^2$
C $(a+b+c)(2a-c)$
D $(a+b+c)^3$

Q10 Le nombre -3 est solution de l'équation :

A $\ln x=-\ln 3$ B $\ln(e^x)=-3$
C $e^{\ln x}=-3$ D $e^x=-3$

Q11 A et B sont deux événements indépendants et on sait que $p(A)=0{,}5$ et $p(B)=0{,}2$. La probabilité de l'événement $A\cup B$ est égale à :

A $0{,}1$
B $0{,}7$
C $0{,}6$
D on ne peut pas savoir

Q12 Dans un magasin, un bac contient des cahiers soldés. On sait que 50% des cahiers ont une reliure spirale et que 75% des cahiers sont à grands carreaux. Parmi les cahiers à grands carreaux, 40% ont une reliure spirale. Saïd choisit au hasard un cahier à reliure spirale. La probabilité qu'il soit à grands carreaux est égale à :

A $0{,}3$ B $0{,}6$ C $0{,}5$ D $0{,}75$

Q13 On note X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ (λ étant un nombre réel strictement positif). La probabilité de l'événement $[1\leq X\leq 3]$ est égale à :

A $e^{-\lambda}-e^{-3\lambda}$ B $e^{-3\lambda}-e^{-\lambda}$
C $\dfrac{e^{-\lambda}}{e^{-3\lambda}}$ D $\dfrac{e^{-3\lambda}}{e^{-\lambda}}$

Q14 L'équation différentielle $y'+y=e^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$, admet pour solution la fonction u définie par :

A $u(x)=(x-1)e^{-x}$
B $u(x)=xe^{-x}+1$
C $u(x)=e^{-x}$
D $u(x)=xe^{-x}$

Q15 Soit l'équation différentielle $y''-25y=0$, où y est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels. La fonction f, solution de l'équation différentielle précédente, qui vérifie les conditions $f(\pi)=-\sqrt{3}$ et $f'(\pi)=5$, est définie par :

A $\sqrt{3}\cos 5x-\sin 5x$
B $\cos 15x-\sin 5x$
C $\cos 5x+\sqrt{3}\sin 5x$
D $\sqrt{3}\cos 10x-\sin 10x$

Q16 La fonction f_k définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par $f_k=(x+k)e^{-x}$ où k est un nombre réel donné. La fonction f_k admet un maximum en :

A $x=1-k$ B $x=1+k$
C $x=1-2k$ D $x=-2k$

ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES DE SAFI · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année · ENSA Safi

Date : 23/07/2010

2010

Correction

Q1	Q2	Q3.1	Q3.2	Q3.3	Q4	Q5	Q6.1	Q6.2	Q6.3	Q7	Q8	Q9	Q10
A	D	B	C	A	D	D	A	A	D	D	A	D	B

Q11	Q12	Q13	Q14	Q15	Q16
C	B	A	AD	A	A

Q1 ✔ Réponse A

$2^x = e^{x\ln 2}$ l'emporte sur $\ln(x^2+1) \sim 2\ln x$: la limite est $+\infty$.

Q2 ✔ Réponse D

$$f(x) \sim \frac{-2x^3}{8x^3} = -\frac{1}{4}.$$

Q3.1 ✔ Réponse B

En divisant par $\cos 3x$: $f(x) = \dfrac{1-\tan 3x}{1+\tan 3x} = \tan\left(\dfrac{\pi}{4} - 3x\right)$, de période $\dfrac{\pi}{3}$.

Q3.2 ✔ Réponse C

$f\left(x+\frac{\pi}{12}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4} - 3x - \frac{\pi}{4}\right) = \tan(-3x) = -\tan 3x.$

Q3.3 ✔ Réponse A

Avec $c = \cos 3x$, $s = \sin 3x$:

$$f'(x) = \frac{-3(s+c)(c+s) - 3(c-s)(c-s)}{(c+s)^2} = \frac{-3\cdot 2}{(c+s)^2} = -\frac{6}{(\cos 3x + \sin 3x)^2}.$$

Q4 ✔ Réponse D

$(e^x-3)(e^x+1) = 0$ et $e^x > 0$: $e^x = 3$, $x = \ln 3$.

Q5 ✔ Réponse D

$e^x - 1$ a le signe de x, $1-x$ celui de $1-x$: le produit est ≥ 0 sur $[0;1]$.

Q6.1 ✔ Réponse A

$$u_0 + u_1 = \int_0^1 \frac{1+e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx = 1.$$

Q6.2 ✔ Réponse A

$$u_n + u_{n+1} = \int_0^1 \frac{e^{-nx}(1+e^{-x})}{1+e^{-x}}\,dx = \int_0^1 e^{-nx}\,dx = \frac{1-e^{-n}}{n}.$$

Q6.3 ✔ Réponse D

$$0 \leq u_n \leq \int_0^1 e^{-nx}\,dx = \frac{1-e^{-n}}{n} \to 0.$$

Q7 ✔ Réponse D

Une primitive de $(x+2)e^{-x}$ est $-(x+3)e^{-x}$:

$$\left[-(x+3)e^{-x}\right]_0^2 = -5e^{-2} + 3.$$

Q8 ✔ Réponse A

$f(1) = 3$ et $f'(x) = \dfrac{3}{x} - 2$, $f'(1) = 1$: $y = (x-1) + 3 = x + 2$.

Q9 ✔ Réponse D

Avec $s = a+b+c$ et $C_1 \leftarrow C_1 - C_3$, $C_2 \leftarrow C_2 - C_3$:

$$\begin{vmatrix} -s & 0 & 2a \\ 0 & -s & 2b \\ 0 & 0 & s \end{vmatrix} = (-s)(-s)(s) = s^3.$$

Q10 ✔ Réponse B

$\ln(e^x) = x$, donc $x = -3$. (A, C demandent $x > 0$; $e^x > 0$.)

Q11 ✔ Réponse C

$p(A \cup B) = 0{,}5 + 0{,}2 - 0{,}5 \times 0{,}2 = 0{,}6.$

Q12 ✔ Réponse B

$p(S \cap G) = 0{,}75 \times 0{,}4 = 0{,}3$ et $p_S(G) = \dfrac{0{,}3}{0{,}5} = 0{,}6.$

Q13 ✔ Réponse A

$$p(1 \leq X \leq 3) = \int_1^3 \lambda e^{-\lambda t}\,dt = e^{-\lambda} - e^{-3\lambda}.$$

Q14 ✔ Réponse AD

Les solutions sont $u(x) = (x+C)e^{-x}$: xe^{-x} ($C=0$) et $(x-1)e^{-x}$ ($C=-1$) conviennent toutes les deux.

Q15 ✔ Réponse A

Telle qu'imprimée, $y'' - 25y = 0$ a des solutions exponentielles $ae^{5x} + be^{-5x}$, et aucune proposition ne convient. Les propositions correspondent à $y'' + 25y = 0$ (coquille probable) : $f = a\cos 5x + b\sin 5x$, $f(\pi) = -a = -\sqrt{3}$ et $f'(\pi) = -5b = 5$, d'où $f(x) = \sqrt{3}\cos 5x - \sin 5x$.

Q16 ✔ Réponse A

$f_k'(x) = (1-x-k)e^{-x}$: positive puis négative, f_k admet un maximum en $x = 1-k$.

ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES DE MARRAKECH · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année · ENSA Marrakech

Session du 8 août 2011

2011 — Énoncé

Q1 Une seule des égalités suivantes est exacte :

A $\displaystyle\int_k^2 \ln\left(\frac{x-1}{x}\right)dx = -2\ln 2 + \ln(k-1)$ où $k \in]1;2[$

B $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^3 x\,dx = \frac{3\sqrt{3}}{11}$

C $\displaystyle\int_{-2}^{0}\left(|x+1| + \frac{4}{x-1}\right)dx = 1 - 4\ln 3$

D $\displaystyle\int_0^2 (x-2)e^{2x+1}\,dx = \frac{5}{4}e - \frac{13}{7}e^5$

Q2 Pour tout réel x, on pose $G(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$

A G est une fonction paire

B G est croissante sur $\left[0;\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$

C G est croissante sur $\left[\frac{1}{\sqrt{2}};+\infty\right[$

D $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = 1$

Q3 Une grandeur y décroît au cours du temps t selon la loi $y(t) = y_0 2^{-t}$, où y_0 désigne la valeur initiale en $t = 0$.
La valeur moyenne de y entre les instants 0 et T.

A $(1 - 2^{-T})$

B $T\ln 2$

C $\frac{y_0}{\ln 2}(1 - 2^{-T})$

D $\frac{y_0}{T\ln 2}(1 - 2^{-T})$

Q4 Soit la fonction $f(x) = \ln\left|e^x - e^{2x}\right|$

A La fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$

B La fonction f est strictement croissante sur $\left]0;\frac{1}{2}\right[$

C $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

D La droite d'équation $y = 3x$ est asymptote à la courbe C représentative de f quand $x \to +\infty$

Q5 En quel(s) points(s) la courbe $y = \sqrt{2x} + \sqrt{\frac{2}{x}}$ admet-elle une tangente parallèle à l'axe des abscisses ?

A aucun B $(2;3)$ C $(1;2\sqrt{2})$ D $(8;6)$

Q6 Soit la fonction $f(x) = \frac{x^2}{x-1}e^{\frac{1}{x}}$

A La droite d'équation $y = x + 2$ est asymptote oblique à la courbe C représentative de f quand $x \to +\infty$

B La fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$.

C f est impaire

D La fonction f est strictement croissante sur $]1;+\infty[$.

Q7 La contraposée de la proposition suivante :
$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x > y \Longrightarrow f(x) = f(y)$

A $\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ f(x) = f(y)$ *ou* $x \le y$

B $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ f(x) \neq f(y) \Longrightarrow x \le y$

C $\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ f(x) = f(y)$ *et* $x \le y$

D $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x > y \Longrightarrow f(x) \neq f(y)$

Q8 La négation de la proposition suivante :
$\forall a \in \mathbb{R},\ \forall b \in \mathbb{R},\ a \le b \Longrightarrow f(a) \ge f(b)$

A $\forall a \in \mathbb{R},\ \forall b \in \mathbb{R}/(a \le b \Longrightarrow f(a) \ge f(b)$

B $\exists a \in \mathbb{R},\ \exists b \in \mathbb{R}/(a \le b$ *ou* $f(a) < f(b)$

C $\exists a \in \mathbb{R},\ \exists b \in \mathbb{R}/(a \le b$ *et* $f(a) < f(b)$

D $\exists a \in \mathbb{R},\ \exists b \in \mathbb{R}/(a > b$ *et* $f(a) < f(b)$

Q9 On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(1+u_n) \end{cases}$

A $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \le 0$

B la suite (u_n) est strictement croissante

C la suite (u_n) est décroissante

D $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 1$

Q10 L'ensemble S des solutions réelles du système suivant : $\begin{cases} 2^{\frac{1}{x}}2^{\frac{1}{y}} = 32 \\ 2^x 2^y = \sqrt[6]{32} \end{cases}$

A $S = \left\{\left(\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right);\left(\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right)\right\}$

B $S = \left\{\left(\frac{1}{5};\frac{1}{3}\right)\right\}$

C $S = \left\{\left(\frac{1}{5};\frac{2}{3}\right);\left(\frac{3}{4};\frac{1}{2}\right)\right\}$

D $S = \left\{\left(\frac{2}{3};\frac{1}{2}\right);\left(\frac{1}{4};\frac{3}{5}\right)\right\}$

Q11 En effectuant une division, déterminer les paramètres a et b pour que le polynôme $A = x^3 + ax + b$ soit divisible par $B = x^2 - 3x + 2$

A $a = 4$ et $b = 2$

B $a = 7$ et $b = 2$

C $a = 6$ et $b = -3$

D $a = -7$ et $b = 6$

Q12 Deux tireurs A et B font feu simultanément sur une cible. La probabilité pour A de toucher la cible est estimée à $\frac{4}{5}$; la probabilité pour B est de $\frac{3}{4}$.
La probabilité que la cible soit atteinte est :

A $\frac{7}{20}$ B $\frac{19}{20}$ C $\frac{12}{20}$ D $\frac{1}{20}$

Q13 Une urne contient y boules dont 3 sont blanches, les autres étant rouges. A l'occasion du tirage, sans remise, de deux boules, la probabilité d'obtenir une boule blanche puis une boule rouge est égale à $\frac{1}{4}$. Calculer y :

A $y = 8$

B $y = 12$

C $y = 4$ ou $y = 9$

D $y = 12$ ou $y = 8$

Q14 De combien de manières différentes un professeur peut-il choisir un ou plusieurs élèves parmi 6 ?

A 55 B 6 C 63 D 48

Q15 Le prix d'un article a subi trois baisses successives de 20%. De quel pourcentage ce prix a-t-il diminué au total ?

A 60% B $48{,}8\%$ C $44{,}6\%$ D $52{,}5\%$

ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES DE MARRAKECH · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année · ENSA Marrakech

Session du 8 août 2011

2011 — Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14	Q15
C	B	D	B	C	A	B	C	C	A	D	B	C	C	B

Q1 ✔ Réponse C

- C : $\int_{-2}^{0} |x+1|\,dx = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$ (deux triangles) et $\int_{-2}^{0} \frac{4}{x-1}\,dx = 4\left[\ln|x-1|\right]_{-2}^{0} = 4(0-\ln 3)$. Total : $1-4\ln 3$. **Vraie.**
- B : $\cos^3 x = \cos x(1-\sin^2 x)$, primitive $\sin x - \frac{\sin^3 x}{3}$; l'intégrale vaut $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{8} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$, pas $\frac{3\sqrt{3}}{11}$.
- D : une primitive est $\frac{(2x-5)e^{2x+1}}{4}$, d'où $\frac{5}{4}e - \frac{1}{4}e^5$.
- A : une primitive est $(x-1)\ln(x-1) - x\ln x + 1$, d'où $-2\ln 2 + k\ln k - (k-1)\ln(k-1)$, différent de $-2\ln 2 + \ln(k-1)$ (par exemple pour $k=\frac{3}{2}$).

Q2 ✔ Réponse B

Avec $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$:
$G'(x) = 2f(2x) - f(x) = \frac{2}{\sqrt{16x^4+4x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$.
$G'(x) \geq 0 \iff 4(x^4+x^2+1) \geq 16x^4 + 4x^2 + 1 \iff 3 \geq 12x^4 \iff |x| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$.
Donc G est croissante sur $\left[0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ (B) et décroissante ensuite (C fausse).
A : f est paire, donc G est impaire (et non nulle). D : pour $t \geq x > 0$, $f(t) \leq \frac{1}{t^2}$, donc $0 \leq G(x) \leq \int_x^{2x} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{2x} \to 0$.

Q3 ✔ Réponse D

$2^{-t} = e^{-t\ln 2}$ a pour primitive $-\frac{2^{-t}}{\ln 2}$.
Valeur moyenne :

$$\frac{1}{T}\int_0^T y_0 2^{-t}\,dt = \frac{y_0}{T}\cdot\frac{1-2^{-T}}{\ln 2} = \frac{y_0}{T\ln 2}\left(1-2^{-T}\right).$$

C est l'intégrale elle-même, sans la division par T.

Q4 ✔ Réponse B

f est définie pour $x \neq 0$ et $f(x) = x + \ln|1-e^x|$.
- Sur $]0;+\infty[$: $f(x) = x + \ln(e^x - 1)$, $f'(x) = 1 + \frac{e^x}{e^x-1} > 0$: B est vraie.
- Sur $]-\infty;0[$: $f'(x) = 1 - \frac{e^x}{1-e^x} = \frac{1-2e^x}{1-e^x}$, positive pour $x < -\ln 2$: A est fausse.
- C : $f(x) = x + \ln(1-e^x) \to -\infty$.
- D : $f(x) = 2x + \ln(1-e^{-x})$, l'asymptote est $y = 2x$.

Q5 ✔ Réponse C

Pour $x > 0$: $y = \sqrt{2}\left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right)$, donc

$$y' = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x\sqrt{x}}\right) = \frac{\sqrt{2}\,(x-1)}{2x\sqrt{x}}.$$

$y' = 0 \iff x = 1$, et $y(1) = \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$: point $(1; 2\sqrt{2})$.

Q6 ✔ Réponse A

- A : $\frac{x^2}{x-1} = x+1+\frac{1}{x-1}$ et $e^{\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$. Le produit vaut $x+1+1+o(1) = x+2+o(1)$: $y = x+2$ est asymptote. **Vraie.**
- Dérivée : $f'(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}\left(x^2-3x+1\right)}{(x-1)^2}$.
  Sur $]-\infty;0[$, $x^2-3x+1 > 0$: f est croissante (B fausse). Sur $\left]1; \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right[$, $x^2-3x+1 < 0$: f décroît (D fausse).
- C : f n'est pas définie en 1 mais l'est en -1 : elle ne peut pas être impaire.

Q7 ✔ Réponse B

La contraposée de « $P \Longrightarrow Q$ » est « non $Q \Longrightarrow$ non P » ; les quantificateurs ne changent pas. Ici : $\forall x,\ \forall y,\ f(x) \neq f(y) \Longrightarrow x \leq y$.

Q8 ✔ Réponse C

Les $\forall$ deviennent $\exists$, et la négation de « $P \Longrightarrow Q$ » est « P et non Q ». La négation de $f(a) \geq f(b)$ est $f(a) < f(b)$. On obtient : $\exists a,\ \exists b,\ a \leq b$ et $f(a) < f(b)$.

Q9 ✔ Réponse C

Par récurrence, $u_n > 0$ pour tout n (si $u_n > 0$, alors $1+u_n > 1$ et $\ln(1+u_n) > 0$).
Pour $u > 0$, $\ln(1+u) < u$ (la fonction $u \mapsto u - \ln(1+u)$ est nulle en 0 et croissante). Donc $u_{n+1} < u_n$: la suite est (strictement) décroissante. A est fausse ($u_0 = 1$), D aussi ($u_1 = \ln 2 < 1$).

Q10 ✔ Réponse A

$32 = 2^5$ et $\sqrt[6]{32} = 2^{\frac{5}{6}}$. Le système équivaut à $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} = 5$ et $x+y = \frac{5}{6}$.
$\frac{1}{x}+\frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy}$, donc $xy = \frac{5/6}{5} = \frac{1}{6}$. x et y sont les racines de $t^2 - \frac{5}{6}t + \frac{1}{6} = 0$, soit $6t^2 - 5t + 1 = 0$: $t = \frac{1}{2}$ ou $t = \frac{1}{3}$.
$S = \left\{\left(\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right);\left(\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right)\right\}$.

Q11 ✔ Réponse D

$B = (x-1)(x-2)$: A est divisible par B si et seulement si $A(1) = 0$ et $A(2) = 0$, soit $1+a+b = 0$ et $8+2a+b = 0$. Par différence $7+a = 0$: $a = -7$, puis $b = 6$.
Vérification : $x^3 - 7x + 6 = (x-1)(x-2)(x+3)$.

Q12 ✔ Réponse B

Les deux tirs sont indépendants. La cible n'est pas atteinte si les deux tireurs la manquent : $\frac{1}{5}\times\frac{1}{4} = \frac{1}{20}$. Donc $P(\text{cible atteinte}) = 1 - \frac{1}{20} = \frac{19}{20}$.

Q13 ✔ Réponse C

$P(\text{blanche puis rouge}) = \frac{3}{y}\times\frac{y-3}{y-1} = \frac{1}{4} \iff 12(y-3) = y(y-1) \iff y^2 - 13y + 36 = 0 \iff (y-4)(y-9) = 0$.
Vérification : $y = 4$ donne $\frac{3}{4}\times\frac{1}{3} = \frac{1}{4}$; $y = 9$ donne $\frac{3}{9}\times\frac{6}{8} = \frac{1}{4}$.

Q14 ✔ Réponse C

Un ensemble de 6 élèves a $2^6 = 64$ sous-ensembles ; on retire l'ensemble vide (au moins un élève) : $64 - 1 = 63$.

Q15 ✔ Réponse B

Chaque baisse multiplie le prix par $0{,}8$: au total $0{,}8^3 = 0{,}512$. Le prix a diminué de $1 - 0{,}512 = 0{,}488$, soit $48{,}8\ \%$.

ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES DE MARRAKECH · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'entrée en 1re année du cycle préparatoire · ENSA Marrakech

Année 2010–2011

2010 Énoncé

Q1 Soit f la fonction définie, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, par : $f(x) = \dfrac{x \sin x}{1 - \cos x}$. Alors :

- A $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$
- B $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$
- C $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 2$
- D $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -1$

Q2 Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \arctan\left(\dfrac{1}{2x^2}\right) - \arctan\left(\dfrac{x}{x+1}\right) + \arctan\left(\dfrac{x-1}{x}\right)$

- A f est constante égale à 1.
- B f est constante égale à 0.
- C f n'est pas constante.
- D $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{\pi}{4}$

Q3 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n}$, on a alors :

- A $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$
- B $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ln(2)$
- C $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
- D $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$

Q4 Soit $(u_n)_n$ la suite définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n^2}$

- A La suite $(u_n)_n$ est croissante et tend vers $+\infty$.
- B La suite $(u_n)_n$ est décroissante et tend vers 0.
- C La suite $(u_n)_n$ est convergente vers 1.
- D $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq \dfrac{1}{2}$.

Q5 On considère l'équation différentielle $(E) : y'' - (1+m)y' + my = 0$.

- A Si $m = 1$ les solutions de (E) sont de la forme $y(t) = \alpha e^t + \beta e^{-t}$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.
- B Si $m \neq 1$ les solutions de (E) sont de la forme $y(t) = \alpha \cos t + \beta \sin(mt)$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.
- C Si $m = 1$ les solutions de (E) sont de la forme $y(t) = (\alpha t + \beta)e^t$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.
- D Si $m = 0$ les solutions de (E) sont de la forme $y(t) = (\alpha t + \beta)e^t$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

Q6 Soit $z = \left(1 + i\sqrt{3}\right)^5 + \left(1 - i\sqrt{3}\right)^5$ alors

- A $z = -32$
- B $z = 16e^{i\frac{5\pi}{3}}$
- C $z = 32$
- D $z = 64e^{i\frac{5\pi}{6}}$

Q7 On note $z_1, \ldots, z_n$ les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $z^n = 1$. On pose $S = z_1 + z_2 + \cdots + z_n$ et $P = z_1 z_2 \ldots z_n$, alors :

- A $S = 0$ et $P = (-1)^{n+1}$
- B $S = 0$ et $P = 1$
- C $S = 1$ et $P = (-1)^n$
- D $S = 1$ et $P = 0$

Q8 Pour $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, on pose $I_{n,m} = \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(nt)\cos(mt)\, dt$.

- A Si $m = n$, $I_{n,m} = \pi$.
- B Si $m \neq n$, $I_{n,m} = 2\pi$.
- C Si $m \neq n$, $I_{n,m} = 0$.
- D Si $m = n$, $I_{n,m} = 2\pi$.

Q9 Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $[a, b]$. Alors :

- A $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\, dt = b - a.$
- B $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\, dt = +\infty.$
- C $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\, dt = 0.$
- D La suite de terme général $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\, dt$ n'a pas de limite lorsque $n \to +\infty$.

Q10 Parmi les ensembles suivants lequel est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

- A $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 - y^2 = 0\}$
- B $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x \geq 0\}$
- C $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x - y + z = 1\}$
- D $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x - y + z = 0\}$

Q11 Soit a, b et c des réels et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors :

- A $A^n = \begin{pmatrix} a^n & b^n \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$
- B $A^n = \begin{pmatrix} a^n & nb^n \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$
- C $A^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$
- D $A^n = \begin{pmatrix} a^n & a^n b^n \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$

Q12 Deux augmentations successives de 10% du prix d'un produit donnent une augmentation de :

- A 20%
- B 12,1%
- C 21%
- D 10%

Q13 Une augmentation de 10% puis une baisse du prix d'un produit de 10% donne :

- A Un prix inchangé.
- B Une baisse de 1%.
- C Une augmentation de 1%.
- D Une variation de 10%.

Q14 Soit $A(2, 1)$, $B(-1, 2)$ et $M(3, 4)$ des points du plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Alors la distance d de M à la droite (AB) vaut :

- A $d = \sqrt{10}$
- B $d = 5$
- C $d = 10$
- D $d = \sqrt{5}$

Q15 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = \left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les points $A(1, 1, 0)$, $B(1, 2, 1)$, $C(3, -1, 2)$ alors :

- A A, B et C sont alignés
- B les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.
- C L'équation du plan contenant les points A, B et C est : $2x + y - z - 3 = 0$
- D Les droites (OA) et (BC) sont parallèles

ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES DE MARRAKECH · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'entrée en 1re année du cycle préparatoire · ENSA Marrakech

Année 2010–2011

2010 — Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14	Q15
C	B	B	B	C	C	A	AC	C	D	C	C	B	A	BC

Q1 ✔ Réponse C

$x \sin x \sim x^2$ et $1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$: la limite vaut 2.

Q2 ✔ Réponse B

Pour $x > 0$:
$\arctan \dfrac{x}{x+1} - \arctan \dfrac{x-1}{x} = \arctan \dfrac{\frac{x}{x+1} - \frac{x-1}{x}}{1 + \frac{x-1}{x+1}} = \arctan \dfrac{1}{2x^2}$,
donc $f = 0$. (En $+\infty$: $0 - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 0$.)

Q3 ✔ Réponse B

$u_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{1 + k/n} \to \int_0^1 \dfrac{dx}{1+x} = \ln 2$ (somme de Riemann).

Q4 ✔ Réponse B

$u_n > 0$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{1+u_n^2} < 1$: décroissante minorée, de limite $\ell = \dfrac{\ell}{1+\ell^2}$, soit $\ell = 0$. ($u_2 = 0{,}4 < \frac{1}{2}$.)

Q5 ✔ Réponse C

Équation caractéristique $r^2 - (1+m)r + m = (r-1)(r-m)$.
Pour $m = 1$, racine double 1 : $y = (\alpha t + \beta)e^t$. (Pour $m = 0$: $y = \alpha e^t + \beta$.)

Q6 ✔ Réponse C

$1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\pi/3}$, donc $z = 2\ \mathrm{Re}\left(32e^{5i\pi/3}\right) = 64 \cos \dfrac{5\pi}{3} = 32$.

Q7 ✔ Réponse A

Pour $n \geq 2$, les racines de $z^n - 1$ ont pour somme 0 (coefficient de z^{n-1} nul) et pour produit $(-1)^n \times (-1) = (-1)^{n+1}$.

Q8 ✔ Réponse AC

$\cos(nt)\cos(mt) = \frac{1}{2}\left[\cos((n+m)t) + \cos((n-m)t)\right]$. Si $m \neq n$: $I = 0$. Si $m = n \neq 0$: $I = \pi$ (2π seulement si $m = n = 0$).

Q9 ✔ Réponse C

Par parties,
$\displaystyle\int f(t)\cos(nt)\,dt = \left[\frac{f(t)\sin(nt)}{n}\right] - \frac{1}{n}\int f'(t)\sin(nt)\,dt$, qui est majoré par $\dfrac{K}{n} \to 0$ (f de classe C^1). (Les bornes 0, 2π du sujet sont à lire a, b.)

Q10 ✔ Réponse D

$2x - y + z = 0$ est un plan vectoriel. (A n'est pas stable par somme, B pas par $\lambda < 0$, C ne contient pas 0.)

Q11 ✔ Réponse C

$A = aI + bN$ avec $N^2 = 0$ et $IN = NI$: binôme, $A^n = a^n I + n a^{n-1} b N$.

Q12 ✔ Réponse C

$1{,}1^2 = 1{,}21$: augmentation de 21%.

Q13 ✔ Réponse B

$1{,}1 \times 0{,}9 = 0{,}99$: baisse de 1%.

Q14 ✔ Réponse A

$(AB) : x + 3y - 5 = 0$. $d = \dfrac{|3 + 12 - 5|}{\sqrt{10}} = \dfrac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$.

Q15 ✔ Réponse BC

$\overrightarrow{AB}(0,1,1)$, $\overrightarrow{AC}(2,-2,2)$: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, droites perpendiculaires. Le plan $2x + y - z - 3 = 0$ contient A, B et C (vérification directe) : C est vraie aussi.

ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES DE MARRAKECH · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'entrée en 1re année du cycle préparatoire · ENSA Marrakech

Session du 24 juillet 2009

2009 — Énoncé

Q1

A $\forall n \in \mathbb{N}^* : n(n+1)(n+2)(n+3)$ est divisible par 22

B $\forall n \in \mathbb{N}^* : n(n+1)(n+2)(n+3)$ n'est pas divisible par 48

C $\forall n \in \mathbb{N}^* : n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$ est divisible par 120

D $\forall n \in \mathbb{N}^* : n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$ n'est pas divisible par 120

Q2 Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = e^{-x}\ln(1+e^x)$

A h est solution de l'équation différentielle $E : y' - y = \dfrac{1}{1+e^x}$

B Si $f - h$ est solution de E alors f est solution de E

C La solution générale de $y' + y = 0$ est $y = ke^x$, $k \in \mathbb{R}$

D La fonction f définie par $f(x) = e^{-x}\ln(1+e^x) + 2e^{-x}$ est solution de E

Q3 Dans une classe, les garçons représentent le quart de l'effectif. Une fille sur trois a eu son permis du premier coup, alors que seulement un garçon sur dix l'a eu du premier coup. On interroge un élève (garçon ou fille) au hasard. La probabilité qu'il ait eu son permis du premier coup est égale à : (résultats arrondis à 10^{-3} près)

A 0,043 B 0,275 C 0,217 D 0,033

Q4 Soit le complexe

$$\omega = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} + i\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

A ω est racine carrée de $\dfrac{1}{\sqrt{2}}(i-1)$

B $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

C ω^2 est solution de l'équation $z^2 - \sqrt{2}z + 1 = 0$

D $\omega^4 = i$

Q5 Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct, on considère les points A, B, C, D d'affixes respectives $z_A = 1+2i$, $z_B = 1+\sqrt{3}+i$, $z_C = 1+\sqrt{3}-i$, $z_D = 1-2i$

A $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{DC}$

B Le triangle ABD est rectangle

C Le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme

D Les points A, B, C, D ne sont pas sur un même cercle

Q6 La limite de la fonction $g(x) = \dfrac{\sin^9 x + \cos^6 x + 1}{e^{-x}+1}$ quand x tend vers $+\infty$ vaut :

A 0 B $+\infty$ C n'existe pas D 1

Q7 Soit la fonction f de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \cos(x)e^{\sin(x)}$

A La fonction f n'est pas périodique

B On a $f'(x) = \left(\cos^2(x) + \sin(x)\right)e^{\sin(x)}$

C Une primitive de f est $F(x) = \sin(x)e^{\sin(x)} - 1$

D L'aire du domaine plan délimité par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2}$ est différente de $e+1$ unités d'aire.

Q8 Indiquer la phrase qui vous semble correcte parmi les phrases suivantes :

A Le produit d'un rationnel et d'un irrationnel est un irrationnel

B La somme de deux nombres irrationnels est irrationnelle

C Le produit de deux nombres irrationnels est irrationnel

D La somme d'un nombre rationnel et d'un irrationnel est irrationnelle

L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$. On considère les points : $A(2;1;-1)$, $B(-1;2;4)$, $C(0;-2;3)$, $D(1;1;-2)$ et le plan P d'équation $x - 2y + z + 1 = 0$.

Q9

A Les points A, B et C définissent un plan

B La droite (AC) est incluse dans le plan P

C Une équation cartésienne du plan (ABD) est : $x + 8y + z - 11 = 0$

D Une représentation paramétrique de la droite (AC) est : $\begin{cases} x = 2k \\ y = 2 + 3k \\ z = 3 - 4k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$

Q10

A Les droites (AB) et (CD) sont orthogonales

B La distance du point C au plan P est égale à $4\sqrt{6}$

C La sphère de centre D et de rayon $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ n'est pas tangente au plan P.

D Le point $E\left(-\dfrac{4}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{5}{3}\right)$ est le projeté orthogonal du point C sur le plan P

Q11 On considère les suites (x_n) et (y_n) définies pour tout entier naturel n non nul par :

$$x_n = \int_0^1 t^n\cos(t)\,dt \text{ et } y_n = \int_0^1 t^n\sin(t)\,dt$$

A La suite (x_n) converge vers $\ell > 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$

B Pour tout entier naturel n non nul, $x_{n+1} = (n+1)y_n + \sin(1)$

C Si on admet que, pour tout entier naturel n non nul, $y_{n+1} = (n+1)x_n - \cos(1)$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} nx_n = \cos(1)$

D Si on admet que, pour tout entier naturel n non nul, $y_{n+1} = (n+1)x_n - \cos(1)$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} ny_n = \cos(1)$

Q12 Soient les deux intégrales définies par : $I = \int_0^\pi e^x\sin(x)\,dx$ et $J = \int_0^\pi e^x\cos(x)\,dx$

A On a $I = -2J$

B On a $I = J + e^\pi + 1$

C On a $I = -\dfrac{1}{2}(1+e^\pi)$

D On a $J = 1 + e^\pi$

Q13

A Si $x = \left[\ln\left(e^{\sqrt{2}}\right)\right]^2 e^{-\ln\left(\frac{1}{2}\right)}$ alors $x = 4$

B Si $x = \ln\left(\dfrac{3^2}{2^3}\right) - 4\ln\left(\sqrt{3}\right)$ alors $x = \ln 8$

C Si $x = \dfrac{\left(\sqrt[4]{4}\right)^2}{\left(\sqrt[4]{3\sqrt{3}}\right)^2\sqrt{\sqrt{3}}}$ alors $x = \dfrac{2}{5}$

D Si $\ln(2x-1) = \ln(x-1)$ alors $x = 0$

Q14 Soit f la fonction définie sur $[0,3]$ par

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \\ -2 & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 4 & \text{si } 2 < x \leq 3 \end{cases} \quad \text{et}$$

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

A $\int_0^3 f(t)\,dt = 4$

B $F(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 3 - 2x & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 9 + 4x & \text{si } 2 < x \leq 3 \end{cases}$

C F est continue sur $[0,3]$.

D F est dérivable sur $[0,3]$.

Q15 Soient les suites numériques (u_n) et (v_n) définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $u_0 = 1$, $u_{n+1} = \dfrac{5u_n + 3}{u_n + 3}$ et $v_n = \dfrac{u_n - 3}{u_n + 1}$

A La suite (u_n) n'est pas bornée

B La suite (v_n) est décroissante

C Pour tout entier $n > 0$, $u_n = \dfrac{3 - 3^n}{1 - 3^n}$

D La suite (u_n) est convergente.

Q16 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = x\sin\left(\dfrac{2}{x}\right)$

A On a $f(x) = 0$ si et seulement s'il existe un entier relatif non nul k tel que $x = \dfrac{1}{k\pi}$

B On a $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$

C On a $f\left(\dfrac{4}{\pi}\right) = \dfrac{4}{\pi}$

D On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$

ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES DE MARRAKECH · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'entrée en 1re année du cycle préparatoire · ENSA Marrakech

Session du 24 juillet 2009

2009 — Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14
C	AD	B	A	AB	C	D	D	A	D	C	B	A	C

Q15	Q16
D	CD

Q1 ✔ Réponse C

Un produit de 5 entiers consécutifs est divisible par $5! = 120$. (A : $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$; B : $5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 1680 = 48 \times 35$.)

Q2 ✔ Réponse AD

$h'(x) = -h(x) + \dfrac{1}{1+e^x}$: h vérifie $y' + y = \dfrac{1}{1+e^x}$. L'énoncé écrit $y' - y$ (coquille probable). Avec $y' + y$: h est solution (A) et $f = h + 2e^{-x}$ aussi, car $2e^{-x}$ est solution de $y' + y = 0$ (D). La solution générale de $y' + y = 0$ est ke^{-x} (C faux).

Q3 ✔ Réponse B

$P = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{10} + \dfrac{3}{4} \times \dfrac{1}{3} = 0{,}025 + 0{,}25 = 0{,}275.$

Q4 ✔ Réponse A

$\omega = \cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8} = e^{3i\pi/8}$, donc $\omega^2 = e^{3i\pi/4} = \dfrac{i-1}{\sqrt{2}}$.

($\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$; $\omega^4 = -i$; les racines de $z^2 - \sqrt{2}z + 1$ sont $e^{\pm i\pi/4}$.)

Q5 ✔ Réponse AB

$\overrightarrow{AB}(\sqrt{3}, -1)$ et $\overrightarrow{DC}(\sqrt{3}, 1)$: A vraie, C fausse.
$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} = (-\sqrt{3})(-\sqrt{3}) + 1 \times (-3) = 0$: rectangle en B. Les quatre points sont à distance 2 de $\Omega(1, 0)$: D fausse.

Q6 ✔ Réponse C

Le dénominateur tend vers 1 mais $\sin^9 x + \cos^6 x$ oscille : pas de limite.

Q7 ✔ Réponse D

f est 2π-périodique. $f'(x) = (\cos^2 x - \sin x)e^{\sin x}$; une primitive est $e^{\sin x}$. Sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f \geq 0$ et l'aire vaut $e - 1 \neq e + 1$.

Q8 ✔ Réponse D

Si $r + x = q$ rationnel, alors $x = q - r$ serait rationnel. (A : $0 \times \sqrt{2} = 0$; B : $\sqrt{2} + (-\sqrt{2})$; C : $\sqrt{2} \times \sqrt{2}$.)

Q9 ✔ Réponse A

$\overrightarrow{AB}(-3, 1, 5)$ et $\overrightarrow{AC}(-2, -3, 4)$ ne sont pas colinéaires. $C \notin P$ ($0 + 4 + 3 + 1 \neq 0$), A ne vérifie pas l'équation de C, et $(0, 2, 3)$ n'est pas C (D fausse).

Q10 ✔ Réponse D

$d(C, P) = \dfrac{8}{\sqrt{6}} = \dfrac{4\sqrt{6}}{3}$; le projeté est $C - \frac{4}{3}(1, -2, 1) = \left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right)$. $d(D, P) = \dfrac{2}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$: la sphère est tangente (C fausse). $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -25 \neq 0$.

Q11 ✔ Réponse C

$0 \leq x_n \leq \frac{1}{n+1}$: $x_n \to 0$ (A faux). Par parties $x_{n+1} = \sin 1 - (n+1)y_n$ (B faux de signe). Avec la relation donnée : $nx_n = \dfrac{n}{n+1}(y_{n+1} + \cos 1) \to \cos 1$, car $y_n \to 0$. ($ny_n \to \sin 1$.)

Q12 ✔ Réponse B

$J + iI = \displaystyle\int_0^\pi e^{(1+i)x}dx = \frac{-e^\pi - 1}{1+i}$, d'où $I = \dfrac{1+e^\pi}{2}$ et $J = -\dfrac{1+e^\pi}{2}$. Donc $I = J + e^\pi + 1$.

Q13 ✔ Réponse A

$\left(\sqrt{2}\right)^2 \times 2 = 4$. (B donne $-\ln 8$; C donne $\frac{2}{3}$; D n'a pas de solution car il faut $x > 1$.)

Q14 ✔ Réponse C

$\displaystyle\int_0^3 f = 1 - 2 + 4 = 3$. $F(x) = 4x - 9$ sur $]2, 3]$ (B faux). F est continue mais pas dérivable en 1 et 2.

Q15 ✔ Réponse D

$v_{n+1} = \dfrac{1}{3}v_n$, $v_0 = -1$: $v_n = -3^{-n}$ croissante,

$u_n = \dfrac{3 + v_n}{1 - v_n} = \dfrac{3^{n+1} - 1}{3^n + 1} \to 3.$

Q16 ✔ Réponse CD

$f\left(\frac{4}{\pi}\right) = \frac{4}{\pi}\sin\frac{\pi}{2} = \frac{4}{\pi}$. En $+\infty$, $\sin\frac{2}{x} \sim \frac{2}{x}$: $f \to 2$.
$f = 0 \iff x = \frac{2}{k\pi}$ (A faux) et $f \to 0$ en 0 (B faux).

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE CHIMIE DE KÉNITRA · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année · ENSCK Maroc

Session du 25 juillet 2025 · Cocher la bonne réponse parmi a, b, c, d

2025 Énoncé

Q41 Soit z un nombre complexe tel que $|z| = 1$. $\mathrm{Re}\left(\dfrac{1+iz}{1-iz}\right) =$

A 1 B 0 C $\mathrm{Re}(z)$ D $1 - \mathrm{Re}(z)$

Q42 Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. L'ensemble des points d'affixe z tels que $z + \dfrac{1}{z} \in \mathbb{R}$ est

A l'axe des abscisses privé du point O
B l'axe des abscisses privé du point $A(1)$ union le cercle de centre O et de rayon 1
C le cercle de centre O et de rayon 1 privé des points O et $A(1)$
D l'axe des abscisses privé du point O union le cercle de centre O et de rayon 1

Q43 Soit $a \in]0, +\infty[$ et f la fonction définie par $f(x) = 1 + x \ln\sqrt{1 + \dfrac{a}{x}}$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) =$

A $1 + \dfrac{a}{2}$ B $1 + a$ C $+\infty$ D 0

Q44 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) e^x \, dx =$

A $\dfrac{1 + e^{\frac{\pi}{2}}}{2}$ B $\dfrac{1 - e^{\frac{\pi}{2}}}{2}$
C $1 + e^{\frac{\pi}{2}}$ D $1 - e^{\frac{\pi}{2}}$

Q45 Soit la fonction donnée par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

A f n'est pas continue en 0
B f n'est pas dérivable en 0
C f' n'est pas continue en 0
D f' est continue en 0

Q46 Dans l'espace affine rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ on considère la sphère S d'équation cartésienne $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + y + 1 = 0$ et le plan P d'équation $\sqrt{2}x - y - z - \alpha = 0$. P est tangent à S si

A $\alpha = -\dfrac{1}{2} + \sqrt{2}$ ou $\alpha = \dfrac{3}{2} + \sqrt{2}$
B $\alpha = \dfrac{1}{2} + \sqrt{2}$ ou $\alpha = -\dfrac{3}{2} + \sqrt{2}$
C $\alpha = -\dfrac{1}{2} + \sqrt{2}$ ou $\alpha = -\dfrac{3}{2} + \sqrt{2}$
D $\alpha = -\dfrac{1}{2} - \sqrt{2}$ ou $\alpha = \dfrac{3}{2} + \sqrt{2}$

Q47 $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x(x^2+1)} =$

A $\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{4}{5}\right)$ B $\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{8}{5}\right)$
C $\ln\left(\dfrac{8}{5}\right)$ D $\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{8}{\sqrt{5}}\right)$

Q48 Soit $A_n = (1-x)^n(1+x)^n$ et $B_n = \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$ avec $x \in]0, 1[$.

A $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = e^{-x}$
B $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = 1$
C $\lim\limits_{n\to+\infty} B_n = e^{-x}$
D $\lim\limits_{n\to+\infty} B_n = 1$

Soit l'équation $(E_m) : z^2 - 4z + m = 0$, $m \in \mathbb{R}$ admettant deux solutions complexes non réelles. On note z_0 l'une de ses deux racines. Soit $\alpha = 2 + i$.

Q49

A $\alpha^5 = 38 + 41i$
B $m \leq 4$
C $m = |z_0|^2$
D $\dfrac{2}{z_0}$ est une racine de (E_m)

Q50 Si α est racine de (E_m) alors $m =$

A $(2+i)^2$ B $\mathrm{Im}(2+i)^2$ C 5 D $\sqrt{5}$

Q51 Le linéarisé de l'expression $\sin^2 x \cos 3x$ est

A $\dfrac{1}{2}\cos 3x - \dfrac{1}{4}\cos 5x + \dfrac{1}{4}\cos x$
B $\dfrac{1}{2}\cos 3x + \dfrac{1}{4}\cos 5x + \dfrac{1}{4}\cos x$
C $\dfrac{1}{2}\cos 3x + \dfrac{1}{4}\cos 5x - \dfrac{1}{4}\cos x$
D $\dfrac{1}{2}\cos 3x - \dfrac{1}{4}\cos 5x - \dfrac{1}{4}\cos x$

On considère la suite numérique (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{2}{u_n}\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Q52

A (u_n) est croissante
B (u_n) est décroissante
C (u_n) est minorée par 2
D $u_n \geq 2\ \forall n \in \mathbb{N}$

Q53 Posons $v_n = u_n - \sqrt{2}$. $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$

A $+\infty$ B 0 C $\sqrt{2}$ D $-\sqrt{2}$

Q54 Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x\ln x + \dfrac{1}{x}$

A $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -\infty$
B $f'(x) = \ln x + 1 + \dfrac{1}{x^2}\ \forall x \in]0, +\infty[$
C $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote oblique en $+\infty$
D La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $x = 1$ est horizontale

Q55 On considère les deux suites $(u_n)_{n\geq0}$ et $(v_n)_{n\geq0}$ définies par $u_0 = 9$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ et $v_n = \ln u_n\ \forall n \in \mathbb{N}$. On note $S = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ et $P = u_0 u_1 \ldots u_n$.

A (v_n) est une suite arithmétique de raison $-\ln 3$
B $\forall n \in \mathbb{N}\ v_n = \dfrac{1}{2^n}\ln 3$
C $\forall n \in \mathbb{N}\ S = 4\left(1 - \dfrac{1}{2^{n+1}}\right)\ln 3$
D $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

Q56 Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé on considère la transformation f qui à tout point M d'affixe z on associe le point M' d'affixe z' telle que M' est l'image de M par une rotation de centre A d'affixe $1 + i$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ suivie d'une translation de vecteur d'affixe $2 - i$. $z' =$

A $i(z + (1+i)) + (1+i) + (2-i)$
B $iz + (4 - i)$
C $z + (2 - i)$
D $-iz + (1 - i)$

Q57 $\displaystyle\int_0^{2\pi} |\sin x| \, dx =$

A 1 B 2 C 4 D 0

Q58 Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$ deux vecteurs. Le produit vectoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est égal à

A $\begin{pmatrix}3\\-4\\-5\end{pmatrix}$ B $\begin{pmatrix}3\\4\\-5\end{pmatrix}$
C $\begin{pmatrix}3\\-4\\5\end{pmatrix}$ D $\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$

Q59 Dans une ville 30% des habitants utilisent le bus, 50% utilisent la voiture et le reste utilise la marche à pied pour aller au travail. On observe que 90% des usagers de bus et 60% des automobilistes et 100% des piétons sont à l'heure. On choisit un habitant X au hasard.

A La probabilité que X soit à l'heure est $0{,}66$
B La probabilité que X soit venu en voiture est $0{,}6$
C La probabilité que X soit venu en voiture et en retard est $0{,}15$
D La probabilité que X soit venu en bus et à l'heure est $0{,}27$

Q60 Une urne contient n boules rouges et m boules vertes. On en tire deux, l'une après l'autre (sans remise). La probabilité pour que la seconde boule tirée soit rouge est

A $\dfrac{n}{n+m}$
B $\dfrac{n-1}{n+m-1}$
C $\dfrac{n^2}{(n+m)^2}$
D $\dfrac{n^2}{(n+m)(n+m-1)}$

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE CHIMIE DE KÉNITRA · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année · ENSCK Maroc

Session du 25 juillet 2025

2025 — Correction

Q41	Q42	Q43	Q44	Q45	Q46	Q47	Q48	Q49	Q50	Q51	Q52	Q53	Q54
B	D	A	A	C	A	B	D	C	C	D	B	B	D

Q55	Q56	Q57	Q58	Q59	Q60
C	B	C	A	D	A

Q41 ✔ Réponse B

Avec $w = iz$, $|w| = 1$ et $\overline{w} = \dfrac{1}{w}$:

$$\overline{\left(\frac{1+w}{1-w}\right)} = \frac{1+\frac{1}{w}}{1-\frac{1}{w}} = \frac{w+1}{w-1} = -\frac{1+w}{1-w}.$$

Le nombre est imaginaire pur : sa partie réelle est 0.

Q42 ✔ Réponse D

Avec $z = re^{i\theta}$: $z + \dfrac{1}{z} = \left(r + \dfrac{1}{r}\right)\cos\theta + i\left(r - \dfrac{1}{r}\right)\sin\theta$. Réel $\iff \sin\theta = 0$ ou $r = 1$: l'axe réel privé de O, union le cercle unité.

Q43 ✔ Réponse A

$x \ln\sqrt{1+\frac{a}{x}} = \dfrac{x}{2}\ln\left(1+\dfrac{a}{x}\right) \to \dfrac{a}{2}$, donc $f(x) \to 1 + \dfrac{a}{2}$.

Q44 ✔ Réponse A

Une primitive de $e^x \sin x$ est $\dfrac{e^x(\sin x - \cos x)}{2}$:

$$\left[\frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{e^{\pi/2}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1+e^{\pi/2}}{2}.$$

Q45 ✔ Réponse C

$|f(x)| \le x^2$: f est continue en 0, et $\dfrac{f(x)}{x} = x\sin\dfrac{1}{x} \to 0$: $f'(0) = 0$. Pour $x \neq 0$, $f'(x) = 2x\sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0 : f' n'est pas continue en 0.

Q46 ✔ Réponse A

$S : (x-1)^2 + \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 + z^2 = \frac{1}{4}$, centre $\Omega\left(1, -\frac{1}{2}, 0\right)$, $R = \frac{1}{2}$. $\|\vec{n}\| = \sqrt{2+1+1} = 2$ et $d(\Omega, P) = \dfrac{|\sqrt{2}+\frac{1}{2}-\alpha|}{2} = \dfrac{1}{2}$, d'où $\alpha = \sqrt{2} - \frac{1}{2}$ ou $\alpha = \sqrt{2} + \frac{3}{2}$.

Q47 ✔ Réponse B

$\dfrac{1}{x(x^2+1)} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{x^2+1}$:

$$\left[\ln x - \tfrac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]_1^2 = \ln 2 - \tfrac{1}{2}\ln\tfrac{5}{2} = \tfrac{1}{2}\ln\tfrac{8}{5}.$$

Q48 ✔ Réponse D

$A_n = (1-x^2)^n \to 0$ (A, B faux). $B_n = \left(1 - \dfrac{x^2}{n^2}\right)^n$ et $n\ln\left(1-\dfrac{x^2}{n^2}\right) \sim -\dfrac{x^2}{n} \to 0$: $B_n \to 1$.

Q49 ✔ Réponse C

Racines non réelles : $\Delta = 16 - 4m < 0$, $m > 4$ (B faux). Elles sont conjuguées, de produit $m = z_0\overline{z_0} = |z_0|^2$. ($\alpha^5 = -38 + 41i$, A faux ; $\frac{2}{z_0} = \frac{2\overline{z_0}}{m}$ n'est racine que si $m = 2$.)

Q50 ✔ Réponse C

$m = |\alpha|^2 = 4 + 1 = 5$.

Q51 ✔ Réponse D

$\sin^2 x \cos 3x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}\cos 3x = \dfrac{1}{2}\cos 3x - \dfrac{1}{4}(\cos 5x + \cos x)$.

Q52 ✔ Réponse B

$u_{n+1} - \sqrt{2} = \dfrac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2u_n} \ge 0$, donc $u_n \ge \sqrt{2}$, et $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2-u_n^2}{2u_n} \le 0$: décroissante. ($u_1 = 1{,}5 < 2$: C et D faux.)

Q53 ✔ Réponse B

(u_n) décroissante minorée converge vers $\ell = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{2}{\ell}\right)$, soit $\ell = \sqrt{2}$: $v_n \to 0$.

Q54 ✔ Réponse D

$f'(x) = \ln x + 1 - \dfrac{1}{x^2}$ (B faux) et $f'(1) = 0$: tangente horizontale. En 0^+, $x\ln x \to 0$ et $\frac{1}{x} \to +\infty$ (A faux) ; $\frac{f(x)}{x} \to +\infty$: pas d'asymptote oblique.

Q55 ✔ Réponse C

$v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$: géométrique de raison $\frac{1}{2}$, $v_0 = 2\ln 3$, $v_n = \dfrac{2\ln 3}{2^n}$. Donc

$$S = 2\ln 3 \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 4\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)\ln 3.$$

$u_n = e^{v_n} \to 1$ (D faux).

Q56 ✔ Réponse B

Rotation : $z_1 = i(z - (1+i)) + (1+i) = iz + 2$. Translation : $z' = iz + 2 + (2-i) = iz + 4 - i$.

Q57 ✔ Réponse C

$$\int_0^{2\pi} |\sin x|\,dx = 2\int_0^{\pi} \sin x\,dx = 2 \times 2 = 4.$$

Q58 ✔ Réponse A

$\vec{u} \wedge \vec{v} = (2\cdot 2 - (-1)(-1),\ (-1)\cdot 2 - 1\cdot 2,\ 1\cdot(-1) - 2\cdot 2) = (3, -4, -5)$.

Q59 ✔ Réponse D

$P(B \cap H) = 0{,}3 \times 0{,}9 = 0{,}27$. ($P(H) = 0{,}27 + 0{,}3 + 0{,}2 = 0{,}77$; $P(V) = 0{,}5$; $P(V \cap \overline{H}) = 0{,}5 \times 0{,}4 = 0{,}2$.)

Q60 ✔ Réponse A

Probabilités totales :

$$\frac{n}{n+m} \cdot \frac{n-1}{n+m-1} + \frac{m}{n+m} \cdot \frac{n}{n+m-1} = \frac{n(n+m-1)}{(n+m)(n+m-1)} = \frac{n}{n+m}.$$

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE CHIMIE DE KÉNITRA · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année · ENSC Maroc

Session du 1er août 2024

2024

Énoncé

Q1 Soit $f(x) = x^4 - 4$.

A le point $(0, -4)$ est un maximum de f sur $\mathbb{R}$

B $(0, -4)$ est un point d'inflexion de f sur $\mathbb{R}$

C $\mathcal{C}_f$ possède une tangente verticale en $(0, -4)$

D le point $(0, -4)$ est un minimum de f sur $\mathbb{R}$

Q2 Soit f la fonction définie sur $\left]\frac{\pi}{3}, \pi\right[$ par $f(x) = x - 2\sin x$. $\left(\sqrt{3} \approx 1{,}73\right)$

A f ne s'annule pas sur $\left]\frac{\pi}{3}, \pi\right[$

B $\exists c \in \left]\frac{\pi}{3}, \pi\right[\ f'(c) = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3}{\pi}$

C f est strictement décroissante sur $\left]\frac{\pi}{3}, \pi\right[$

D f est concave

Q3 On considère la fonction f donnée par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x + 1}{3x^2 + 6} & \text{si } x \geq 1 \\ \dfrac{1}{x^2 - x} \sin \dfrac{\pi}{2} x & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

A f est continue en 1

B f possède un prolongement par continuité en 0

C f possède une limite finie en 1

D f possède une limite infinie en 0

Q4 Soit P une fonction polynomiale de degré n impair.
L'équation $P(x) = 0$ possède

A n solutions réelles

B pas de solutions réelles

C au moins une solution réelle

D au moins n solutions réelles

Q5 Soit a et b deux réels tels que $0 < a < b$. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = b \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

A (u_n) est décroissante et (v_n) est croissante

B $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n > v_n$

C $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} - u_{n+1} > \frac{1}{2}(v_n - u_n)$

D la suite $(u_n v_n)_{n \geq 0}$ est constante

Q6 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \cos x\, dx =$

A $\frac{\pi}{8}$ B $\frac{\pi}{4}$ C $\frac{1}{2}$ D $\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}$

Q7 Soit $f(x) = \sin^3 x \cos x$. La linéarisation de f est donnée par

A $\dfrac{-\sin 4x}{8} + \dfrac{1}{4}\sin 2x$

B $\dfrac{-\cos 4x}{8} + \dfrac{1}{4}\sin 2x$

C $\dfrac{\cos 4x}{8} + \dfrac{1}{4}\cos 2x$

D $\dfrac{-\sin 4x}{8} + \dfrac{1}{4}\cos 2x$

Q8 Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = f(1) = \frac{1}{2}$.

A $f\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right) \subset \left[\frac{1}{2}, 1\right]$

B $\exists c \in]0, 1[\ f(c) = c$

C $\exists c \in]0, 1[\ f'(c) = 0$

D $\exists c \in]0, 1[\ f(c) = \dfrac{1 + c}{1 - c}$

Q9 Soient S la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 4z = 0$ et P le plan d'équation $4x - 3y + 10 = 0$.

A P coupe S selon un disque

B $P \cap S = \varnothing$

C P est tangent à S

D Le centre de S appartient à P

Q10 Soit le nombre complexe $z = i$.

A $z^{\frac{1}{2}} = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$

B $z^4 = -1$

C $z^i = e^{-\frac{\pi}{2}}$

D $\mathrm{Im}\left(z^{-i}\right) = e^{\frac{\pi}{2}}$

Q11 Soit le nombre complexe $z = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$.

A la forme algébrique de $\frac{1}{z} = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{i}{4}$

B $|z| = 4$

C $\mathrm{Im}\left(z^3\right) = -4\sqrt{3}$

D $\mathrm{Re}\left(z^2\right) = 2\sqrt{3}$

Q12 Soient les nombres complexes $a = 1 + i$, $b = 1 - i\sqrt{3}$ et $z = \frac{a}{b}$, $\arg(z) \equiv$

A $\frac{7\pi}{12}\ [2\pi]$ B $\frac{5\pi}{6}\ [2\pi]$

C $\frac{6\pi}{5}\ [2\pi]$ D $\frac{12\pi}{7}\ [2\pi]$

Q13 Un dé équilibré à six faces est lancé quatre fois. La probabilité d'obtenir deux fois la face six

A $\frac{16}{216}$ B $\frac{25}{216}$ C $\frac{2}{76}$ D $\frac{16}{76}$

Dans une clinique, 5% des patients sont atteints d'une maladie rare. Un test de dépistage pour cette maladie a une sensibilité (probabilité de détecter correctement la maladie) de 98% et une spécificité (probabilité de détecter correctement l'absence de la maladie) de 97%.

Q14 La probabilité qu'un patient soit malade et obtienne un test négatif

A 0,001 B 0,002 C 0,01 D 0,02

Q15 La probabilité qu'un patient ne soit pas malade et obtienne un test positif

A 0,0145 B 0,015 C 0,019 D 0,0285

Q16 Les solutions, dans $\mathbb{C}$, de l'équation $z^4 + z^2 - 6 = 0$

A $\pm i\sqrt{2}$ et $\pm\sqrt{3}$ B $\pm i\sqrt{2}$ et $\pm i\sqrt{3}$
C $\pm i\sqrt{3}$ et $\pm\sqrt{2}$ D $\pm\sqrt{2}$ et $\pm\sqrt{3}$

Soit (u_n) une suite telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Q17 $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{\sin n + \cos n}{1 + \frac{1}{u_n}} =$

A $+\infty$ B 2 C n'a pas de limite D 0

Q18 $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n \left(xe^x - \frac{x}{e^{-x}}\right) =$

A $+\infty$ B 1 C n'a pas de limite D 0

Q19 $\forall n \in \mathbb{N}\ \displaystyle\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \sin^k x\right)}{\cos^{2n} x} =$

A $\frac{1}{2^n}$ B 0 C n'a pas de limite D $\frac{n!}{2^n}$

Q20 On munit le plan complexe d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soient A, B, C les points d'affixes respectives z_A, z_B, z_C avec $z_A = 1 - i$, B le symétrique de A par rapport à l'origine, la partie réelle de z_C est positive et le triangle (ABC) est un triangle rectangle isocèle en A.

A $|AB| = 3\sqrt{2}$ B $z_B = -1 - i$
C $\arg(z_C) \equiv \pi\ [2\pi]$ D $z_C = 3 + i$

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE CHIMIE DE KÉNITRA · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année · ENSC Maroc

Session du 1er août 2024

2024

Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14
D	B	B	C	D	A	A	B	C	C	A	A	B	A

Q15	Q16	Q17	Q18	Q19	Q20
D	C	C	D	D	D

Q1 ✔ Réponse D

$f(x) = x^4 - 4 \geq -4 = f(0)$ pour tout x : $(0, -4)$ est un minimum. ($f'(0) = 0$: tangente horizontale.)

Q2 ✔ Réponse B

f est continue sur $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$, dérivable sur l'intervalle ouvert. Accroissements finis :

$$f'(c) = \frac{f(\pi) - f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\frac{2\pi}{3}} = \frac{\frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}}{\frac{2\pi}{3}} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3}{\pi}.$$

(A faux : $f\left(\frac{\pi}{3}\right) < 0 < f(\pi)$; C faux : $f'(x) = 1 - 2\cos x > 0$; D faux : $f'' = 2\sin x > 0$.)

Q3 ✔ Réponse B

Pour $x < 1$, $x \neq 0$: $f(x) = \dfrac{\sin\frac{\pi x}{2}}{x(x-1)} \sim \dfrac{\frac{\pi x}{2}}{-x} \to -\dfrac{\pi}{2}$ en 0 : limite finie, f se prolonge par continuité en 0.
En 1^-, $x(x-1) \to 0^-$ et $\sin\frac{\pi}{2} = 1$: $f \to -\infty$, donc A et C sont faux.

Q4 ✔ Réponse C

Un polynôme de degré impair tend vers $\pm\infty$ de signes contraires en $\pm\infty$; il est continu, donc s'annule au moins une fois (TVI).

Q5 ✔ Réponse D

$u_{n+1}v_{n+1} = \dfrac{2u_nv_n}{u_n+v_n} \cdot \dfrac{u_n+v_n}{2} = u_nv_n$: la suite (u_nv_n) est constante, égale à ab.
(B faux : $v_n > u_n$; C faux : $v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{(v_n-u_n)^2}{2(u_n+v_n)} < \dfrac{1}{2}(v_n - u_n)$.)

Q6 ✔ Réponse A

$x\sin x\cos x = \frac{1}{2}x\sin 2x$. Par parties :

$$\frac{1}{2}\left[-\frac{x\cos 2x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}.$$

Q7 ✔ Réponse A

$\sin^3 x = \dfrac{3\sin x - \sin 3x}{4}$, donc

$f(x) = \dfrac{3\sin x\cos x - \sin 3x\cos x}{4} = \dfrac{\frac{3}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}(\sin 4x + \sin 2x)}{4} = \dfrac{1}{4}\sin 2x - \dfrac{\sin 4x}{8}$.

Q8 ✔ Réponse B

$g(x) = f(x) - x$ est continue, $g(0) = \frac{1}{2} > 0$ et $g(1) = -\frac{1}{2} < 0$: par le TVI, g s'annule en un $c \in]0, 1[$. (C suppose f dérivable.)

Q9 ✔ Réponse C

$S : (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 9$, centre $\Omega(2, 1, 2)$, $R = 3$.
$d(\Omega, P) = \dfrac{|8 - 3 + 10|}{5} = 3 = R$: P est tangent à S.

Q10 ✔ Réponse C

$i = e^{i\pi/2}$, donc $i^i = e^{i\cdot i\frac{\pi}{2}} = e^{-\frac{\pi}{2}}$. ($z^4 = 1$; $z^{-i} = e^{\pi/2}$ est réel.)

Q11 ✔ Réponse A

$z = \sqrt{3} + i$, $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\sqrt{3} - i}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{4} - \dfrac{i}{4}$. ($|z| = 2$, $z^3 = 8i$, $z^2 = 2 + 2i\sqrt{3}$.)

Q12 ✔ Réponse A

$\arg a = \dfrac{\pi}{4}$ et $\arg b = -\dfrac{\pi}{3}$, donc $\arg z = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{7\pi}{12}$ $[2\pi]$.

Q13 ✔ Réponse B

Loi binomiale $\mathcal{B}\left(4, \frac{1}{6}\right)$: $\binom{4}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \dfrac{6\times 25}{1296} = \dfrac{25}{216}$.

Q14 ✔ Réponse A

$P(M \cap \overline{T}) = 0{,}05 \times 0{,}02 = 0{,}001$.

Q15 ✔ Réponse D

$P(\overline{M} \cap T) = 0{,}95 \times 0{,}03 = 0{,}0285$.

Q16 ✔ Réponse C

Avec $Z = z^2$: $Z^2 + Z - 6 = 0$, $Z = 2$ ou $Z = -3$. Donc $z = \pm\sqrt{2}$ ou $z = \pm i\sqrt{3}$.

Q17 ✔ Réponse C

Le dénominateur tend vers 1, et $\sin n + \cos n = \sqrt{2}\sin\left(n + \frac{\pi}{4}\right)$ n'a pas de limite.

Q18 ✔ Réponse D

$\dfrac{x}{e^{-x}} = xe^x$, donc la parenthèse est nulle et la suite est constante égale à 0.

Q19 ✔ Réponse D

Avec $t = 1 - \sin x \to 0$: $1 - \sin^k x = 1 - (1-t)^k \sim kt$ et $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x \sim 2t$. Le quotient est équivalent à $\dfrac{n!\,t^n}{2^n t^n} = \dfrac{n!}{2^n}$.

Q20 ✔ Réponse D

$z_B = -1 + i$ et $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $-2 + 2i$ ($AB = 2\sqrt{2}$). C s'obtient par une rotation de centre A d'angle $\pm\frac{\pi}{2}$:
$z_C = z_A \pm i(-2 + 2i)$, soit $-1 - 3i$ ou $3 + i$. Partie réelle positive : $z_C = 3 + i$.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE CHIMIE DE KÉNITRA · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année · ENSCK Maroc

Session du 27 juillet 2023

2023

Énoncé

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{\sqrt{1+u_n^2}}$.

On pose $v_n = \dfrac{u_n^2}{3-u_n^2}$.

Q1 Alors (v_n) est une suite géométrique de raison :

A $\dfrac{1}{4}$ B $\dfrac{1}{2}$ C 2 D 4

Q2 $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$

A $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ B $\sqrt{3}$ C 2 D $+\infty$

Q3 On considère la suite numérique $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $w_0 = \dfrac{1}{2}$ et $w_{n+1} = \dfrac{w_n}{3-2w_n}$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$

A $\dfrac{1}{2} \leq w_n < \left(\dfrac{3}{2}\right)^{n+1}$

B $0 < w_n < \left(\dfrac{3}{2}\right)^{n}$

C $0 < w_n < \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n}$

D $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n} < w_n < \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n}$

Q4 On considère l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}\, d\theta$. Alors $I =$

A $\dfrac{\ln(3)}{2}$ B $1-\dfrac{\pi}{4}$ C $\dfrac{\ln(2)}{2}$ D $\dfrac{\pi}{4}$

On considère l'équation suivante : $z^2 - 6z + 13 = 0$ de racines z_1 et z_2.

Q5 z_1 et z_2 sont :

A $2+3i$ et $3-2i$ B $2-3i$ et $2+3i$

C $2-3i$ et $3+2i$ D $3+2i$ et $3-2i$

Q6 Dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère les points A et B d'affixes respectives z_1 et z_2. Le triangle OAB est un triangle :

A équilatéral
B isocèle
C rectangle
D rectangle isocèle

Q7 z_1 et z_2 vérifient :

A $z_1 + z_2 = 3$ B $z_1 = \overline{z_2}$

C $z_1 \times z_2 = 16$ D $\dfrac{z_1}{z_2} = i$

On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{e^{2x} - 2e^x - 3}$.

Q8 $D_f =$

A $\mathbb{R}$ B $\mathbb{R}\setminus\{\ln(3)\}$

C $[\ln(3), +\infty[$ D $]-\infty, \ln(3)]$

Q9 La fonction f est dérivable sur :

A $\mathbb{R}^*$ B $]-\infty, \ln(3)[$

C $]\ln(3), +\infty[$ D $\mathbb{R}^*\setminus\{\ln(3)\}$

Q10 f vérifie l'équation différentielle :

A $f(x)\left(f'(x) - f(x)\right) = e^x$

B $f(x)\left(f'(x) + f(x)\right) = e^x - 3$

C $f(x)\left(f'(x) + f(x)\right) = 3$

D $f(x)\left(f'(x) + f(x)\right) = e^x + 3$

Q11 Quel est le coefficient de $\dfrac{1}{x^2}$ dans le développement de $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^n$ quand le coefficient du troisième terme est le même que celui du septième terme dans la formule du binôme de Newton ?

A 28 B 56 C 128 D 356

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite arithmétique et S_n la somme des n premiers termes de $(a_n)_n$. On pose $a_5 = 5$ et $S_5 = 15$.

Q12 $\dfrac{1}{k(k+1)} =$

A $\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$ B $\dfrac{1}{k+1} - \dfrac{1}{k}$

C $\dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{k+1}$ D $\dfrac{k+1}{k} - \dfrac{k}{k+1}$

Q13 La somme des 100 premiers termes de la suite $\left(\dfrac{1}{a_n a_{n+1}}\right)_n$ est égale à

A $\dfrac{99}{101}$ B $\dfrac{100}{101}$ C $\dfrac{99}{100}$ D $\dfrac{101}{100}$

Q14 Dans une ville, il y a quatre boulangeries qui ferment un jour par semaine. Quel est le nombre de façons d'attribuer un jour de fermeture hebdomadaire ?

A C_7^4 B A_7^4 C 4^7 D 7^4

Q15 Quelle est la valeur de la limite suivante : $\lim\limits_{t\to+\infty} \left(1 + \dfrac{1}{t^{2023}}\right)^{t^{2024}}$?

A 1 B e C $\dfrac{1}{e}$ D $+\infty$

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE CHIMIE DE KÉNITRA · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année · ENSCK Maroc

Session du 27 juillet 2023

2023 Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14	Q15
D	B	C	C	D	B	B	C	C	–	B	A	B	D	D

Q1 ✔ Réponse D

$u_{n+1}^2 = \dfrac{4u_n^2}{1+u_n^2}$, donc

$$v_{n+1} = \frac{\frac{4u_n^2}{1+u_n^2}}{3-\frac{4u_n^2}{1+u_n^2}} = \frac{4u_n^2}{3-u_n^2} = 4v_n.$$

Q2 ✔ Réponse B

$v_n = \dfrac{1}{2}\cdot 4^n \to +\infty$ et $u_n^2 = \dfrac{3v_n}{1+v_n} \to 3$. Comme $u_n > 0$, $u_n \to \sqrt{3}$.

Q3 ✔ Réponse C

Avec $t_n = \dfrac{1}{w_n}$: $t_{n+1} = 3t_n - 2$, donc $t_n - 1 = 3^n(t_0 - 1) = 3^n$ et $w_n = \dfrac{1}{1+3^n}$. Ainsi $0 < w_n < \dfrac{1}{3^n} \le \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

Remarque : B est vraie elle aussi (plus faible) ; A et D sont fausses ($w_1 = \frac{1}{4}$, et $n = 0$ pour D).

Q4 ✔ Réponse C

$I = [-\ln(\cos\theta)]_0^{\pi/4} = -\ln\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \ln\sqrt{2} = \dfrac{\ln 2}{2}$.

Q5 ✔ Réponse D

$\Delta = 36 - 52 = -16 = (4i)^2$, d'où $z = \dfrac{6 \pm 4i}{2} = 3 \pm 2i$.

Q6 ✔ Réponse B

$OA = OB = \sqrt{13}$ et $AB = 4$: isocèle. Il n'est pas rectangle ($\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = 9 - 4 = 5 \neq 0$) ni équilatéral.

Q7 ✔ Réponse B

Les racines d'une équation à coefficients réels sont conjuguées. ($z_1 + z_2 = 6$, $z_1 z_2 = 13$.)

Q8 ✔ Réponse C

$e^{2x} - 2e^x - 3 = (e^x - 3)(e^x + 1) \ge 0 \iff e^x \ge 3 \iff x \ge \ln 3$.

Q9 ✔ Réponse C

La racine est dérivable là où l'expression est strictement positive : $]\ln 3, +\infty[$.

Q10 ✔ Réponse –

$f^2 = e^{2x} - 2e^x - 3$, donc $2ff' = 2e^{2x} - 2e^x$, $ff' = e^{2x} - e^x$. Alors

$$f\,(f' - f) = ff' - f^2 = e^x + 3.$$

Aucune proposition n'est juste telle qu'imprimée (erreur du sujet) : D correspond avec $f' - f$ au lieu de $f' + f$.

Q11 ✔ Réponse B

Coefficients des 3e et 7e termes : $\binom{n}{2} = \binom{n}{6}$, donc $n = 8$. Le terme $\binom{8}{k}x^{8-k}x^{-k} = \binom{8}{k}x^{8-2k}$ donne x^{-2} pour $k = 5$: $\binom{8}{5} = 56$.

Q12 ✔ Réponse A

$\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1} = \dfrac{k+1-k}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k(k+1)}$.

Q13 ✔ Réponse B

$S_5 = \dfrac{5(a_1 + a_5)}{2} = 15$ donne $a_1 = 1$, donc $r = 1$ et $a_n = n$.

Somme télescopique :

$$\sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{101} = \frac{100}{101}.$$

Q14 ✔ Réponse D

Chacune des 4 boulangeries choisit un jour parmi 7, indépendamment : 7^4.

Q15 ✔ Réponse D

$\ln\left(1 + t^{-2023}\right)^{t^{2024}} = t^{2024}\ln\left(1 + t^{-2023}\right) \sim t^{2024}\cdot t^{-2023} = t \to +\infty$.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE CHIMIE DE KÉNITRA · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année · ENSCK Maroc

Session du 4 septembre 2022

2022 Énoncé

Q1 On considère la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\cos^2 x + \sin 2x + 2}}$.
Alors son domaine de définition est :

A $\mathbb{R}$ B $]-\pi, \pi[$
C $\left]\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ D $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$

Q2 On considère la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} x^2 \ln(x^2) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ Alors

A f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et f' est continue sur $\mathbb{R}$.
B $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f''(x) = 2\ln x^2 - 6$.
C f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
D f'' est continue sur $\mathbb{R}$

Q3 Sur l'intervalle $\left]\dfrac{1}{4}, 4\right[$ l'équation $x - 1 - \sqrt{x} = 0$ possède :

A au moins une solution.
B aucune solution.
C une solution unique.
D deux solutions

Q4 On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation différentielle : $f''(x) + 3f'(x) + 2f(x) = 0$ tel que $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$. Alors : $f(x) =$

A $(x^2+1)e^{-x}$.
B $2e^{-x} - e^{-2x}$
C $2e^{-x} - (x+1)e^{-2x}$.
D $x + \dfrac{e^{-2x}}{2} + \dfrac{1}{2}$.

Q5 On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + \dfrac{1}{4} - \dfrac{e^{2x}}{(e^x+1)^2}$ et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative. Alors :

A $(\mathcal{C}_f)$ n'admet pas d'asymptote.
B La droite d'équation $y = x - \dfrac{3}{4}$ est une asymptote de $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $-\infty$.
C La droite d'équation $y = x - \dfrac{1}{4}$ est une asymptote de $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $-\infty$.
D La droite d'équation $y = x + \dfrac{1}{4}$ est une asymptote de $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $-\infty$.

Q6 Soit $f(x) = \cos^3 x + \sin^2 x$. Alors $f(x) =$

A $-\dfrac{\cos 3x}{4} - \dfrac{\cos 2x}{2} + \dfrac{1}{4}$.
B $\dfrac{\cos 3x}{4} - \dfrac{\sin 2x}{2} + \dfrac{3\cos x}{4} + \dfrac{1}{2}$.
C $\dfrac{\cos 3x}{4} - \dfrac{\cos 2x}{2} + \dfrac{3\sin x}{4} - \dfrac{1}{2}$.
D $\dfrac{\cos 3x}{4} - \dfrac{\cos 2x}{2} + \dfrac{3\cos x}{4} + \dfrac{1}{2}$.

Q7 Dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $2 - i$, $3 + 2i$, $-1 + 4i$ et $-2 + i$. Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?

A rectangle.
B carré.
C losange.
D parallélogramme.

Q8 Dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives -1, $-i$, 1 et i. On note G le barycentre du système pondéré $\{(A, 2022), (B, 2022), (C, 2022), (D, 2022)\}$. Alors :

A $G \neq O$.
B GCD est un triangle isocèle.
C ABG est un triangle equilatéral.
D $ABCD$ n'est pas un carré.

Q9 Soit C l'ensemble des points d'affixe z vérifiant $|z - 1| = |z + 1|$. Alors :

A $C = \varnothing$
B C est un cercle.
C C est l'axe des ordonnés.
D C est l'axe des abscisses.

Q10 Dans le plan muni du repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ on considère la transformation f qui associe à chaque point M d'affixe z le point M' d'affixe $z' = e^{i\frac{\pi}{4}} z$. Alors f est :

A une translation.
B une homothétie.
C une rotation.
D une symétrie.

Q11 Soient $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ deux suites numériques définies par : $u_1 = 2$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + 2$ et $v_n = u_n - 3$. Alors :

A $(v_n)_{n\geq 1}$ est une suite géometrique et $u_n = 3 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$, $\forall n \geq 1$.
B $(v_n)_{n\geq 1}$ est une suite géometrique et $u_n = -3 + \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$, $\forall n \geq 1$.
C $(u_n)_{n\geq 1}$ est une suite convergente vers 0.
D $(v_n)_{n\geq 1}$ est une suite arithmétique.

Q12 On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_n = \dfrac{n}{n^2+1} + \dfrac{n}{n^2+2} + \cdots + \dfrac{n}{n^2+n}$.
Alors :

A $\forall n \in \mathbb{N}$ $\dfrac{n}{n^2+1} \leq u_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.
B $\forall n \in \mathbb{N}$ $\dfrac{n}{n+1} \leq u_n \leq \dfrac{n^2}{n^2+1}$.
C $\forall n \in \mathbb{N}$ $\dfrac{n}{n+1} \leq u_n \leq 1$ et $\lim\limits_{x\to\infty} u_n = 0$.
D $\forall n \in \mathbb{N}$ $0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{n}$ et $\lim\limits_{x\to\infty} u_n = 1$.

Q13 On considère l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\, dx$. Alors $I =$

A $\dfrac{1}{2}$. B $\dfrac{3}{2}$. C $\dfrac{-2}{3}$. D $\dfrac{2}{3}$.

Q14 On note $I = \displaystyle\int_0^{\ln\sqrt{3}} \frac{e^x\, dx}{1+e^{2x}}$ et $J = \displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{dx}{1+e^x}$. Le changement de variable $t = e^x$ donne :

A $I = \displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{12}$.
B $I = \displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{t\, dt}{1+t^2} = \frac{1}{2}\ln 2$.
C $J = \displaystyle\int_1^{2} \frac{dt}{1+t} = \ln 3 - \ln 2$.
D $J = \displaystyle\int_1^{2} \frac{dt}{t(1+t)} = 2\ln 2 + \ln 3$.

Q15 On considère deux événements A et B tels que $\mathcal{P}(A) = \dfrac{1}{2}$, $\mathcal{P}(B) = \dfrac{5}{12}$ et $\mathcal{P}(A \cup B) = \dfrac{3}{4}$. Alors : $\mathcal{P}\left(\bar{A} \cap \bar{B}\right) =$

A $\dfrac{1}{6}$. B $\dfrac{1}{12}$. C $\dfrac{1}{4}$. D $\dfrac{3}{4}$.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE CHIMIE DE KÉNITRA · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année · ENSCK Maroc

Session du 4 septembre 2022

2022

Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14	Q15
A	A	C	B	D	D	D	B	C	C	A	B	D	A	C

Q1 ✔ Réponse A

$\cos^2 x + \sin 2x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x + \sin 2x \geq \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4}+1} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Donc $\cos^2 x + \sin 2x + 2 \geq \frac{5-\sqrt{5}}{2} > 0$: $D_f = \mathbb{R}$.

Q2 ✔ Réponse A

$\frac{f(x)-f(0)}{x} = x\ln(x^2) \to 0$: $f'(0) = 0$. Pour $x \neq 0$, $f'(x) = 2x\ln(x^2) + 2x \to 0$ en 0 : f' est continue sur $\mathbb{R}$. En revanche $f''(x) = 2\ln(x^2) + 6 \to -\infty$ en 0 : B, C, D sont faux.

Q3 ✔ Réponse C

$g(x) = x - 1 - \sqrt{x}$: $g'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0$ sur $]\frac{1}{4}, 4]$, $g\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{5}{4} < 0$ et $g(4) = 1 > 0$: une solution unique (A est donc vraie aussi, mais C est plus précise).

Q4 ✔ Réponse B

$r^2 + 3r + 2 = 0$: $r = -1$ ou $r = -2$, $f(x) = ae^{-x} + be^{-2x}$. $a + b = 1$ et $-a - 2b = 0$ donnent $a = 2$, $b = -1$.

Q5 ✔ Réponse D

En $-\infty$: $\frac{e^{2x}}{(e^x+1)^2} \to 0$, donc $f(x) - \left(x + \frac{1}{4}\right) \to 0$. (En $+\infty$ le quotient tend vers 1 : asymptote $y = x - \frac{3}{4}$ en $+\infty$, pas en $-\infty$.)

Q6 ✔ Réponse D

$\cos^3 x = \frac{\cos 3x + 3\cos x}{4}$ et $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, d'où

$$f(x) = \frac{\cos 3x}{4} - \frac{\cos 2x}{2} + \frac{3\cos x}{4} + \frac{1}{2}.$$

Q7 ✔ Réponse D

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ ont la même affixe $1 + 3i$: parallélogramme. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 1 \times (-4) + 3 \times 2 = 2 \neq 0$ et $AB = \sqrt{10} \neq AD = \sqrt{20}$: ni rectangle, ni losange.

Q8 ✔ Réponse B

Poids égaux : $z_G = \frac{-1-i+1+i}{4} = 0$, $G = O$. $GC = GD = 1$: GCD est isocèle (et rectangle en G). $ABCD$ est un carré.

Q9 ✔ Réponse C

M est équidistant des points d'affixes 1 et -1 : c'est leur médiatrice, l'axe des ordonnées.

Q10 ✔ Réponse C

$z' = e^{i\pi/4}z$: rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

Q11 ✔ Réponse A

$v_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2 - 3 = \frac{1}{3}(u_n - 3) = \frac{1}{3}v_n$: géométrique de raison $\frac{1}{3}$, $v_1 = -1$. Donc $u_n = 3 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$, qui tend vers 3.

Q12 ✔ Réponse B

Chacun des n termes vérifie $\frac{n}{n^2+n} \leq \frac{n}{n^2+k} \leq \frac{n}{n^2+1}$. En sommant :

$$\frac{n}{n+1} \leq u_n \leq \frac{n^2}{n^2+1},$$

et $u_n \to 1$.

Q13 ✔ Réponse D

$\cos^3 x = (1 - \sin^2 x)\cos x$:

$$I = \left[\sin x - \frac{\sin^3 x}{3}\right]_0^{\pi/2} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Q14 ✔ Réponse A

$t = e^x$, $dx = \frac{dt}{t}$: $I = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$. (D : $J = [\ln t - \ln(1+t)]_1^2 = 2\ln 2 - \ln 3$, pas $+\ln 3$.)

Q15 ✔ Réponse C

$\mathcal{P}\left(\bar{A} \cap \bar{B}\right) = 1 - \mathcal{P}(A \cup B) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE CHIMIE DE KÉNITRA · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès au Cycle Préparatoire Intégré · ENSCK

Session 2021

2021 Énoncé

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n+2}$ et $v_n = \dfrac{u_n}{u_n+1}$.

Q1

A $\forall n \geq 0,\ v_{n+1} = 1 + v_n$

B $\forall n \geq 0,\ v_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

C $\forall n \geq 0,\ v_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

D $v_{n+1} = \dfrac{1}{2}v_n$

Q2

A $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

B $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

C $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -1$

D $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Q3 Dans l'ensemble $\mathbb{C}$, si $z = \dfrac{3}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ alors

A $|z-1| = 1,\ \arg(z-1) \equiv \dfrac{5\pi}{3}\ [2\pi]$

B $|z-1| = 1,\ \arg(z-1) \equiv \dfrac{11\pi}{6}\ [2\pi]$

C $|z-1| = \sqrt{3},\ \arg(z) \equiv \dfrac{5\pi}{3}\ [2\pi]$

D $|z-1| = \sqrt{3},\ \arg(z) \equiv \dfrac{11\pi}{6}\ [2\pi]$

Q4 La limite $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ est égale à

A 1 B e C $\dfrac{1}{e}$ D $\dfrac{-1}{e}$

Q5 La linéarisation de l'expression $\sin(x)\cos(2x)$ est donnée par :

A $\dfrac{1}{2}(\cos(3x) + \sin(x))$

B $\dfrac{1}{2}(\sin(3x) - \cos(x))$

C $\dfrac{1}{2}(\sin(3x) - \sin(x))$

D $\dfrac{1}{2}(\cos(3x) + \sin(x))$

Q6 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_n = \dfrac{1}{2^n}$. On pose $S = \sum\limits_{k=5}^{12} u_k$

A $S = \left(\dfrac{1}{2}\right)^8 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{17}$

B $S = \left(\dfrac{1}{2}\right)^4 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^8$

C $S = \left(\dfrac{1}{2}\right)^5 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{12}$

D $S = \left(\dfrac{1}{2}\right)^4 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{12}$

Q7 Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes tels que : $z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ et $z_2 = -3i$

A $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{3}{2}e^{\frac{3i\pi}{4}}$ B $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{3}{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$

C $z_1 z_2 = 6e^{\frac{-i\pi}{4}}$ D $z_1 z_2 = 6e^{\frac{i\pi}{4}}$

Q8

A $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(x)\sin(x)\,dx = 1$

B $\displaystyle\int_0^{1} xe^{1-x}\,dx = 3 - e$

C $\displaystyle\int_1^{e} (x+1)\ln(x)\,dx = \frac{e^2+5}{4}$

D $\displaystyle\int_1^{e} \frac{(\ln(x))^2\,dx}{x} = 1$

Q9 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $\dfrac{1}{2}$. La somme $\ln(u_0) + \ln(u_1) + \cdots + \ln(u_n)$ est égale à :

A $\dfrac{1}{2}(n+1)(2-n)\ln(2)$

B $\dfrac{1}{2}(n-1)(2-n)\ln(2)$

C $\dfrac{1}{2}(n-2)(1+n)\ln(2)$

D $\dfrac{1}{2}(n+2)(1-n)\ln(2)$

Q10 Soient z_1 et z_2 les solutions complexes de l'équation $z^2 - 4z + 8 = 0$. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points M_1 et M_2 d'affixe respectives z_1 et z_2.

A $z_1 = -2 - 2i,\ z_2 = -2 + 2i$

B $\mathrm{Re}(z_1) = -\mathrm{Re}(z_2)$

C M_1 et M_2 sont sur le cercle de centre 0 et de rayon $3\sqrt{2}$

D OM_1M_2 est un triangle isocèle en O.

Q11 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in]0;2], \\ -x+4 & \text{si } x \in]2;4[\end{cases}$

A f est dérivable au point 2

B f n'est pas continue au point 2

C f n'est pas dérivable au point 2

D f n'est ni dérivable ni continue au point 2

Q12 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\left(\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\right)$. Soit C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

A La courbe C est situé au dessus de la droite (D) sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

B La droite (D) d'équation $y = x$ est une asymptote oblique de C au voisinage de $+\infty$

C $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -1$

D La droite (D) d'équation $y = x$ coupe C sur $[1, +\infty[$.

On considère la fonction f définie par $f(x) = e^{-x}\ln(|1-e^x|)$.

Q13 Son domaine de définition est :

A $\mathbb{R}^*$ B $]-\infty, 0]$

C $]-\infty, 0[$ D $]1, +\infty[$

Q14 La limite $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ est égale à :

A $+\infty$ B -1 C $-\infty$ D 1

Q15 Pour tout $x \in D_f$, $f'(x)$ vérifie :

A $f'(x) + f(x) = -\ln(|1-e^x|)$

B $f'(x) + f(x) = -e^{-x}$

C $f'(x) + f(x) = 0$

D $f'(x) + f(x) = \dfrac{-1}{1-e^x}$

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE CHIMIE DE KÉNITRA · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès au Cycle Préparatoire Intégré · ENSCK

Session 2021

2021 — Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14	Q15
D	B	A	B	C	D	C	C	A	D	C	B	A	B	D

Q1 ✔ Réponse D

$u_{n+1}+1=\dfrac{2(u_n+1)}{u_n+2}$, donc
$v_{n+1}=\dfrac{u_{n+1}}{u_{n+1}+1}=\dfrac{u_n}{2(u_n+1)}=\dfrac{1}{2}v_n$. Avec $v_0=\frac{1}{2}$:
$v_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ (B et C sont fausses).

Q2 ✔ Réponse B

$v_n\to 0$ et $u_n=\dfrac{v_n}{1-v_n}\to 0$.

Q3 ✔ Réponse A

$z-1=\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}=e^{-i\pi/3}$: $|z-1|=1$ et
$\arg(z-1)\equiv-\dfrac{\pi}{3}\equiv\dfrac{5\pi}{3}\ [2\pi]$.

Q4 ✔ Réponse B

$x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\to 1$, donc la limite vaut e.

Q5 ✔ Réponse C

$\sin a\cos b=\dfrac{1}{2}\left(\sin(a+b)+\sin(a-b)\right)$:
$\sin x\cos 2x=\dfrac{1}{2}(\sin 3x-\sin x)$.

Q6 ✔ Réponse D

$S=\displaystyle\sum_{k=5}^{12}\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2^5}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^8}{1-\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{2}\right)^4-\left(\frac{1}{2}\right)^{12}$.

Q7 ✔ Réponse C

$z_1=2e^{i\pi/4}$ et $z_2=3e^{-i\pi/2}$: $z_1z_2=6e^{-i\pi/4}$ et $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{2}{3}e^{3i\pi/4}$
(module $\frac{2}{3}$, pas $\frac{3}{2}$).

Q8 ✔ Réponse C

Par parties :

$$\int_1^e(x+1)\ln x\,dx=\left[\left(\tfrac{x^2}{2}+x\right)\ln x\right]_1^e-\int_1^e\left(\tfrac{x}{2}+1\right)dx=\frac{e^2+5}{4}.$$

(A vaut 0, B vaut $e-2$, D vaut $\frac{1}{3}$.)

Q9 ✔ Réponse A

$u_k=2^{1-k}$, donc

$$\sum_{k=0}^{n}\ln u_k=\ln 2\sum_{k=0}^{n}(1-k)=\ln 2\left((n+1)-\frac{n(n+1)}{2}\right)=\frac{1}{2}(n+1)(2-n)\ln 2.$$

Q10 ✔ Réponse D

$z=2\pm 2i$: $|z_1|=|z_2|=2\sqrt{2}$, donc $OM_1=OM_2$: triangle isocèle en O.

Q11 ✔ Réponse C

f est continue en 2 ($f(2)=2$, limite à droite $-2+4=2$), mais la dérivée à gauche vaut 1 et à droite -1 : f n'est pas dérivable en 2.

Q12 ✔ Réponse B

$f(x)-x=x\left(\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}-1\right)=\dfrac{-2x}{e^{2x}+1}\to 0$ en $+\infty$: $y=x$ est asymptote. Ce terme est <0 pour $x>0$: C est sous (D) et ne la coupe pas sur $[1,+\infty[$.

Q13 ✔ Réponse A

Il faut $|1-e^x|>0$, c'est-à-dire $x\neq 0$: $D_f=\mathbb{R}^*$.

Q14 ✔ Réponse B

En $-\infty$, $e^x\to 0$ et $\ln(1-e^x)\sim -e^x$, donc
$f(x)\sim e^{-x}(-e^x)=-1$.

Q15 ✔ Réponse D

$f'(x)=-e^{-x}\ln|1-e^x|+e^{-x}\cdot\dfrac{-e^x}{1-e^x}=-f(x)-\dfrac{1}{1-e^x}$.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE CHIMIE DE KÉNITRA · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année · ENSCK Maroc

Session de septembre 2020 · Cocher la ou les bonnes réponses

2020 Énoncé

Q1 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites numériques définies par : $u_0 = 1$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n+2}$ et $v_n = \dfrac{u_n}{u_n+1}$

A $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique

B $(\forall n \in \mathbb{N})\,;\ v_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

C $(\forall n \in \mathbb{N})\,;\ u_n = \dfrac{1}{2^{n+1}-1}$

D $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

Q2 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique de terme général $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}\,dx$

A $u_0 + u_1 = 1$

B $u_1 = 1 - \ln(1+e)$

C $u_0 = \ln(1+e) - \ln 2$

D $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ u_{n+1} + u_n = \dfrac{1-e^{-n}}{n}$

Q3 Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites définies par : $u_0 = 3$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2+4}{2u_n}$ et $v_n = \dfrac{u_n-2}{u_n+2}$

A $(\forall n \in \mathbb{N})\,;\ u_n \le 2$

B $(\forall n \in \mathbb{N})\,;\ u_n > 2$

C $(\forall n \in \mathbb{N})\,;\ v_{n+1} = v_n^2$

D $(\forall n \in \mathbb{N})\,;\ v_n = v_0^{2n}$

Q4 Pour tout $z \in \mathbb{C}$ on pose $p(z) = z^3 + 3z^2 + 6z + 4$ et soient A, B et C les points d'affixes $z_A = -1 + i\sqrt{3}$, $z_B = -1 - i\sqrt{3}$ et $z_C = 2$ respectivement.

A Le nombre $-2i$ est solution de l'équation $p(z) = 0$

B $(\forall z \in \mathbb{C})\,;\ p(z) = (z+1)(z^2 - 2z + 4)$

C z_A et z_B sont solutions de l'équation : $z^2 + 2z + 4 = 0$

D ABC est un triangle équilatéral

On pose $z = \sqrt{2+\sqrt{3}} - i\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

Q5 La forme expontielle de z^2 est :

A $4e^{i\frac{\pi}{6}}$ B $4e^{-i\frac{\pi}{6}}$

C $4e^{i\frac{5\pi}{6}}$ D $4e^{-i\frac{5\pi}{6}}$

Q6 La forme expontielle de z est :

A $4e^{i\frac{\pi}{6}}$ B $4e^{-i\frac{5\pi}{12}}$

C $4e^{i\frac{5\pi}{12}}$ D $2e^{-i\frac{\pi}{12}}$

Q7 L'angle dont les nombres $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ et $\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ sont respectivement le cosinus et le sinus

A $-\dfrac{\pi}{12}$ B $\dfrac{\pi}{12}$ C $-\dfrac{5\pi}{12}$ D $\dfrac{5\pi}{12}$

Q8 Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - \dfrac{4e^x}{1+e^x}$.
La courbe représentative de f admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote oblique d'équation :

A $y = x - 4$ B $y = x$

C $y = x - 1$ D $y = x + 4$

Q9 Soit ω un réel strictement positif et z un nombre complexe tel que $z = \dfrac{1+i\omega}{1-i\omega}$

A La partie réelle de z est égale à 1

B Le module de z est égale à 1

C $\left|\dfrac{(1+i\omega)^2}{1-i\omega}\right| = \sqrt{1+\omega^2}$

D $\left|\dfrac{1+i\omega}{(1-i\omega)^2}\right| = \left|\dfrac{(1+i\omega)^2}{1-i\omega}\right|$

Q10 Soit, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ les nombres complexes : $z_1 = 1 - i\sqrt{3}$ et $z_2 = -2 + 2i$

A $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ B $z_1 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

C $z_2 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$ D $z_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

Q11 Soit f la fonction de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$

A $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

B $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$

C $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \ln 2 - \ln\left(1+e^{-1}\right)$

D $\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f(x)$

Q12 Soit F la fonction numérique de la variable réelle x définie par $F(x) = \ln(x^2+1) + x$

A $\forall x \in \mathbb{R},\ F'(x) = \dfrac{1}{x^2+1} + 1$

B F est croissante sur $\mathbb{R}$

C $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$

D $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = +\infty$

Q13 Soit g la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = x - \dfrac{\ln x}{x^2}$

A $\lim\limits_{x\to0^+} g(x) = -\infty$

B $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

C $g'(x) = \dfrac{x^3 - 1 + 2\ln x}{x^3}$

D $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} = 1 - \frac{2}{e}$

Q14 Soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = \sin^{n+1}(2x)\,;\ n \in \mathbb{N}$

A $(\forall n \in \mathbb{N})\,;\ f_n\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = -f_n(x)$

B $(\forall n \in \mathbb{N})\ (\forall x \in [0,\pi])\,;\ f_n(x) \ge 0$

C $(\forall n \in \mathbb{N})\,;$
$f_n\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = (-1)^{n+1} f_n\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)$

D $f_n'(x) = 2(n+1)\sin^n(2x)$

Q15 Soit g la fonction de la variable réelle x définie par : $g(x) = \ln\left(\dfrac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}\right)$ et D son domaine de définition. On a :

A $D =]-\infty;0]$

B $g'(x) = \dfrac{-2e^x}{1-e^{2x}}$

C $(\forall x \in D)$ on a : $g'(x) > 0$

D $\ln\left(\dfrac{e-1}{1+e}\right) = -1$

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE CHIMIE DE KÉNITRA · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année · ENSCK Maroc

Session de septembre 2020 · Plusieurs réponses possibles

2020 Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14	Q15
AC	ACD	BC	CD	B	D	B	A	BC	C	BC	BC	BCD	C	B

Q1 ✔ Réponse AC

$v_{n+1} = \dfrac{u_n}{2(u_n+1)} = \dfrac{1}{2}v_n$: géométrique de raison $\frac{1}{2}$, $v_0 = \frac{1}{2}$, donc $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ (B faux). $u_n = \dfrac{v_n}{1-v_n} = \dfrac{1}{2^{n+1}-1} \to 0$ (D faux).

Q2 ✔ Réponse ACD

$u_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}dx = \ln(1+e) - \ln 2$;
$u_1 = \left[-\ln(1+e^{-x})\right]_0^1 = \ln 2 - \ln(1+e^{-1}) = 1 + \ln 2 - \ln(1+e)$ (B faux). Donc $u_0 + u_1 = 1$. Et
$u_{n+1} + u_n = \displaystyle\int_0^1 e^{-nx}dx = \frac{1-e^{-n}}{n}$.

Q3 ✔ Réponse BC

$u_{n+1} - 2 = \dfrac{(u_n-2)^2}{2u_n}$: par récurrence $u_n > 2$. De même $u_{n+1} + 2 = \dfrac{(u_n+2)^2}{2u_n}$, d'où $v_{n+1} = v_n^2$. Ainsi $v_n = v_0^{2^n}$ (et non v_0^{2n} : D faux tel qu'imprimé).

Q4 ✔ Réponse CD

$p(-1) = 0$ et $p(z) = (z+1)(z^2+2z+4)$ (B faux), dont les racines sont $-1 \pm i\sqrt{3}$: C vrai. $p(-2i) = -8 - 4i \neq 0$.
$AB = AC = BC = 2\sqrt{3}$: ABC est équilatéral.

Q5 ✔ Réponse B

$z^2 = (2+\sqrt{3}) - (2-\sqrt{3}) - 2i\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = 2\sqrt{3} - 2i = 4e^{-i\pi/6}$.

Q6 ✔ Réponse D

$|z| = \sqrt{4} = 2$ et z est dans le quatrième quadrant, avec $z^2 = 4e^{-i\pi/6}$: $z = 2e^{-i\pi/12}$.

Q7 ✔ Réponse B

$\dfrac{\overline{z}}{2} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = e^{i\pi/12}$: l'angle est $\dfrac{\pi}{12}$.

Q8 ✔ Réponse A

$\dfrac{4e^x}{1+e^x} \to 4$ en $+\infty$, donc $f(x) - (x-4) \to 0$.

Q9 ✔ Réponse BC

$|z| = \dfrac{|1+i\omega|}{|1-i\omega|} = 1$. $\left|\dfrac{(1+i\omega)^2}{1-i\omega}\right| = \dfrac{1+\omega^2}{\sqrt{1+\omega^2}} = \sqrt{1+\omega^2}$.
$\operatorname{Re} z = \dfrac{1-\omega^2}{1+\omega^2} \neq 1$; le membre gauche de D vaut $\dfrac{1}{\sqrt{1+\omega^2}} \neq \sqrt{1+\omega^2}$ car $\omega > 0$.

Q10 ✔ Réponse C

$z_1 = 2e^{-i\pi/3}$ et $z_2 = 2\sqrt{2}e^{3i\pi/4}$.

Q11 ✔ Réponse BC

$f(x) = \dfrac{1}{e^x+1}$: $\to 0$ en $+\infty$ et $\to 1$ en $-\infty$.
$\displaystyle\int_0^1 f = \left[-\ln(1+e^{-x})\right]_0^1 = \ln 2 - \ln(1+e^{-1})$. f n'est pas paire.

Q12 ✔ Réponse BC

$F'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1} + 1 = \dfrac{(x+1)^2}{x^2+1} \geq 0$ (A faux) : F croissante.
$F \to +\infty$ en $+\infty$ et $F(x) = x + \ln(x^2+1) \to -\infty$ en $-\infty$.

Q13 ✔ Réponse BCD

En 0^+, $-\dfrac{\ln x}{x^2} \to +\infty$ (A faux). En $+\infty$, $g \to +\infty$.
$g'(x) = 1 - \dfrac{1-2\ln x}{x^3} = \dfrac{x^3 - 1 + 2\ln x}{x^3}$, et
$\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx = \left[-\frac{\ln x + 1}{x}\right]_1^e = 1 - \frac{2}{e}$.

Q14 ✔ Réponse C

$f_n\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin^{n+1}(\pi - 2x) = \sin^{n+1}(2x)$ et
$f_n\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = (-1)^{n+1}\sin^{n+1}(2x)$: C vrai. A n'est vrai que pour n pair, B est faux pour n pair ($\sin 2x < 0$ sur $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$), et
$f_n'(x) = 2(n+1)\sin^n(2x)\cos(2x)$.

Q15 ✔ Réponse B

Il faut $e^{-x} > 1$: $D =]-\infty, 0[$ (A faux). Sur D,
$g(x) = \ln(1-e^x) - \ln(1+e^x)$ et

$$g'(x) = \frac{-e^x}{1-e^x} - \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{-2e^x}{1-e^{2x}} < 0.$$

$\ln\dfrac{e-1}{e+1} \approx -0{,}77 \neq -1$.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE CHIMIE DE KÉNITRA · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès au cycle préparatoire · ENSC Kénitra

Session de septembre 2019

2019 Énoncé

On considère la suite numérique $(u_n)_n$ définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n(1 + u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

Q1

A $(\forall n \in \mathbb{N}),\ u_n < 1$

B $(u_n)_n$ est décroissante

C $u_{n+1} \geq 2u_n,\ (\forall n \in \mathbb{N})$

D $(\forall n \in \mathbb{N}),\ u_n^2 < u_n$

Q2

A $(\forall n \in \mathbb{N}),\ u_n < 2^n$

B $(\forall n \in \mathbb{N}),\ u_n \geq 2^n$

C $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

D $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$

Soient les nombres complexes : $a = (\sqrt{3}-1) + (\sqrt{3}+1)i$ et $u = \dfrac{a}{2+2i}$.

Q3

A $\arg\left(a^2\right) \equiv \dfrac{5\pi}{6}\ [2\pi]$

B $\left|a^2\right| = 4$

C $\arg(a) \equiv \dfrac{5\pi}{3}\ [2\pi]$

D $|a| = 2$

Q4

A $u^2 = e^{i\frac{5\pi}{6}}$

B $\arg(u) \equiv -\dfrac{5\pi}{6}\ [2\pi]$

C $u = e^{i\frac{\pi}{6}}$

D $|u| = 4$

Q5 Soient z et z' deux nombres complexes tels que $z = \sqrt{3} - i$ et $z' = (1+i)z$

A $z' = \left(\sqrt{3}-1\right) + i\left(\sqrt{3}+1\right)$

B $z = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$

C $z' = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\right)$

D $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

Q6 On lance 6 fois de suite une même pièce de monnaie. On considère l'événement A : « Obtenir exactement trois fois « face » ». $p(A)$ est égale à :

A $\dfrac{5}{8}$ B $\dfrac{1}{2}$ C $\dfrac{1}{32}$ D $\dfrac{5}{16}$

Q7 Une boite contient 10 boules : 4 blanches, 3 rouges et 3 vertes (toutes les boules sont indiscernables au toucher). Le tirage d'une boule blanche rapporte 5 points, celui d'une boule rouge 2 points tandis que celui d'une boule verte coûte 1 point (on perd un point). On tire simultanément au hasard 2 boules et on note X la variable aléatoire qui correspond au nombre total de points obtenus.

A $p(X = 7) = \dfrac{1}{15}$

B $p(X = 4) = \dfrac{1}{15}$

C $p(X < 0) = \dfrac{1}{15}$

D $p(X \geq 1) = \dfrac{4}{15}$

Q8 Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = x + 1 + \dfrac{\ln x}{x^2}$ et soit $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ et (Δ) la droite d'équation $y = x + 1$.

A $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

B $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = 1$

C $f'(x) = \dfrac{x^3 + 1 + 2\ln x}{x^3}$

D (Δ) est une asymptote de $(\mathcal{C}_f)$ en $+\infty$

Q9 Soit g la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ par : $g(x) = x + \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$

A $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$

B $\lim\limits_{x\to1^+} g(x) = +\infty$

C g est paire

D L'équation $g'(x) = 0$ admet une seule solution

Q10

A $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(1-x)}{x} = 1$

B $\lim\limits_{x\to0} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$

C $\lim\limits_{x\to0} e^{-\frac{1}{x^2}} = +\infty$

D $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^{x^2}-1}{x} = 1$

Q11 Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x+1)e^{-2x}$. On a :

A Pour tout x de $\mathbb{R}$ $f'(x) = (x+2)e^{-2x}$

B f est décroissante sur $\left]-\infty;-\dfrac{1}{2}\right[$

C $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

D $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

Q12

A $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{t^2}\,dt = \ln 4$

B $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t+1}\,dt = \frac{1}{2}$

C $\displaystyle\int_0^\pi t\cos t\,dt = -2$

D $\displaystyle\int_0^\pi t\sin t\,dt = -2$

Q13 Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout n appartenant à $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

A $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n > 0$

B $u_{n+1} - u_n = \ln\left(\dfrac{n+2}{(n+1)^2}\right)$

C $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \ln(n+2)$

D $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Q14 Soit $(u_n)_n$ la suite numérique définie par : $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

A $(u_n)_n$ est une suite géométrique

B $(\forall n \in \mathbb{N}),\ u_n < 0$

C $(u_n)_n$ est une suite croissante

D $(\forall n \in \mathbb{N}),\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE CHIMIE DE KÉNITRA · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès au cycle préparatoire · ENSC Kénitra

Session de septembre 2019

2019

Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14
C	B	A	C	C	D	C	D	B	B	C	C	A	D

Q1 ✔ Réponse C

Par récurrence $u_n \geq 1$ ($u_0 = 1$ et $u_{n+1} \geq u_n$). Alors $u_{n+1} = u_n(1+u_n) \geq 2u_n$. ($u_1 = 2$: A, B, D sont faux.)

Q2 ✔ Réponse B

De $u_{n+1} \geq 2u_n$ et $u_0 = 1$: $u_n \geq 2^n$, donc $u_n \to +\infty$.

Q3 ✔ Réponse A

$|a|^2 = (\sqrt{3}-1)^2 + (\sqrt{3}+1)^2 = 8$, $|a| = 2\sqrt{2}$.

$\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \cos\dfrac{5\pi}{12}$ et $\sin\theta > 0$: $\arg a = \dfrac{5\pi}{12}$, donc $\arg a^2 = \dfrac{5\pi}{6}$ ($|a^2| = 8$).

Q4 ✔ Réponse C

$2+2i = 2\sqrt{2}e^{i\pi/4}$, donc $u = \dfrac{2\sqrt{2}e^{5i\pi/12}}{2\sqrt{2}e^{i\pi/4}} = e^{i\pi/6}$ ($u^2 = e^{i\pi/3}$, $|u| = 1$).

Q5 ✔ Réponse C

$z = 2e^{-i\pi/6}$ et $1+i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$: $z' = 2\sqrt{2}e^{i\pi/12}$. Par ailleurs $z' = (\sqrt{3}+1) + i(\sqrt{3}-1)$ (A faux) et $\cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ (D faux).

Q6 ✔ Réponse D

$$p(A) = \binom{6}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{20}{64} = \frac{5}{16}.$$

Q7 ✔ Réponse C

$\binom{10}{2} = 45$ tirages. Valeurs : $BB = 10$, $BR = 7$ (12 tirages), $BV = 4$ (12), $RR = 4$ (3), $RV = 1$ (9), $VV = -2$ (3).

$p(X<0) = \dfrac{3}{45} = \dfrac{1}{15}$. ($p(X=7) = \frac{4}{15}$, $p(X=4) = \frac{1}{3}$, $p(X \geq 1) = \frac{14}{15}$.)

Q8 ✔ Réponse D

$f(x) - (x+1) = \dfrac{\ln x}{x^2} \to 0$ en $+\infty$. En 0^+, $f \to -\infty$;

$f'(x) = 1 + \dfrac{1-2\ln x}{x^3} = \dfrac{x^3+1-2\ln x}{x^3}$ (C faux).

Q9 ✔ Réponse B

En 1^+, $\dfrac{x+1}{x-1} \to +\infty$: $g \to +\infty$. g est impaire, tend vers $+\infty$ en $+\infty$, et $g'(x) = \dfrac{x^2-3}{x^2-1}$ s'annule en $\pm\sqrt{3}$ (deux solutions).

Q10 ✔ Réponse B

$|x\sin(1/x)| \leq |x| \to 0$. (A : la limite vaut -1 ; C : 0 ; D : $\frac{e^{x^2}-1}{x} \sim x \to 0$.)

Q11 ✔ Réponse C

$f'(x) = e^{-2x}(1-2(x+1)) = -(2x+1)e^{-2x}$: f croissante sur $]-\infty, -\frac{1}{2}[$. En $-\infty$: $(x+1) \to -\infty$ et $e^{-2x} \to +\infty$, d'où $-\infty$. En $+\infty$, $f \to 0$.

Q12 ✔ Réponse C

$$\int_0^\pi t\cos t\,dt = [t\sin t + \cos t]_0^\pi = -1 - 1 = -2.$$ (A vaut $\frac{1}{2}$, B vaut $\ln 2$, D vaut π.)

Q13 ✔ Réponse A

$\dfrac{n+1}{n} > 1$, donc $u_n > 0$. ($u_{n+1} - u_n = \ln\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$, $v_n = \ln(n+1)$ par télescopage, $u_n \to 0$.)

Q14 ✔ Réponse D

Par récurrence $u_n > 0$, et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-u_n} \leq 1$: la suite est décroissante, non géométrique.