Prof. Taher Bouyguir

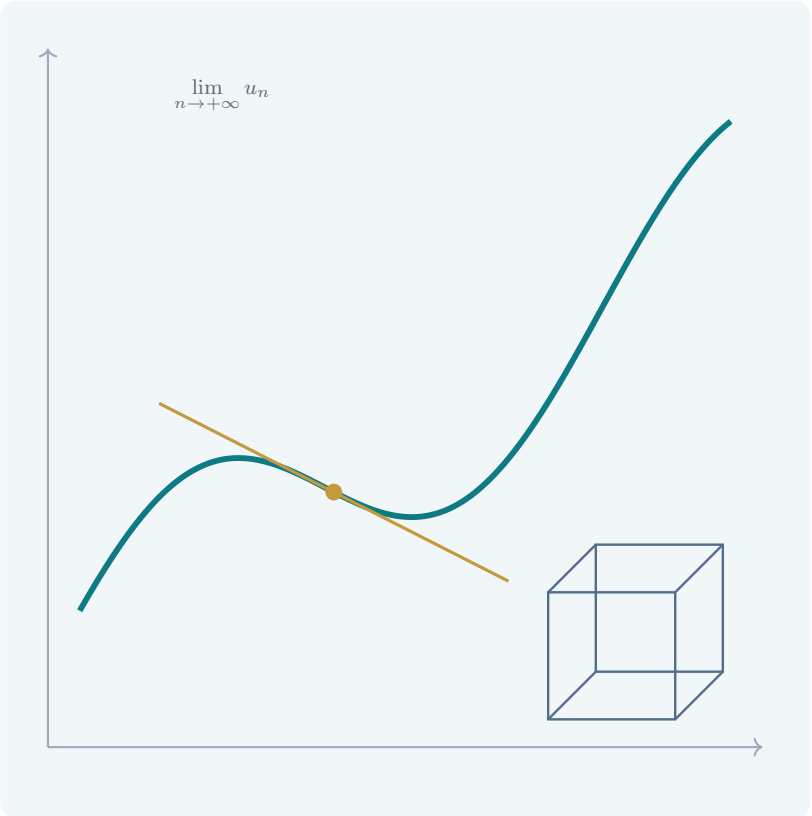
Professeur de mathématiques
Secondaire qualifiant

Prof Taher
Prof Taher Bouyguir
Taher Bouyguir
Contact WhatsApp
Telegram
mr.bouyguir@gmail.com
www.proftaher.com

Concours ENSA

RECUEIL DE CONCOURS

Concours d'accès en 1re année des ENSA



Énoncés et corrections · 2008–2026

Sommaire

I Concours national des ENSA Maroc . . . 3
1 ENSA Maroc 2026 – Énoncé . . . 3
2 ENSA Maroc 2026 – Correction . . . 4
3 ENSA Maroc 2025 – Énoncé . . . 6
4 ENSA Maroc 2025 – Correction . . . 7
5 ENSA Maroc 2024 – Énoncé . . . 9
6 ENSA Maroc 2024 – Correction . . . 10
7 ENSA Maroc 2023 – Énoncé . . . 12
8 ENSA Maroc 2023 – Correction . . . 13
9 ENSA Maroc 2022 – Énoncé . . . 15
10 ENSA Maroc 2022 – Correction . . . 16
11 ENSA Maroc 2021 – Énoncé . . . 18
12 ENSA Maroc 2021 – Correction . . . 19
13 ENSA Maroc 2019 – Énoncé . . . 21
14 ENSA Maroc 2019 – Correction . . . 22
15 ENSA Maroc 2018 – Énoncé . . . 24
16 ENSA Maroc 2018 – Correction . . . 25
17 ENSA Maroc 2017 – Énoncé . . . 27
18 ENSA Maroc 2017 – Correction . . . 28
19 ENSA Maroc 2016 – Énoncé . . . 30
20 ENSA Maroc 2016 – Correction . . . 31
21 ENSA Maroc 2015 – Énoncé . . . 32
22 ENSA Maroc 2015 – Correction . . . 33
23 ENSA Maroc 2014 – Énoncé . . . 34
24 ENSA Maroc 2014 – Correction . . . 35
25 ENSA Maroc 2013 – Énoncé . . . 37
26 ENSA Maroc 2013 – Correction . . . 38

II ENSA Tanger . . . 40
1 ENSA Tanger 2012 – Énoncé . . . 40
2 ENSA Tanger 2012 – Correction . . . 41
3 ENSA Tanger 2011 – Énoncé . . . 43
4 ENSA Tanger 2011 – Correction . . . 44
5 ENSA Tanger 2010 – Énoncé . . . 46
6 ENSA Tanger 2010 – Correction . . . 47
7 ENSA Tanger 2009 – Énoncé . . . 49
8 ENSA Tanger 2009 – Correction . . . 50

III ENSA Khouribga . . . 52
1 ENSA Khouribga 2011 – Énoncé . . . 52
2 ENSA Khouribga 2011 – Correction . . . 53
3 ENSA Khouribga 2010 – Énoncé . . . 54
4 ENSA Khouribga 2010 – Correction . . . 55
5 ENSA Khouribga 2009 – Énoncé . . . 56
6 ENSA Khouribga 2009 – Correction . . . 57
7 ENSA Khouribga 2008 – Énoncé . . . 58
8 ENSA Khouribga 2008 – Correction . . . 59

IV ENSA Oujda . . . 60
1 ENSA Oujda 2012 – Énoncé . . . 60
2 ENSA Oujda 2012 – Correction . . . 61
3 ENSA Oujda 2009 – Énoncé . . . 63
4 ENSA Oujda 2009 – Correction . . . 64

V ENSA Safi . . . 65
1 ENSA Safi 2012 – Énoncé . . . 65
2 ENSA Safi 2012 – Correction . . . 66
3 ENSA Safi 2010 – Énoncé . . . 67
4 ENSA Safi 2010 – Correction . . . 68

VI ENSA Marrakech . . . 69
1 ENSA Marrakech 2011 – Énoncé . . . 69
2 ENSA Marrakech 2011 – Correction . . . 70
3 ENSA Marrakech 2010 – Énoncé . . . 72
4 ENSA Marrakech 2010 – Correction . . . 73
5 ENSA Marrakech 2009 – Énoncé . . . 74
6 ENSA Marrakech 2009 – Correction . . . 75

ÉCOLES NATIONALES DES SCIENCES APPLIQUÉES · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année des ENSA · Maroc

Session de juillet 2026 · Durée 1h30

2026 — Énoncé

Q1 Soit Z un nombre complexe tel que : $Z = \dfrac{(1+i)^4\left(1+i\sqrt{3}\right)^3}{(1-i)^5}$.
Un argument de Z est égale à :

A $\dfrac{2\pi}{3}$ B $\dfrac{5\pi}{4}$ C $\dfrac{\pi}{4}$ D $\dfrac{3\pi}{2}$

Q2 On note S l'ensemble des points M du plan complexe d'affixe z vérifiant : $|i\bar{z}+1-2i| = |z-1|$. Alors

A S est le cercle de centre $\Omega(1,2)$ et de rayon 1
B S est la droite d'équation $y = x-2$
C $S = \mathbb{C}$
D $S = \varnothing$

Q3 Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct, on considère les points $A(2)$, $B(-1+i)$ et $C(3+3i)$.
Le triangle ABC est :

A Équilatéral
B Rectangle en C
C Isocèle et rectangle en A
D Isocèle et rectangle en B

Q4 L'expression simplifiée de $\sum_{k=2}^{n} \ln\left(\dfrac{k^2-1}{k^2}\right)$, $n \geq 2$, est :

A $\ln\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)$ B $\ln\left(\dfrac{2n}{2n+1}\right)$
C $\ln\left(\dfrac{2n+1}{n}\right)$ D $\ln\left(\dfrac{n+1}{2n}\right)$

Q5 On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{k}{\sqrt{4n^2-k^2}}$.
Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ est égale à :

A $2+\sqrt{3}$ B $2-\sqrt{3}$ C $2\sqrt{3}$ D $3\sqrt{2}$

Q6 Soit n un entier naturel. On note a l'entier naturel tel que $0 \leq a \leq 6$ et $3^{2n+1} + 2^{4n+2} \equiv a\ [7]$.
La valeur de a est :

A $a=3$ B $a=2$ C $a=1$ D $a=0$

Q7 Le PGCD de $2^{445}+7$ et 15 est :

A 1 B 2 C 3 D 9

Q8 On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \geq 0$, $u_{n+1} = u_n + e^{u_n}$.
Alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$

A 0 B 1 C e D $+\infty$

Q9 Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 1 + \dfrac{2}{u_n}$, $\forall n \geq 0$.
Alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$

A -1 B $-\infty$ C 2 D $+\infty$

Q10 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\ln(\sin x)}{(\pi-2x)^2} =$

A $\dfrac{-1}{8}$ B $\dfrac{1}{8}$ C 0 D $\dfrac{1}{4}$

Q11 $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{\ln x}{x}\right)^{\frac{1}{x}} =$

A e B 1 C -1 D $\dfrac{1}{e}$

Q12 Soit f la fonction définie sur $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ par : $f(x) = x\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$.
On a : $f'(x) =$

A $\dfrac{x^2+x+1}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}$ B $\dfrac{x^2-x+1}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}$
C $\dfrac{x^2+x-1}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}$ D $\dfrac{x^2+2x-1}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}$

Q13 Soit f la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par $f(x) = \ln(1+x)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f^{(n)}$ la dérivée d'ordre n de f. Alors $f^{(n)}(x) =$

A $\dfrac{n!}{(x+1)^n}$
B $\dfrac{(-1)^n n!}{(x+1)^n}$
C $\dfrac{(n-1)!}{(x+1)^n}$
D $\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+1)^n}$

Q14 Soient $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}}\,dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}}\,dx$. Alors,

A $I = J = \dfrac{\pi}{4}$ B $I = J = \dfrac{\pi}{2}$
C $I = \dfrac{\pi}{4}$ et $J = \pi$ D $I = J = 0$

Q15 La valeur de l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{1}{1+\sin x}\,dx$ est :

A $1-\sqrt{2}$ B $1+\sqrt{2}$
C $2+\sqrt{2}$ D $2-\sqrt{2}$

Q16 Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{1+(\ln(x))^2}}$.
La primitive de f sur $]0,+\infty[$ qui s'annule en 1 est :

A $\ln\left(2x+\sqrt{1+(\ln x)^2}\right)$
B $\ln\left(\ln x+\sqrt{1+(\ln x)^2}\right)$
C $\ln\left(x\ln x+\sqrt{1+(\ln x)^2}\right)$
D $2\ln\left(\ln x+\sqrt{1+(\ln x)^2}\right)$

Q17 Soient $\mathcal{C}$ le cercle de centre $\Omega(2;-1)$ et de rayon $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$, et D la droite d'équation $2x+y=0$.
Une droite tangente à $\mathcal{C}$ et parallèle à D a pour équation :

A $2x+y-\dfrac{1}{2}=0$ B $2x+y-1=0$
C $2x+y-2=0$ D $2x+y+1=0$

Q18 On considère la droite $\mathcal{D}$ passant par $A(1,-2,0)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}(1,1,-1)$. Soit $B(0,1,-2)$ un point de l'espace. Les coordonnées du point H, projeté orthogonal de B sur $\mathcal{D}$ sont :

A $\left(\dfrac{7}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{4}{3}\right)$ B $\left(\dfrac{7}{3},-\dfrac{2}{3},-\dfrac{4}{3}\right)$
C $\left(\dfrac{7}{6},-\dfrac{5}{6},-\dfrac{4}{3}\right)$ D $\left(\dfrac{1}{3},-\dfrac{1}{3},-\dfrac{2}{3}\right)$

Q19 Un étudiant se rend à l'université pour passer un concours. Pour ce trajet, il a le choix entre quatre itinéraires possibles, notés A, B, C et D. Les probabilités qu'il choisisse les itinéraires A, B et C sont respectivement : $P(A) = \dfrac{1}{3}$, $P(B) = \dfrac{1}{4}$, $P(C) = \dfrac{1}{12}$.
Les probabilités d'arriver en retard en empruntant ces trois itinéraires sont données par : $P(R \mid A) = \dfrac{1}{20}$, $P(R \mid B) = \dfrac{1}{10}$, $P(R \mid C) = \dfrac{1}{5}$, où R désigne l'événement arriver en retard.
En revanche, l'itinéraire D présente une fiabilité totale : l'étudiant n'arrive jamais en retard lorsqu'il l'emprunte. Autrement dit : $P(R \mid D) = 0$. Sachant que l'étudiant arrive en retard, la probabilité p qu'il ait emprunté l'itinéraire C est

A $p = \dfrac{2}{7}$ B $p = \dfrac{1}{7}$
C $p = \dfrac{3}{7}$ D $p = \dfrac{1}{2}$

Q20 Une information de type *vrai/faux* est transmise à l'intérieur d'une population. À chaque transmission :

- avec une probabilité p $(0 < p < 1)$, l'information est transmise fidèlement à la personne suivante ;
- avec une probabilité $1-p$, l'information est transmise de manière contraire.

On note p_n la probabilité que l'information soit correcte après n transmissions, avec $p_0 = 1$.

A $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \dfrac{1}{5}$ B $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \dfrac{1}{4}$
C $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \dfrac{1}{3}$ D $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \dfrac{1}{2}$

ÉCOLES NATIONALES DES SCIENCES APPLIQUÉES · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année des ENSA · Maroc

Session de juillet 2026 · Durée 1h30

2026 — Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14
B	B	C	D	B	D	C	D	C	A	B	C	D	A

Q15	Q16	Q17	Q18	Q19	Q20
D	B	A	B	A	D

Q1 — ✔ Réponse B

$(1+i)^4 = (2i)^2 = -4$ et $\left(1+i\sqrt{3}\right)^3 = \left(2e^{i\pi/3}\right)^3 = -8$: le numérateur vaut 32, d'argument 0. Comme $(1-i)^5 = \left(\sqrt{2}\,e^{-i\pi/4}\right)^5$ a pour argument $-\dfrac{5\pi}{4}$, $\arg Z \equiv \dfrac{5\pi}{4}\ [2\pi]$.

Q2 — ✔ Réponse B

$i\overline{z} + 1 - 2i = i\,(\overline{z} - 2 - i)$, donc $|i\overline{z}+1-2i| = |z-(2-i)|$. La condition $|z-(2-i)| = |z-1|$ décrit la médiatrice de $[PQ]$ avec $P(2,-1)$ et $Q(1,0)$: elle passe par $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ et est dirigée par $(1,1)$, d'où $y = x - 2$.

Q3 — ✔ Réponse C

$\overrightarrow{AB}(-3,1)$ et $\overrightarrow{AC}(1,3)$: $AB = AC = \sqrt{10}$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -3+3 = 0$. Le triangle est isocèle et rectangle en A.

Q4 — ✔ Réponse D

$\dfrac{k^2-1}{k^2} = \dfrac{k-1}{k}\cdot\dfrac{k+1}{k}$, et les produits sont télescopiques :

$$\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k}\cdot\prod_{k=2}^{n}\frac{k+1}{k} = \frac{1}{n}\cdot\frac{n+1}{2} = \frac{n+1}{2n}.$$

Q5 — ✔ Réponse B

C'est une somme de Riemann : $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k/n}{\sqrt{4-(k/n)^2}} \to \int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{4-x^2}} = \Big[-\sqrt{4-x^2}\Big]_0^1 = 2-\sqrt{3}$.

Q6 — ✔ Réponse D

$3^{2n+1} = 3\times 9^n \equiv 3\times 2^n\ [7]$ et $2^{4n+2} = 4\times 16^n \equiv 4\times 2^n\ [7]$. La somme est $\equiv 7\times 2^n \equiv 0\ [7]$: $a = 0$.

Q7 — ✔ Réponse C

$2^4 = 16 \equiv 1\ [15]$ et $445 = 4\times 111 + 1$, donc $2^{445} + 7 \equiv 2 + 7 = 9\ [15]$. Ce nombre est divisible par 3 mais pas par 5 : le PGCD vaut 3.

Q8 — ✔ Réponse D

$u_{n+1} - u_n = e^{u_n} > 0$: la suite est croissante, donc $u_n \geq 1$ et $u_{n+1} - u_n \geq e$. Ainsi $u_n \geq 1 + ne \to +\infty$.

Q9 — ✔ Réponse C

$u_n > 0$ pour tout n, donc $u_{n+1} - 2 = \dfrac{2-u_n}{u_n}$. On a $u_n \geq 1$, puis $u_n \geq \dfrac{3}{2}$ dès $n \geq 2$ ($u_n \leq 3$), d'où $|u_{n+1}-2| \leq \dfrac{2}{3}|u_n - 2|$: $u_n \to 2$ (point fixe positif de $\ell = 1 + \frac{2}{\ell}$).

Q10 — ✔ Réponse A

Avec $x = \dfrac{\pi}{2} + h$: $\sin x = \cos h$ et $\ln(\cos h) \sim -\dfrac{h^2}{2}$, tandis que $(\pi - 2x)^2 = 4h^2$. La limite vaut $-\dfrac{1}{8}$.

Q11 — ✔ Réponse B

$\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)^{1/x} = \exp\left(\dfrac{\ln(\ln x) - \ln x}{x}\right)$ et l'exposant tend vers 0 : la limite vaut $e^0 = 1$.

Q12 — ✔ Réponse C

Pour $x > 1$:

$$f'(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\left(1 + \frac{x}{x^2-1}\right) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x+1}\cdot\frac{x^2+x-1}{x^2-1} = \frac{x^2+x-1}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}.$$

Q13 — ✔ Réponse D

$f'(x) = (1+x)^{-1}$, $f''(x) = -(1+x)^{-2}$, $f'''(x) = 2(1+x)^{-3}\ldots$ Par récurrence, $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+1)^n}$.

Q14 — ✔ Réponse A

Le changement $x \mapsto \dfrac{\pi}{2} - x$ échange sin et cos : $I = J$. Et $I + J = \displaystyle\int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2}$, donc $I = J = \dfrac{\pi}{4}$.

Q15 — ✔ Réponse D

$\dfrac{1}{1+\sin x} = \dfrac{1-\sin x}{\cos^2 x}$ a pour primitive $\tan x - \dfrac{1}{\cos x}$. L'intégrale vaut $\left(1-\sqrt{2}\right) - (0-1) = 2 - \sqrt{2}$.

Q16 — ✔ Réponse B

Avec $u = \ln x$: $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \ln\left(u + \sqrt{1+u^2}\right)$. La primitive $\ln\left(\ln x + \sqrt{1+(\ln x)^2}\right)$ vaut $\ln 1 = 0$ en $x = 1$.

Q17 — ✔ Réponse A

Les parallèles à D ont pour équation $2x + y + c = 0$. Tangence : $\dfrac{|4-1+c|}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$, soit $|3+c| = \dfrac{5}{2}$, $c = -\dfrac{1}{2}$ ou $c = -\dfrac{11}{2}$. Seule $2x + y - \dfrac{1}{2} = 0$ est proposée.

Q18 — ✔ Réponse B

$H = A + t\,\vec{u}$ avec $t = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2} = \dfrac{-1+3+2}{3} = \dfrac{4}{3}$ ($\overrightarrow{AB}(-1,3,-2)$). Donc $H\left(\dfrac{7}{3}, -\dfrac{2}{3}, -\dfrac{4}{3}\right)$.

Q19 ✔ Réponse **A**

$P(R) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{20} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{10} + \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{5} + 0 = \frac{2+3+2}{120} = \frac{7}{120}$, et $P(C \cap R) = \frac{1}{60} = \frac{2}{120}$. Donc $p = \frac{2}{7}$.

Q20 ✔ Réponse **D**

$p_{n+1} = p\,p_n + (1-p)(1-p_n) = (2p-1)p_n + 1 - p$. Le point fixe est $\frac{1}{2}$ et $p_n - \frac{1}{2} = (2p-1)^n\left(p_0 - \frac{1}{2}\right) \to 0$ car $|2p-1| < 1$.

ÉCOLES NATIONALES DES SCIENCES APPLIQUÉES · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année des ENSA · Maroc

Session de juillet 2025 · Durée 1h30

2025 — Énoncé

Q1 Le nombre complexe : $Z = \left(-1+i\sqrt{3}\right)^{2010} + \left(-1-i\sqrt{3}\right)^{2010}$.
La valeur de Z est :

A 2^{2009}

B $2i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\exp\left(\frac{i4\pi}{3}\right)$

C $2\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)\exp\left(\frac{i2\pi}{3}\right)$

D 2^{2011}

Q2 Dans $\mathbb{C}$, on considère l'équation (1) : $z^6 = (1-i)\bar{z}$.
On note z une solution non nulle quelconque de l'équation (1). Alors :

A $|z| = 1$ B $|z| = \sqrt{3}$
C $|z| = 2^{1/5}$ D $|z| = 2^{1/10}$

Q3 Dans $\mathbb{C}$, on considère l'équation (2) : $z^2 + z + 1 = \frac{1}{z+1}$.
On note z_1 et z_2 les solutions non réelles de l'équation (2). On a :

A $|z_1| = |z_2|$ B $|z_1| > |z_2|$
C $|z_1| < |z_2|$ D $|z_1| = 2|z_2|$

Q4 On note S l'ensemble des points du plan complexe M dont l'affixe z vérifie $|z-3| = \frac{\sqrt{2}}{2}|z-5|$. Alors :

A $S = \varnothing$
B $L = \mathbb{C}$
C S = le cercle de centre $(1,0)$ et de rayon $2\sqrt{2}$
D S = le cercle de centre $(0,1)$ et de rayon $\frac{1}{2}$

Q5 Dans le plan complexe, on considère les points A, B, C et D d'affixe respective 1, -1, i et $-i$. On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1. Si $M \in \mathbb{U}$, on note $p(M)$ le produit des distances de M aux points A, B, C, D : $p(M) = MA \times MB \times MC \times MD$.
On pose $m = \sup_{M\in\mathbb{U}} p(M)$. Alors la valeur de m est :

A $m = 1$ B $m = 2$
C $m = 3$ D $m = +\infty$

Q6 Soit a l'entier naturel défini par : $(2025)^{2025} \equiv a \bmod 7$.
La valeur de a est :

A $a = 3$ B $a = 2$ C $a = 5$ D $a = 1$

Q7 Le PGCD de $3^{123} - 5$ et 125 est :

A 1 B 5 C 25 D 125

Q8 On considère la suite (u_n) définie par : $u_n = \frac{\ln\left(1+\sqrt{n}\right)}{\ln\left(1+n^3\right)}$.
On note $L = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

A $L = 1$ B $L = \sqrt{3}$
C $L = \frac{1}{6}$ D $L = \frac{1}{3}$

Q9 Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+2u_n}$, $\forall n \geq 0$.
En considérant la suite $v_n = \frac{1}{u_n}$, on trouve :

A $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = 0$ B $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = 1$
C $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = \frac{1}{2}$ D $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = \frac{1}{4}$

Q10 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $u_n = \sqrt{n+\sqrt{n-1+\sqrt{\cdots+\sqrt{1}}}}$.
La limite L de la suite (u_n) est :

A $L = 1$ B $L = \frac{\pi}{2}$
C $L = +\infty$ D $L = 0$

Q11 On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$.
La limite de S_n est :

A 0 B $\frac{1}{2}$ C 1 D 2

Q12 En admettant que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre réel $\left(3+\sqrt{5}\right)^n + \left(3-\sqrt{5}\right)^n$ est un entier pair, la limite $L = \lim\limits_{n\to+\infty} \cos\left(\left(3+\sqrt{5}\right)^n \pi\right)$ vaut :

A $L = 0$ B $L = -1$
C $L = 1$ D $L = \frac{\pi}{4}$

Q13 Soit $a > 0$, alors $\lim\limits_{x\to a^+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}-\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$ est :

A $-\frac{1}{\sqrt{2a}}$ B $-\frac{1}{\sqrt{a}}$ C $\frac{1}{\sqrt{a}}$ D $-\frac{2}{\sqrt{a}}$

Q14 On note I_n la suite définie par : $I_n = \int_0^1 \frac{x}{1+x^{2n}}\,dx$.
La limite L de I_n est :

A $L = \frac{1}{2}$ B $L = \frac{3}{2}$
C $L = 0$ D $L = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Q15 La valeur de l'intégrale $I = \int_0^{\sqrt{3}} x^2 \ln\left(x^2+1\right) dx$ est :

A $I = \sqrt{3}\ln(2) - \frac{\pi}{9}$
B $I = \sqrt{3}\ln(2) + \frac{\pi}{9}$
C $I = 2\left(\sqrt{3}\ln(2) - \frac{\pi}{9}\right)$
D $I = \sqrt{3}\ln(2)$

Q16 Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \frac{2\ln(x)}{x\left(1+(\ln(x))^2\right)}$.
La primitive de f sur $]0,+\infty[$ qui s'annule en 1 est :

A $\ln\left(1+(\ln(x))^2\right)$
B $(\ln(x))^2$
C $2\ln\left(1+(\ln(x))^2\right)$
D $\frac{x\ln(x)}{\ln(x)+1}$

Q17 Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère le plan (P) d'équation $2x-5y-6z+4=0$ et (S) la sphère de centre $\Omega(2;-2;3)$ et de rayon 3, alors :

A (P) coupe (S) suivant un cercle de rayon 3 et de centre Ω
B (P) coupe (S) suivant un cercle de rayon 3 et de centre le point de coordonnées $(2;2;3)$
C (P) est tangent à (S) au point de coordonnées $(2;2;3)$
D (P) est tangent à (S) au point de coordonnées $(2;0;-3)$

Q18 On jette deux fois de suite une pièce de monnaie non truquée et on note les arrivées de pile et de face. Soit p la probabilité d'avoir deux fois face sachant que le premier jet a donné face.

A $p = \frac{1}{2}$ B $p = \frac{1}{3}$
C $p = \frac{1}{4}$ D $p = \frac{3}{4}$

Q19 Une usine fabrique des composants électroniques et dispose d'une machine pour tester s'ils sont défectueux ou non. Les résultats sont comme suit :

- **Si le composant est défectueux :** la machine le détecte dans 90% des cas et dans 10% des cas elle échoue.
- **Si le composant n'est pas défectueux :** la machine l'indique correctement dans 99% des cas et elle échoue dans 1% des cas.

On tire au hasard un composant dans une large population où l'on sait que $0{,}1\%$ des composants sont défectueux, et on note p la probabilité qu'un composant tiré au hasard soit détecté défectueux par la machine. Alors $p =$

A $1{,}041\%$ B $1{,}089\%$
C $1{,}025\%$ D 1%

Q20 On jette n fois de suite un dé non truqué numéroté de 1 à 6, $n \geq 2$, et on note les numéros des faces obtenues. Soit p_n la probabilité d'avoir un nombre inférieur ou égal à 3 dans le second jet sachant que le premier jet a donné la face numéro 2. Soit $p = \lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.
La valeur de p est :

A $p = \frac{1}{2}$ B $p = \frac{1}{3}$ C $p = \frac{1}{6}$ D $p = 0$

ÉCOLES NATIONALES DES SCIENCES APPLIQUÉES · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année des ENSA · Maroc

Session de juillet 2025 · Durée 1h30

2025 — Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14
D	D	A	C	B	D	A	C	C	C	D	C	A	A

Q15	Q16	Q17	Q18	Q19	Q20
C	A	A	A	B	A

Q1 ✔ Réponse D

$-1+i\sqrt{3}=2e^{2i\pi/3}$, donc $\left(-1+i\sqrt{3}\right)^{2010}=2^{2010}e^{1340i\pi}=2^{2010}$. De même pour le conjugué, d'où $Z=2\times 2^{2010}=2^{2011}$.

Q2 ✔ Réponse D

En passant aux modules : $|z|^6=\sqrt{2}\,|z|$, et $z\neq 0$ donne $|z|^5=\sqrt{2}=2^{1/2}$, soit $|z|=2^{1/10}$.

Q3 ✔ Réponse A

Pour $z\neq -1$: $(z^2+z+1)(z+1)=1 \iff z^3+2z^2+2z=0 \iff z(z^2+2z+2)=0$. Les solutions non réelles sont $-1\pm i$, conjuguées : $|z_1|=|z_2|=\sqrt{2}$.

Q4 ✔ Réponse C

Avec $z=x+iy$: $2\left[(x-3)^2+y^2\right]=(x-5)^2+y^2 \iff x^2-2x+y^2-7=0 \iff (x-1)^2+y^2=8$: cercle de centre $(1,0)$ et de rayon $2\sqrt{2}$.

Q5 ✔ Réponse B

A,B,C,D ont pour affixes les racines de z^4-1, donc $p(M)=|z^4-1|\leq |z|^4+1=2$, avec égalité pour $z^4=-1$ (par exemple $z=e^{i\pi/4}$). Donc $m=2$.

Q6 ✔ Réponse D

$2025=7\times 289+2$, donc $2025^{2025}\equiv 2^{2025}\ [7]$. Or $2^3=8\equiv 1\ [7]$ et $2025=3\times 675$, d'où $2^{2025}\equiv 1\ [7]$: $a=1$.

Q7 ✔ Réponse A

$125=5^3$; il suffit de voir si 5 divise $3^{123}-5$, c'est-à-dire 3^{123}. Or $3^4\equiv 1\ [5]$ et $123=4\times 30+3$, donc $3^{123}\equiv 27\equiv 2\ [5]$: 5 ne divise pas $3^{123}-5$, le PGCD vaut 1.

Q8 ✔ Réponse C

$\ln\left(1+\sqrt{n}\right)\sim \ln\sqrt{n}=\dfrac{1}{2}\ln n$ et $\ln\left(1+n^3\right)\sim 3\ln n$, donc $u_n\to\dfrac{1/2}{3}=\dfrac{1}{6}$.

Q9 ✔ Réponse C

$v_{n+1}=\dfrac{1+2u_n}{u_n}=v_n+2$: (v_n) est arithmétique, $v_n=1+2n$.

Donc $nu_n=\dfrac{n}{1+2n}\to\dfrac{1}{2}$.

Q10 ✔ Réponse C

$u_n\geq\sqrt{n}\to+\infty$, donc $L=+\infty$.

Q11 ✔ Réponse D

Les $2n+1$ termes sont compris entre $\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2n+1}}=\dfrac{1}{n+1}$ et $\dfrac{1}{n}$:

$$\frac{2n+1}{n+1}\leq S_n\leq\frac{2n+1}{n},$$

et les deux bornes tendent vers 2.

Q12 ✔ Réponse C

Avec $(3+\sqrt{5})^n=2K_n-(3-\sqrt{5})^n$ (K_n entier) : $\cos\left((3+\sqrt{5})^n\pi\right)=\cos\left((3-\sqrt{5})^n\pi\right)$. Comme $0<3-\sqrt{5}<1$, $(3-\sqrt{5})^n\to 0$ et $L=\cos 0=1$.

Q13 ✔ Réponse A

On pose $x=a+h$, $h\to 0^+$. $\sqrt{x}-\sqrt{a}\sim\dfrac{h}{2\sqrt{a}}$ est négligeable devant $\sqrt{h}$, donc le numérateur est équivalent à $-\sqrt{h}$, et le dénominateur $\sqrt{h(2a+h)}\sim\sqrt{2a}\sqrt{h}$. La limite vaut $-\dfrac{1}{\sqrt{2a}}$.

Q14 ✔ Réponse A

$0\leq\dfrac{x}{1}-\dfrac{x}{1+x^{2n}}=\dfrac{x^{2n+1}}{1+x^{2n}}\leq x^{2n+1}$, donc $0\leq\dfrac{1}{2}-I_n\leq\dfrac{1}{2n+2}\to 0$: $L=\dfrac{1}{2}$.

Q15 ✔ Réponse C

Par parties :

$$I=\left[\frac{x^3}{3}\ln(x^2+1)\right]_0^{\sqrt{3}}-\frac{2}{3}\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x^4}{x^2+1}\,dx.$$

Le crochet vaut $\sqrt{3}\ln 4=2\sqrt{3}\ln 2$, et $\dfrac{x^4}{x^2+1}=x^2-1+\dfrac{1}{x^2+1}$ donne $\dfrac{2}{3}\left[\dfrac{x^3}{3}-x+\arctan x\right]_0^{\sqrt{3}}=\dfrac{2\pi}{9}$. Donc $I=2\left(\sqrt{3}\ln 2-\dfrac{\pi}{9}\right)$.

Q16 ✔ Réponse A

Avec $u=\ln x$, $f(x)=\dfrac{2u'u}{1+u^2}$: une primitive est $\ln\left(1+(\ln x)^2\right)$, qui vaut 0 en $x=1$.

Q17 ✔ Réponse A

$d(\Omega,P)=\dfrac{|4+10-18+4|}{\sqrt{65}}=0$: le plan passe par le centre, il coupe (S) suivant un grand cercle de centre Ω et de rayon 3.

Q18 ✔ Réponse A

Les deux jets sont indépendants : $p=P(F_2)=\dfrac{1}{2}$.

Q19 ✔ Réponse **B**

Probabilités totales :

$$p = 0{,}001 \times 0{,}9 + 0{,}999 \times 0{,}01 = 0{,}0009 + 0{,}00999 = 0{,}01089,$$

soit $p = 1{,}089\%$.

Q20 ✔ Réponse **A**

Les jets sont indépendants : $p_n = P(\text{second jet} \leq 3) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ pour tout $n \geq 2$, donc $p = \frac{1}{2}$.

ÉCOLES NATIONALES DES SCIENCES APPLIQUÉES · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année des ENSA · Maroc

Session de juillet 2024

2024 Énoncé

Q1 Dans une salle d'examen où les places sont numérotées, 100 candidats passent un concours d'accès aux ENSA. On dispose des feuilles de brouillon de trois couleurs différentes ordonnées ainsi : bleu, vert, jaune.
Une feuille sur quatre, en commençant par la quatrième, contient le logo des ENSA.
Les feuilles sont distribuées, en respectant l'ordre des numéros des places ainsi que celui des couleurs mentionnées ci-dessus. Le nombre de candidats ayant reçu une feuille de brouillon jaune contenant le logo est :

A 8 B 10 C 12 D 15

Q2 $\frac{1}{5}\cdot\sqrt{(101\times102\times103\times104)+1}=$

A 2101 B 2102 C 2103 D 2104

Q3 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(-1)^n\,n+1}{n+\sqrt{n}}=$

A 0
B 1
C -1
D n'a pas de limite

Q4 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos\left(\frac{2}{3}x\right)-\sqrt{3}\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)}{\cos(2x)}=$

A $\frac{11}{3}$ B $\frac{10}{6}$ C $\frac{10}{3}$ D $\frac{11}{6}$

Q5 Soit (u_n) une suite de réels éléments de $]0,1[$ telle que
$\forall n\in\mathbb{N},\ (1-u_n)u_{n+1}>\frac{1}{4}$.

A u_n est croissante et converge vers $\frac{1}{4}$
B u_n est décroissante et converge vers $\frac{1}{4}$
C u_n est croissante et converge vers $\frac{1}{2}$
D u_n est divergente

Q6 Dans l'ensemble $\mathbb{R}$, l'équation :

$$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=1$$

A admet une solution
B admet deux solutions
C admet trois solutions
D n'admet pas de solution

Q7 Soit $m\in\mathbb{R}$ et (E_m) l'équation d'inconnue réelle x :

$$(E_m):e^{2x}-2me^x+1=0$$

A Si $m\in]1,+\infty[$, (E_m) admet deux solutions de signe contraire
B Si $m\in]-1,1[$, (E_m) admet au moins une solution
C Si $m\in]-\infty,-1]$, (E_m) admet deux solutions négatives
D Si $m\in[1,+\infty[$, (E_m) admet deux solutions positives

Q8 Soit une fonction $f:[0,+\infty[\to[0,+\infty[$ dérivable telle que $f(0)=0$.
On suppose que :
$\forall x\geq0,\ f'(x)\leq af(x)\quad(a>0)$

A f est strictement croissante
B f est strictement décroissante
C f est une constante nulle
D f est une constante non nulle

Q9 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\begin{cases}e^{\frac{-1}{x^2}} & \text{si } x>0\\ 0 & \text{si } x\leq0\end{cases},\quad f' \text{ sa dérivée}$$

$$\lim_{x\to0}f'(x)=$$

A 0 B 1 C e D $+\infty$

Q10 $\displaystyle\int_1^2\frac{\ln(1+x)-\ln(x)}{x^2}\,dx=$

A $\frac{5}{2}\ln2+\frac{1}{2}\ln3$
B $\frac{7}{2}\ln2+\frac{3}{2}\ln3$
C $\frac{7}{2}\ln2-\frac{3}{2}\ln3-\frac{1}{2}$
D $\frac{7}{2}\ln2$

Q11 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x)e^x\,dx=$

A $1+e^{\frac{\pi}{2}}$ B $\frac{1+e^{\frac{\pi}{2}}}{2}$
C $5-e^{\frac{\pi}{2}}$ D $\frac{5-e^{\frac{\pi}{2}}}{2}$

Q12 $\forall n\in\mathbb{N}^*$, on pose :

$$I_n=\int_0^1\frac{dt}{(1+t^n)^2},\ \text{alors :}\ \lim_{n\to+\infty}I_n=$$

(Il n'est pas nécessaire de calculer I_n)

A 2 B $+\infty$ C $\frac{1}{4}$ D 1

Q13 Le nombre de diviseurs du nombre $10!$ est égal à :

A 20 B 207 C 270 D 10

Q14 Le reste de la division euclidienne du nombre $2^{123}+3^{121}$ par 11 est égal à :

A 0 B 1 C 2 D 3

Q15 Soit z_1 et z_2 les solutions de l'équation à variables complexes suivante :

$$iz^2+(2-3i)z+5i-5=0$$

$$|z_1|^2+|z_2|^2=$$

A 10 B 15 C 20 D 30

Q16 Soit le nombre complexe :

$$Z=\frac{1}{2}\left[(1+i)^4+(i-1)^4\right]$$

$\text{argument}(Z)\equiv$

A $0\ [2\pi]$ B $\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$
C $\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ D $\pi\ [2\pi]$

Q17 Dans le plan rapporté au repère orthonormé directe $(O,\vec{i},\vec{j})$, on considère les points A, B et C de coordonnées $A(2,6)$, $B(3,1)$ et $C(4,7)$. La distance du point A à la droite (BC) est égale à :

A $\frac{35}{\sqrt{37}}$ B $\frac{6}{\sqrt{37}}$ C $\frac{11}{\sqrt{37}}$ D $\frac{1}{\sqrt{37}}$

Q18 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points $A(1,-1,2)$, $B(3,5,4)$ et la sphère S telle que : $A,B\in S$ et le segment $[AB]$ passe par le centre de S.
L'équation du plan tangent à S au point $C(1,5,4)$ est :

A $2x-3y+3z+1=0$
B $x-3y+2z+6=0$
C $-x+3y+z-18=0$
D $-3x+2y+2z-15=0$

Une start-up de jeunes ingénieurs fabrique des capteurs de température dans deux sites différents.
En une journée, le site 1 fabrique deux fois plus de capteurs que le site 2.
Le pourcentage de capteurs défectueux est de 3% pour le site 1 et de 4% pour le site 2.
On prélève un capteur au hasard dans l'ensemble de la production d'une journée.

Q19 La probabilité que ce capteur provienne du site 1 et est défectueux est :

A 0,01 B 0,02 C 0,03 D 0,04

Q20 La probabilité que ce capteur provienne du site 1 sachant qu'il est défectueux est :

A 0,2 B 0,4 C 0,6 D 0,8

ÉCOLES NATIONALES DES SCIENCES APPLIQUÉES · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année des ENSA · Maroc

Session de juillet 2024

2024

Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14
A	A	D	B	C	D	A	C	A	C	B	D	C	A

Q15	Q16	Q17	Q18	Q19	Q20
B	D	C	C	B	C

Q1 ✔ Réponse A

Le candidat numéro k reçoit une feuille jaune si et seulement si k est un multiple de 3, et une feuille avec le logo si et seulement si k est un multiple de 4.
Il faut donc compter les multiples de $\mathrm{ppcm}(3,4)=12$ entre 1 et 100 : $12, 24, \ldots, 96$, soit $\left\lfloor \frac{100}{12} \right\rfloor = 8$ candidats.

Q2 ✔ Réponse A

Pour tout entier n :
$n(n+1)(n+2)(n+3)+1 = (n^2+3n)(n^2+3n+2)+1 = (n^2+3n+1)^2$.
Avec $n=101$:
$n^2+3n+1 = 10201+303+1 = 10505$, donc

$$\frac{1}{5}\sqrt{(101\times 102\times 103\times 104)+1} = \frac{10505}{5} = 2101.$$

Q3 ✔ Réponse D

Notons $u_n = \dfrac{(-1)^n n+1}{n+\sqrt{n}}$.
Pour n pair : $u_n = \dfrac{n+1}{n+\sqrt{n}} \to 1$. Pour n impair : $u_n = \dfrac{-n+1}{n+\sqrt{n}} \to -1$.
Les deux suites extraites ont des limites différentes : la suite n'a pas de limite.

Q4 ✔ Réponse B

En $\frac{\pi}{4}$, le numérateur vaut $\cos\frac{\pi}{6} - \sqrt{3}\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$ et le dénominateur $\cos\frac{\pi}{2} = 0$: forme indéterminée.
Les deux fonctions sont dérivables et s'annulent en $\frac{\pi}{4}$, donc la limite est le quotient des nombres dérivés (taux d'accroissement) :

$$N'(x) = -\tfrac{2}{3}\sin\left(\tfrac{2}{3}x\right) - 2\sqrt{3}\cos\left(2x-\tfrac{\pi}{3}\right), \quad N'\left(\tfrac{\pi}{4}\right) = -\tfrac{1}{3} - 3 = -\tfrac{10}{3}$$

$$D'(x) = -2\sin(2x), \quad D'\left(\tfrac{\pi}{4}\right) = -2.$$

La limite vaut $\dfrac{-10/3}{-2} = \dfrac{5}{3} = \dfrac{10}{6}$.

Q5 ✔ Réponse C

Pour tout réel t :
$t(1-t) = \frac{1}{4} - \left(t-\frac{1}{2}\right)^2 \le \frac{1}{4}$. Donc

$$(1-u_n)u_{n+1} > \tfrac{1}{4} \ge (1-u_n)u_n,$$

et comme $1-u_n>0$: $u_{n+1}>u_n$. La suite est croissante et majorée par 1, donc elle converge vers un réel $\ell \in]0,1]$.
Par passage à la limite : $(1-\ell)\ell \ge \frac{1}{4}$, c'est-à-dire $\left(\ell-\frac{1}{2}\right)^2 \le 0$, donc $\ell = \frac{1}{2}$.

Q6 ✔ Réponse D

L'équation impose $x \ge 1$. Posons $t = \sqrt{x-1} \ge 0$, donc $x = t^2+1$:

$$x+2t = (t+1)^2, \qquad x-2t = (t-1)^2.$$

L'équation devient $(t+1)+|t-1| = 1$.
- Si $t \ge 1$: $2t = 1$, soit $t = \frac{1}{2}$, impossible.
- Si $0 \le t < 1$: $(t+1)+(1-t) = 2 = 1$, impossible.

L'équation n'a pas de solution.

Q7 ✔ Réponse A

Avec $X = e^x > 0$, l'équation devient $X^2 - 2mX + 1 = 0$, de discriminant réduit m^2-1. Le produit des racines vaut 1 et leur somme $2m$.
- Si $m > 1$: deux racines positives distinctes $X_1 < 1 < X_2$ (produit 1), donc $x_1 = \ln X_1 < 0 < x_2 = \ln X_2$: deux solutions de signe contraire. **A est vraie.**
- Si $-1 < m < 1$: discriminant négatif, aucune solution (B fausse).
- Si $m \le -1$: les racines sont négatives (ou $X=-1$), aucune ne vaut e^x (C fausse).
- Si $m = 1$: $X = 1$ racine double, une seule solution $x = 0$ (D fausse).

Q8 ✔ Réponse C

Posons $g(x) = e^{-ax}f(x)$. Alors $g'(x) = e^{-ax}(f'(x) - af(x)) \le 0$: g est décroissante sur $[0,+\infty[$.
Donc $g(x) \le g(0) = 0$. Mais $g(x) \ge 0$ car f est à valeurs positives. Ainsi $g = 0$, puis $f = 0$: f est la constante nulle.

Q9 ✔ Réponse A

Pour $x<0$: $f'(x) = 0$. Pour $x>0$: $f'(x) = \dfrac{2}{x^3}e^{-1/x^2}$.
En posant $u = \frac{1}{x^2} \to +\infty$ quand $x \to 0^+$: $\dfrac{2}{x^3}e^{-1/x^2} = 2u^{3/2}e^{-u} \to 0$ (croissances comparées).
Les limites à gauche et à droite valent 0, donc $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 0$.

Q10 ✔ Réponse C

Intégration par parties avec $u(x) = \ln(1+x) - \ln x$, $u'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{x} = -\frac{1}{x(1+x)}$, et $v(x) = -\frac{1}{x}$:

$$\int_1^2 \frac{\ln(1+x)-\ln x}{x^2}dx = \left[-\frac{\ln(1+x)-\ln x}{x}\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{dx}{x^2(1+x)}.$$

Le crochet vaut $-\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2} + \ln 2 = \frac{3}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 3$.
Avec $\dfrac{1}{x^2(1+x)} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{1+x}$:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x^2(1+x)} = \left[-\ln x - \frac{1}{x} + \ln(1+x)\right]_1^2 = -2\ln 2 + \ln 3 + \frac{1}{2}.$$

Donc l'intégrale vaut $\frac{3}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 3 + 2\ln 2 - \ln 3 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2}\ln 2 - \frac{3}{2}\ln 3 - \frac{1}{2}$.

Q11 ✔ Réponse B

La fonction $F(x) = \dfrac{e^x(\sin x - \cos x)}{2}$ vérifie $F'(x) = \dfrac{e^x(\sin x - \cos x) + e^x(\cos x + \sin x)}{2} = e^x \sin x$.
Donc $\displaystyle\int_0^{\pi/2} e^x \sin x\, dx = F\left(\tfrac{\pi}{2}\right) - F(0) = \frac{e^{\pi/2}}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1+e^{\pi/2}}{2}$.

Q12 ✔ Réponse D

Pour $t \in [0,1]$:

$$0 \leq 1 - \frac{1}{(1+t^n)^2} = \frac{2t^n + t^{2n}}{(1+t^n)^2} \leq 2t^n + t^{2n}.$$

En intégrant :
$0 \leq 1 - I_n \leq \frac{2}{n+1} + \frac{1}{2n+1} \to 0$.
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 1$.

Q13 ✔ Réponse C

$10! = 2^8 \times 3^4 \times 5^2 \times 7$ (exposant de 2 : $5+2+1=8$; de 3 : $3+1=4$; de 5 : 2 ; de 7 : 1).
Le nombre de diviseurs est $(8+1)(4+1)(2+1)(1+1) = 9\times5\times3\times2 = 270$.

Q14 ✔ Réponse A

$2^{10} = 1024 = 93 \times 11 + 1$, donc $2^{10} \equiv 1\ [11]$ et $2^{123} = (2^{10})^{12} \times 2^3 \equiv 8\ [11]$.
$3^5 = 243 = 22 \times 11 + 1$, donc $3^5 \equiv 1\ [11]$ et $3^{121} = (3^5)^{24} \times 3 \equiv 3\ [11]$.
Ainsi $2^{123} + 3^{121} \equiv 8 + 3 = 11 \equiv 0\ [11]$: le reste est 0.

Q15 ✔ Réponse B

En divisant par i :
$z^2 - (3+2i)z + 5 + 5i = 0$.
Discriminant :
$\Delta = (3+2i)^2 - 4(5+5i) = -15 - 8i = (1-4i)^2$.
Solutions : $z_1 = \frac{3+2i+1-4i}{2} = 2 - i$
et $z_2 = \frac{3+2i-1+4i}{2} = 1 + 3i$
(vérification : $z_1 z_2 = 5 + 5i$).
Donc $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 5 + 10 = 15$.

Q16 ✔ Réponse D

$(1+i)^2 = 2i$, donc
$(1+i)^4 = (2i)^2 = -4$. De même
$(i-1)^2 = -2i$, donc $(i-1)^4 = -4$.
$Z = \frac{1}{2}(-8) = -4$, réel strictement négatif : $\arg Z \equiv \pi\ [2\pi]$.

Q17 ✔ Réponse C

$\overrightarrow{BC}(1,6)$ dirige (BC), donc
$(BC) : 6(x-3) - (y-1) = 0$, soit
$6x - y - 17 = 0$.

$$d(A,(BC)) = \frac{|6\times2 - 6 - 17|}{\sqrt{6^2+1^2}} = \frac{11}{\sqrt{37}}.$$

Q18 ✔ Réponse C

$[AB]$ est un diamètre : le centre est le milieu $\Omega(2,2,3)$ et
$R^2 = \Omega A^2 = 1 + 9 + 1 = 11$. On vérifie que $C \in S$: $\Omega C^2 = 1 + 9 + 1 = 11$.
Le plan tangent en C est orthogonal à $\overrightarrow{\Omega C}(-1,3,1)$ et passe par C :

$$-(x-1) + 3(y-5) + (z-4) = 0 \iff -x + 3y + z - 18 = 0.$$

Q19 ✔ Réponse B

Notons S_1 « le capteur vient du site 1 » et D « le capteur est défectueux ». Le site 1 produit les deux tiers des capteurs : $P(S_1) = \frac{2}{3}$.

$$P(S_1 \cap D) = P(S_1) \times P_{S_1}(D) = \frac{2}{3} \times 0{,}03 = 0{,}02.$$

Q20 ✔ Réponse C

Formule des probabilités totales : $P(D) = \frac{2}{3} \times 0{,}03 + \frac{1}{3} \times 0{,}04 = 0{,}02 + \frac{0{,}04}{3} = \frac{0{,}1}{3}$.

$$P_D(S_1) = \frac{P(S_1 \cap D)}{P(D)} = \frac{0{,}02}{0{,}1/3} = 0{,}6.$$

ÉCOLES NATIONALES DES SCIENCES APPLIQUÉES · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année des ENSA · Maroc

Session de juillet 2023

2023 Énoncé

Q1 Voici une suite logique de nombres : $6; 4; 8; 5; 15; \ldots$
Le nombre suivant est :

A 17 B 20 C 11 D 40

Q2 Soit x un nombre de 6 chiffres divisible par 9 et y le nombre obtenu en déplaçant à la fin le premier chiffre de x. Le reste de la division de y par 9 est égal à :

A 0 B 1 C 2 D 3

Q3 Le nombre de couples d'entiers premiers entre eux dont le produit vaut 150 est égal à :

A 4 B 6 C 8 D 10

Q4 L'équation à variables réelles

$$9x^5 - 12x^4 + 6x - 5 = 0$$

A admet une seule solution entière
B admet trois solutions entières
C admet cinq solutions entières
D n'admet pas de solution entière

Q5 Soit la suite (u_n) définie par : $u_n = \sqrt{n} - [\sqrt{n}]$, $n \in \mathbb{N}$. ($[x]$ désigne la partie entière de x).

$$\lim_{n\to+\infty} u_{(n^2+2n)} =$$

A 0 B 1 C 2 D 3

Q6 $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x \sin(e^{-x}) =$

A 0
B 1
C -1
D n'a pas de limite

Q7 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cos\left(x^2+x-1\right)}{x} =$

A 0
B 1
C -1
D n'a pas de limite

Q8 Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{Z}$.
Alors :

A f n'est pas constante
B f est une constante
C f est strictement croissante
D f est strictement décroissante

Q9 Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x+y)\left(1 - f(x)f(y)\right) = f(x) + f(y)$$

Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{f'(x)}{1+f(x)^2} =$$

A $f'(0)$ B $f'(0) - 1$
C $f'(0) + \dfrac{1}{2}$ D $f'(0) - \dfrac{1}{2}$

Q10 Pour tout réel $\alpha > 0$;

$$\int_{\frac{1}{\alpha}}^{\alpha} \frac{\ln x}{1+x^2}\, dx =$$

A $\ln\alpha$ B $2\ln\alpha$ C 0 D $\alpha\dfrac{\pi}{2}$

Q11 On considère les deux intégrales suivantes : $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin^2(x)\, dx$ et $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^2(x)\, dx$. La valeur de I vaut :

A $\dfrac{\pi^3}{48}$ B $\dfrac{\pi^3}{24} + \dfrac{\pi}{4}$
C $-\dfrac{\pi}{8}$ D $\dfrac{\pi^3}{48} + \dfrac{\pi}{8}$

Q12 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{1445} \sin x\, dx =$

A $\dfrac{1}{1445}$ B $\dfrac{1}{1446} - \dfrac{\pi}{2}$
C $\dfrac{1}{1446}$ D $\dfrac{1}{1447} + \dfrac{\pi}{2}$

Q13 Soient z_1 et z_2 les solutions complexes de l'équation :

$$z^2 - 4iz - 4(1+i) = 0$$

Alors : $\mathrm{Im}(z_1) + \mathrm{Im}(z_2)$

A 0 B 4 C 2 D 3

Q14 Le nombre complexe

$$(1+i)^{2000} =$$

A 1 B 4^{1000} C 4^{500} D 4^{200}

Q15 Le nombre complexe

$$\left(\frac{7-15i}{15+7i}\right)^{2023} =$$

A i B $-i$ C -1 D $i+1$

Q16 La somme

$$\left(1 + e^{\frac{i2\pi}{5}} + e^{\frac{i4\pi}{5}} + e^{\frac{i6\pi}{5}} + e^{\frac{i8\pi}{5}}\right)^{1000} =$$

A 0 B 1 C i D $-i$

Q17 La solution $f(x)$ de l'équation différentielle $y'' - 7y' + 12y = 0$ vérifiant $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ est :

A $e^{-4x} - e^{3x}$ B $e^{5x} - e^{3x}$
C $e^{4x} - e^{3x}$ D $e^{5x} - e^{4x}$

Q18 Soient d_A la distance du point $A(1,0,2)$ au plan $(P) : 2x + y + z + 4 = 0$; et d_B la distance du point $B(3,2,1)$ au plan $(Q) : -x + 5y - 4z = 5$. Alors le produit des distances $d_A d_B$ est :

A $\dfrac{8}{3\sqrt{7}}$ B $\dfrac{10}{3\sqrt{7}}$ C $\dfrac{11}{3\sqrt{7}}$ D $\dfrac{13}{3\sqrt{7}}$

Q19 L'aire sous la cloche d'équation $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ et au-dessus de la parabole d'équation $y = \dfrac{x^2}{2}$ est :

A $\dfrac{1}{3}$ B $-\dfrac{1}{3} + \dfrac{\pi}{2}$ C $\dfrac{\pi}{2}$ D $\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{1}{3}$

Q20 On considère le cercle (C) d'équation $x^2 + y^2 + x - 3y - 3 = 0$ et (D) la droite passant par le point A de coordonnées $(1,-2)$ et tangent à (C) au point M.
La longueur du segment $[AM]$ est égale à :

A 1 B 2 C 3 D 4

ÉCOLES NATIONALES DES SCIENCES APPLIQUÉES · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année des ENSA · Maroc

Session de juillet 2023

2023

Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14
C	A	C	D	B	B	A	B	A	C	D	C	B	C

Q15	Q16	Q17	Q18	Q19	Q20
A	A	C	A	B	C

Q1 ✔ Réponse C

On alterne une soustraction et une multiplication, avec un nombre qui augmente de 1 à chaque paire :

$$6 \xrightarrow{-2} 4 \xrightarrow{\times 2} 8 \xrightarrow{-3} 5 \xrightarrow{\times 3} 15 \xrightarrow{-4} 11.$$

Remarque : Suite « logique » : d'autres règles peuvent produire d'autres réponses. La règle « -2, $\times 2$, -3, $\times 3$, -4 » donne 11 (choix C) ; à confirmer avant publication.

Q2 ✔ Réponse A

Un entier est congru modulo 9 à la somme de ses chiffres. Déplacer un chiffre ne change pas cette somme, donc $y \equiv x \equiv 0\ [9]$: le reste est 0.

Q3 ✔ Réponse C

$150 = 2 \times 3 \times 5^2$. Si $ab = 150$ avec $a \wedge b = 1$, chacune des puissances 2, 3 et 5^2 figure en entier dans a ou dans b : $2^3 = 8$ choix.
Les 8 couples d'entiers naturels (a, b) sont : $(1, 150)$, $(2, 75)$, $(3, 50)$, $(6, 25)$, $(25, 6)$, $(50, 3)$, $(75, 2)$, $(150, 1)$.

Q4 ✔ Réponse D

Si x est un entier solution, alors $x(9x^4 - 12x^3 + 6) = 5$, donc x divise 5 : $x \in \{-5, -1, 1, 5\}$.

- $x = 1 : 9 - 12 + 6 - 5 = -2 \neq 0$
- $x = -1 : -9 - 12 - 6 - 5 = -32 \neq 0$
- $x = 5$: $28125 - 7500 + 30 - 5 = 20650 \neq 0$
- $x = -5$: $-28125 - 7500 - 30 - 5 = -35660 \neq 0$

Aucune solution entière.

Q5 ✔ Réponse B

Pour $n \geq 1$: $n^2 \leq n^2 + 2n < (n+1)^2$, donc $\lfloor \sqrt{n^2 + 2n} \rfloor = n$ et

$$u_{(n^2+2n)} = \sqrt{n^2 + 2n} - n = \frac{2n}{\sqrt{n^2 + 2n} + n} = \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + 1} \to 1.$$

Q6 ✔ Réponse B

Posons $t = e^{-x} \to 0^+$:
$e^x \sin(e^{-x}) = \dfrac{\sin t}{t} \to 1.$

Q7 ✔ Réponse A

Pour $x > 0$: $\left| \dfrac{\cos(x^2 + x - 1)}{x} \right| \leq \dfrac{1}{x} \to 0.$
Par encadrement, la limite vaut 0.

Q8 ✔ Réponse B

Si f prenait deux valeurs entières $p < q$, le théorème des valeurs intermédiaires lui ferait prendre la valeur $p + \frac{1}{2}$, qui n'est pas entière. Donc f est constante.

Q9 ✔ Réponse A

Avec $x = y = 0$:
$f(0)\left(1 - f(0)^2\right) = 2f(0)$, soit
$f(0)\left(1 + f(0)^2\right) = 0$, donc $f(0) = 0$.
À x fixé, on dérive par rapport à y puis on prend $y = 0$:

$$f'(x)\left(1 - f(x)f(0)\right) - f(x)\,f(x)f'(0) = f'(0),$$

soit $f'(x) = f'(0)\left(1 + f(x)^2\right)$. Donc $\dfrac{f'(x)}{1 + f(x)^2} = f'(0)$.

Q10 ✔ Réponse C

Notons I l'intégrale et posons $x = \frac{1}{t}$, $dx = -\frac{dt}{t^2}$:

$$I = \int_\alpha^{1/\alpha} \frac{-\ln t}{1 + \frac{1}{t^2}} \left(-\frac{dt}{t^2}\right) = \int_\alpha^{1/\alpha} \frac{\ln t}{1 + t^2}\, dt = -I.$$

Donc $I = 0$.

Q11 ✔ Réponse D

$$I + J = \int_0^{\pi/2} x^2\, dx = \frac{\pi^3}{24} \text{ et } J - I = \int_0^{\pi/2} x^2 \cos(2x)\, dx.$$

Deux intégrations par parties :

$$\int_0^{\pi/2} x^2 \cos 2x\, dx = \left[\frac{x^2 \sin 2x}{2}\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} x \sin 2x\, dx = -\left(\left[-\frac{x \cos 2x}{2}\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2x}{2} dx\right) = -\frac{\pi}{4}.$$

Donc $2I = \dfrac{\pi^3}{24} + \dfrac{\pi}{4}$, soit $I = \dfrac{\pi^3}{48} + \dfrac{\pi}{8}$.

Q12 ✔ Réponse C

Une primitive de $(\cos x)^{1445} \sin x$ est $-\dfrac{(\cos x)^{1446}}{1446}$, donc l'intégrale vaut $0 - \left(-\dfrac{1}{1446}\right) = \dfrac{1}{1446}$.

Q13 ✔ Réponse B

La somme des solutions d'une équation $z^2 + bz + c = 0$ vaut $-b$: $z_1 + z_2 = 4i$.
Donc $\mathrm{Im}(z_1) + \mathrm{Im}(z_2) = \mathrm{Im}(z_1 + z_2) = 4$.

Q14 ✔ Réponse C

$(1+i)^2 = 2i$, donc $(1+i)^{2000} = (2i)^{1000} = 2^{1000}\, i^{1000} = 2^{1000} = 4^{500}$ (car $i^4 = 1$ et 1000 est multiple de 4).

Q15 ✔ Réponse A

$-i(15 + 7i) = -15i + 7 = 7 - 15i$, donc $\dfrac{7 - 15i}{15 + 7i} = -i$.
$2023 = 4 \times 505 + 3$, donc $(-i)^{2023} = (-i)^3 = -i^3 = i$.

Q16 ✔ Réponse A

Avec $\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}} \neq 1$ et $\omega^5 = 1$:
$1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = \dfrac{1 - \omega^5}{1 - \omega} = 0.$
Donc la quantité vaut $0^{1000} = 0$.

Q17 ✔ Réponse C

L'équation caractéristique $r^2 - 7r + 12 = 0$ a pour racines 3 et 4, donc $f(x) = ae^{3x} + be^{4x}$.
$f(0) = a + b = 0$ et $f'(0) = 3a + 4b = 1$ donnent $b = 1$, $a = -1$: $f(x) = e^{4x} - e^{3x}$.

Q18 ✔ Réponse A

$$d_A = \frac{|2 + 0 + 2 + 4|}{\sqrt{4 + 1 + 1}} = \frac{8}{\sqrt{6}} \text{ et } d_B = \frac{|-3 + 10 - 4 - 5|}{\sqrt{1 + 25 + 16}} = \frac{2}{\sqrt{42}}.$$

$$d_A d_B = \frac{16}{\sqrt{252}} = \frac{16}{6\sqrt{7}} = \frac{8}{3\sqrt{7}}.$$

Q19 ✔ Réponse **B**

Intersection : $\frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{2} \iff x^4 + x^2 - 2 = 0 \iff x^2 = 1 \iff x = \pm 1$. Sur $[-1, 1]$, la cloche est au-dessus de la parabole :

$$\mathcal{A} = \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{2} \right) dx$$
$$= \Big[\arctan x \Big]_{-1}^{1} - \left[\frac{x^3}{6} \right]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}.$$

Q20 ✔ Réponse **C**

Le cercle a pour centre $\Omega\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ et pour rayon R avec $R^2 = \frac{1}{4} + \frac{9}{4} + 3 = \frac{11}{2}$. Le triangle $AM\Omega$ est rectangle en M, donc $AM^2 = A\Omega^2 - R^2 = \left(\frac{9}{4} + \frac{49}{4}\right) - \frac{11}{2} = \frac{58}{4} - \frac{22}{4} = 9$. (On retrouve la puissance de A : $1 + 4 + 1 + 6 - 3 = 9$.) Donc $AM = 3$.

ÉCOLES NATIONALES DES SCIENCES APPLIQUÉES · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année des ENSA · Maroc

Session du 1er août 2022

2022 — Énoncé

Q1 Sachant que $11 \times 11 = 121$, le produit $111111111 \times 111111111$ est égal à :

A 1234567654321
B 123456787654321
C 12345678987654321
D 1234568654321

Q2 Le nombre de diviseurs positifs du nombre 546×840 est :

A 180 B 181 C 182 D 183

Q3 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. La négation de la proposition « f est la fonction nulle » est :

A $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0$
B $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0$
C $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$
D $\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0$

Q4 La solution de l'équation à variable réelle x :
$\ln\left(x^2-1\right) - \ln(2x-1) + \ln 2 = 0$ est :

A $\dfrac{1+7\sqrt{3}}{2}$ B $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$
C $\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$ D $\dfrac{1+3\sqrt{3}}{2}$

Q5 La valeur maximale des termes $u_k = C_{22}^k\, 20^{22-k}\, 21^k$ dans le développement du nombre $(20+21)^{22}$ par la formule du Binôme de Newton atteinte pour k égal à :

A 8 B 9 C 10 D 11

Q6 $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^2} =$

A 1 B 0 C $+\infty$ D e

Q7 $\lim\limits_{n\to+\infty} n - \sqrt{(n+5)(n+7)} =$

A 0 B -6 C 6 D $+\infty$

Q8 Soient a et b deux réels ; la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2} & \text{si } x > 0 \\ ax+b & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

est continue en 0 ssi

A $a \in \mathbb{R}$ et $b = 2$
B $a = 0$ et $b = 1$
C $a = \dfrac{-1}{3}$ et $b = \dfrac{1}{2}$
D $a \in \mathbb{R}$ et $b = \dfrac{-1}{2}$

Q9 La dérivée de la fonction

$$f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}\ \sqrt{(x+3)^3}} \text{ est :}$$

A $\dfrac{5x^2-x-12}{\sqrt{x-1}\ \sqrt[3]{(x+2)^5}\ \sqrt{(x+3)^5}}$

B $\dfrac{3x^2+x-24}{\sqrt{x-1}\ \sqrt[3]{(x+2)^5}\ \sqrt{(x+3)^5}}$

C $\dfrac{2x^2+x-24}{2\sqrt{x-1}\ \sqrt[3]{(x+2)^5}\ \sqrt{(x+3)^5}}$

D $\dfrac{5x^2+x-24}{3\sqrt{x-1}\ \sqrt[3]{(x+2)^5}\ \sqrt{(x+3)^5}}$

Q10 Soit $f : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ définie par $f(x) = xe^x$. L'équation de la tangente à la courbe f^{-1} au point d'abscisse e est :

A $y = \dfrac{1}{2e} + \dfrac{1}{2}$ B $y = \dfrac{1}{e}x + \dfrac{1}{2}$
C $y = \dfrac{1}{2e}x + 1$ D $y = \dfrac{1}{e}x - 1$

Q11 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-x^2}{1+x^2}\,dx =$

A $\dfrac{\pi}{2}+1$ B $\dfrac{\pi}{2}-1$
C $-1+\dfrac{\pi}{4}$ D $-1-\dfrac{\pi}{4}$

Q12 Soit l'intégrale

$$I_n = \int_{-1}^{1} \left(x^2-1\right)^n dx$$

La valeur de I_4 est

A $\dfrac{252}{315}$ B $\dfrac{254}{315}$ C $\dfrac{258}{315}$ D $\dfrac{256}{315}$

Q13 $\cos\left(\dfrac{\pi}{16}\right)$ est égal à :

A $\dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}}$
B $\dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$
C $\dfrac{1}{16}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$
D $\dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

Q14 La formule algébrique du nombre complexe $\left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2023}$ est :

A $\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ B $-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
C $\dfrac{\sqrt{3}}{2}+i\dfrac{1}{2}$ D $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+i\dfrac{1}{2}$

Q15 Soit le nombre complexe $z = \sqrt{3}+i$, alors z^5 est égal à :

A $\overline{z}$ B $-8\,\overline{z}$ C $-16\,\overline{z}$ D $16\,\overline{z}$

Q16 Soient z_1 et z_2 les solutions de l'équation suivante :

$$2z^2 - 2(m+1+i)z + m^2 + (1+i)m + i = 0$$

où $m \in \mathbb{C}^*$ et $z \in \mathbb{C}$, $m \neq 1, i$
$\mathrm{Im}(z_1) \times \mathrm{Im}(z_2) =$

A $\dfrac{1-m^2}{2}$ B $\dfrac{1+m^2}{2}$
C $\dfrac{1-m^2}{4}$ D $\dfrac{1+m^2}{4}$

Q17 La solution $y(x)$ de l'équation différentielle suivante : $y'' + y' + \dfrac{5}{2}y = 0$, $y(0) = -4$; $y'(0) = 6$ est :

A $e^{\frac{x}{2}}\left(-4\cos\left(\frac{3}{2}x\right) - \frac{8}{3}\sin\left(\frac{3}{2}x\right)\right)$
B $e^{\frac{x}{2}}\left(-4\cos\left(\frac{3}{2}x\right) + \frac{8}{3}\sin\left(\frac{3}{2}x\right)\right)$
C $e^{\frac{-x}{2}}\left(-4\cos\left(\frac{3}{2}x\right) - \frac{8}{3}\sin\left(\frac{3}{2}x\right)\right)$
D $e^{\frac{-x}{2}}\left(-4\cos\left(\frac{3}{2}x\right) + \frac{8}{3}\sin\left(\frac{3}{2}x\right)\right)$

Q18 Dans un repère orthonormé, on considère le plan P d'équation cartésienne $2x - y - 2z + 2 = 0$, et la sphère d'équation $x^2 - 6x + y^2 + z^2 + 10z - 2 = 0$. Une représentation paramétrique de la droite passant par le centre de la sphère et perpendiculaire au point P est :

A $\begin{cases} x = 3+2t \\ y = -t \\ z = -5-2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

B $\begin{cases} x = 3-2t \\ y = t \\ z = -5-2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

C $\begin{cases} x = 3+2t \\ y = -t \\ z = 5-2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

D $\begin{cases} x = -3+2t \\ y = -t \\ z = -5-2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

La première année du cycle préparatoire d'une ENSA comporte 300 élèves ingénieurs. Ils sont inscrits aux clubs des activités de l'École selon la répartition suivante : 60 au club Cyber Sécurité dont 30% sont des filles, 90 au club Sport dont 60% sont des filles, et 150 au club Environnement dont 72% sont des filles. Chaque élève-ingénieur(e) pratique une et une seule activité. On choisit au hasard un(e) élève ingénieur(e).

Q19 La probabilité que l'élève choisi(e) soit une fille est :

A 0,4 B 0,5 C 0,6 D 0,7

Q20 Sachant que l'élève choisi(e) est un garçon, la probabilité qu'il soit inscrit au club Environnement est :

A 0,25 B 0,35 C 0,45 D 0,55

ÉCOLES NATIONALES DES SCIENCES APPLIQUÉES · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année des ENSA · Maroc

Session du 1er août 2022

2022 — Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14
C	A	D	B	D	A	B	D	D	A	B	D	D	A

Q15	Q16	Q17	Q18	Q19	Q20
C	C	D	A	C	B

Q1 — ✔ Réponse C

Le carré d'un nombre formé de n chiffres 1 (pour $n \le 9$) s'écrit en montant de 1 à n puis en redescendant : $11^2 = 121$, $111^2 = 12321$, $1111^2 = 1234321$, … Avec neuf chiffres 1 : $111111111^2 = 12345678987654321$. (Le résultat a 17 chiffres, ce qui élimine aussi les autres propositions.)

Q2 — ✔ Réponse A

$546 = 2 \times 3 \times 7 \times 13$ et $840 = 2^3 \times 3 \times 5 \times 7$, donc $546 \times 840 = 2^4 \times 3^2 \times 5 \times 7^2 \times 13$. Nombre de diviseurs : $(4+1)(2+1)(1+1)(2+1)(1+1) = 5 \times 3 \times 2 \times 3 \times 2 = 180$.

Q3 — ✔ Réponse D

« f est la fonction nulle » s'écrit $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$. Sa négation est $\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0$: il suffit d'un seul x où f ne s'annule pas.

Q4 — ✔ Réponse B

Domaine : $x^2 > 1$ et $x > \frac{1}{2}$, soit $x > 1$. L'équation équivaut à $\ln\big(2(x^2-1)\big) = \ln(2x-1)$, c'est-à-dire $2x^2 - 2x - 1 = 0$. Racines : $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$. Seule $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \approx 1{,}37$ est dans le domaine.

Q5 — ✔ Réponse D

$\dfrac{u_{k+1}}{u_k} = \dfrac{22-k}{k+1} \times \dfrac{21}{20}$, et ce rapport est > 1 si et seulement si $21(22-k) > 20(k+1)$, soit $41k < 442$, c'est-à-dire $k \le 10$. Les termes croissent donc jusqu'à u_{11}, puis décroissent : le maximum est atteint pour $k = 11$.

Q6 — ✔ Réponse A

$\sqrt[n]{n^2} = e^{\frac{2\ln n}{n}}$ et $\dfrac{\ln n}{n} \to 0$, donc la limite vaut $e^0 = 1$.

Q7 — ✔ Réponse B

Avec la quantité conjuguée :

$$n - \sqrt{n^2+12n+35} = \frac{n^2 - (n^2+12n+35)}{n + \sqrt{n^2+12n+35}} = \frac{-12 - \frac{35}{n}}{1 + \sqrt{1 + \frac{12}{n} + \frac{35}{n^2}}} \to \frac{-12}{2} = -6.$$

Q8 — ✔ Réponse D

Au voisinage de 0 : $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$, donc $\dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2} \to -\dfrac{1}{2}$ quand $x \to 0^+$. À gauche, $f(0) = b$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = b$. La continuité en 0 équivaut à $b = -\dfrac{1}{2}$, quel que soit a.

Q9 — ✔ Réponse D

On écrit $f(x) = (x-1)^{\frac{1}{2}}(x+2)^{-\frac{2}{3}}(x+3)^{-\frac{3}{2}}$ et on utilise la dérivée logarithmique :

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{2(x-1)} - \frac{2}{3(x+2)} - \frac{3}{2(x+3)} = \frac{-10x^2 - 2x + 48}{6(x-1)(x+2)(x+3)} = -\frac{5x^2 + x - 24}{3(x-1)(x+2)(x+3)}.$$

D'où

$$f'(x) = -\frac{5x^2 + x - 24}{3\sqrt{x-1}\ \sqrt[3]{(x+2)^5}\ \sqrt{(x+3)^5}}.$$

C'est l'expression D **au signe près** : la fonction est décroissante pour x grand ($f(x)$ se comporte comme $x^{-5/3}$), donc sa dérivée y est négative. La proposition D est la seule qui ait la bonne forme.

Remarque : Aucune proposition n'est exactement juste : le calcul donne l'opposé de D (signe « − » absent sur le sujet). La correction suggérée (Prof. Barkouz) retient D. À trancher par le professeur.

Q10 — ✔ Réponse A

$f(1) = e$, donc $f^{-1}(e) = 1$. Et $f'(x) = (x+1)e^x$, donc $f'(1) = 2e$ et $(f^{-1})'(e) = \dfrac{1}{f'(1)} = \dfrac{1}{2e}$. Tangente : $y = \dfrac{1}{2e}(x-e) + 1 = \dfrac{1}{2e}x + \dfrac{1}{2}$. C'est la proposition A, dans laquelle le « x » manque sur le sujet.

Remarque : La bonne tangente est y = x/(2e) + 1/2 ; la proposition A est imprimée sans le « x ». La correction suggérée retient A. À trancher par le professeur.

Q11 — ✔ Réponse B

$\dfrac{1-x^2}{1+x^2} = \dfrac{2}{1+x^2} - 1$, donc l'intégrale vaut $\Big[2\arctan x - x\Big]_0^1 = 2 \times \dfrac{\pi}{4} - 1 = \dfrac{\pi}{2} - 1$.

Q12 — ✔ Réponse D

$(x^2-1)^4 = x^8 - 4x^6 + 6x^4 - 4x^2 + 1$ est paire, donc

$$I_4 = 2\left(\frac{1}{9} - \frac{4}{7} + \frac{6}{5} - \frac{4}{3} + 1\right) = 2 \times \frac{35 - 180 + 378 - 420 + 315}{315} = 2 \times \frac{128}{315} = \frac{256}{315}.$$

Q13 — ✔ Réponse D

Pour $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$: $2\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{2 + 2\cos\theta}$. En partant de $2\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$:

$$2\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{2+\sqrt{2}},$$

$$2\cos\frac{\pi}{16} = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}.$$

Donc $\cos\dfrac{\pi}{16} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$.

Q14 — ✔ Réponse A

$\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\pi/3}$, et $e^{i\pi/3}$ a pour puissance sixième 1. Comme $2023 = 6 \times 337 + 1$:

$$\left(e^{i\pi/3}\right)^{2023} = e^{i\pi/3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Q15 ✔ Réponse C

$z = 2e^{i\pi/6}$, donc $z^5 = 32e^{5i\pi/6}$ et $\overline{z} = 2e^{-i\pi/6}$.

$$\frac{z^5}{\overline{z}} = 16\,e^{i\pi} = -16, \quad \text{donc } z^5 = -16\,\overline{z}.$$

Q16 ✔ Réponse C

Discriminant réduit :
$\Delta' = (m+1+i)^2 - 2\big(m^2+(1+i)m+i\big) = -m^2 = (im)^2$ (car $(1+i)^2 = 2i$).
Solutions : $z_1 = \dfrac{(m+1+i)+im}{2} = \dfrac{(1+i)(m+1)}{2}$ et
$z_2 = \dfrac{(m+1+i)-im}{2}$.
Si m est **réel** : $\mathrm{Im}(z_1) = \dfrac{m+1}{2}$ et $\mathrm{Im}(z_2) = \dfrac{1-m}{2}$, d'où
$\mathrm{Im}(z_1)\,\mathrm{Im}(z_2) = \dfrac{1-m^2}{4}$.

Remarque : Le résultat $(1 - m^2)/4$ n'est valable que si m est réel ; or l'énoncé dit $m \in \mathbb{C}^*$. Pour m complexe non réel, le produit des parties imaginaires ne s'exprime pas ainsi. La correction suggérée retient C. À trancher par le professeur.

Q17 ✔ Réponse D

Équation caractéristique : $r^2 + r + \frac{5}{2} = 0$, de discriminant $1 - 10 = -9$:
$r = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}i$. Donc
$y = e^{-x/2}\left(A\cos\frac{3x}{2} + B\sin\frac{3x}{2}\right)$.
$y(0) = A = -4$ et
$y'(0) = -\frac{A}{2} + \frac{3}{2}B = 2 + \frac{3}{2}B = 6$, donc $B = \frac{8}{3}$.

Q18 ✔ Réponse A

(« perpendiculaire au point P » se lit « perpendiculaire au plan P ».)
$(x-3)^2 + y^2 + (z+5)^2 = 36$: le centre est $\Omega(3, 0, -5)$. La droite perpendiculaire au plan P est dirigée par son vecteur normal $\vec{n}(2, -1, -2)$:

$$\begin{aligned} x &= 3 + 2t, \\ y &= -t, \\ z &= -5 - 2t, \\ t &\in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Q19 ✔ Réponse C

Nombre de filles :
$0{,}3 \times 60 + 0{,}6 \times 90 + 0{,}72 \times 150 = 18 + 54 + 108 = 180$.
$P(F) = \dfrac{180}{300} = 0{,}6$.

Q20 ✔ Réponse B

Garçons : 42 en Cyber Sécurité, 36 en Sport et $150 - 108 = 42$ en Environnement, soit 120 garçons.
$P_G(\text{Environnement}) = \dfrac{42}{120} = 0{,}35$.

ÉCOLES NATIONALES DES SCIENCES APPLIQUÉES · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année des ENSA · Maroc

Session de juillet 2021

2021 Énoncé

Q1 Une condition nécessaire (pas forcément suffisante) pour réussir le concours de l'ENSA est :

A Avoir répondu correctement à tout le QCM
B Avoir au plus de 25% de réponses fausses
C Avoir au moins 50% de réponses correctes
D Avoir passé le concours

Q2 Le 17 juillet de 2021, jour du concours de l'ENSA, est un samedi.
Quel jour de la semaine sera le 29 février 2024 ?

A mardi B jeudi
C samedi D lundi

Q3 Le nombre de diviseurs de $N = 72^{10} \times 162^{50}$ est :

A 17600 B 17680
C 17820 D 17901

Q4 Soient x et y deux réels non nuls, inverses l'un de l'autre, tels que la somme du carré de leur somme avec la somme de leurs carrés est égale à 10. Le carré du nombre x vaut :

A $2-\sqrt{3}$ ou $2+\sqrt{3}$
B $1-\sqrt{5}$ ou $1+\sqrt{5}$
C $1-\sqrt{3}$ ou $1+\sqrt{3}$
D $2-\sqrt{5}$ ou $2+\sqrt{5}$

Q5 Le produit

$$\prod_{k=0}^{9} \sqrt[3\cdot 2^k]{5} =$$

A $\sqrt[3]{5^{\frac{511}{256}}}$ B $\sqrt[3]{5^{\frac{1023}{256}}}$
C $\sqrt[3]{5^{\frac{1023}{512}}}$ D $\sqrt[3]{5^{\frac{511}{1024}}}$

Q6 $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n e^{-3n} =$

A 1 B 0 C $+\infty$ D e

Q7 En remarquant que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre $(3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n$ est un entier pair,

$$\lim_{n\to+\infty} \sin\left(\left(3+\sqrt{5}\right)^n \pi\right) =$$

A 1 B -1 C 0 D $+\infty$

Q8 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \dfrac{\sqrt{3}\sin x - \cos x}{x-\frac{\pi}{6}} =$

A 0 B 1 C 2 D $+\infty$

Q9 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\left(\frac{1}{\ln 3x}\right)} =$

A e B 0 C $\ln 3$ D $1+e$

Q10 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction T périodique avec $T > 0$, telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ existe dans $\mathbb{R}^*$.
Alors :

A f est strictement croissante
B f est strictement décroissante
C f est la fonction nulle
D f est une constante non nulle

Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x^3 \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Q11 Soit f' la dérivée d'ordre 1 de f.

A $f'(0) = 1$
B $f'(0) = 0$
C $f'(0) = 2$
D f n'est pas dérivable en 0

Q12 Pour la même fonction f de Q11, on note f'' sa dérivée d'ordre 2. Alors :

A $f''(0) = 0$
B $f''(0) = 1$
C $f''(0) = 2$
D f n'est pas deux fois dérivable en 0

Q13 L'aire de la région délimitée par la courbe d'équation $y = \cos(\ln x)$ et les droites d'équations $x = e^{\frac{\pi}{2}}$ et $x = e^{\pi}$ est égale à :

A $\dfrac{1}{2}\left(e^{\pi} + e^{\frac{\pi}{2}}\right)$ B $e^{\pi} - e^{\frac{\pi}{2}}$
C $e^{\pi} + e^{\frac{\pi}{2}}$ D e^{π}

Q14 Soit $f : [0;\alpha] \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(x) \neq -1$ et $f(x).f(\alpha - x) = 1$

$$\int_0^{\alpha} \frac{1}{1+f(x)}\,dx =$$

A $\dfrac{\alpha}{2}$ B α C $1+\alpha$ D $\dfrac{1}{1+\alpha}$

Q15 Soit la fonction réelle

$$f(x) = e^{-x}\sin(x)$$

et $f^{(4)}$ sa dérivée d'ordre 4, alors :

$$f^{(4)}(x) =$$

A $-f(x)$ B $-4f(x)$
C $4f(x)$ D $-3f(x)$

Q16 Pour la même fonction f de Q15,

$$\int_0^{\pi} f(x)\,dx =$$

A $\dfrac{1}{3}\left(1-e^{-\pi}\right)$ B $\dfrac{1}{2}\left(1+e^{-\pi}\right)$
C $\dfrac{1}{4}\left(1-e^{-\pi}\right)$ D $\dfrac{1}{5}\left(1+e^{-\pi}\right)$

Q17 Soit u la solution de l'équation à variable complexe :

$$z\overline{z} + 4iz = -3 + 4i$$

Alors :

A $\mathrm{Re}(u) \times \mathrm{Im}(u) = 2$
B $\mathrm{Re}(u) \times \mathrm{Im}(u) = 1$
C $\mathrm{Re}(u) + \mathrm{Im}(u) = 2$
D u est un imaginaire pur

Q18 Soient z_1 et z_2 les solutions de l'équation à variable complexe :

$$z^2 - 2\overline{z} + 3 = 0$$

$$\mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) =$$

A $-\dfrac{2\sqrt{6}}{7}$ B $\dfrac{2\sqrt{6}}{7}$ C $\dfrac{5}{7}$ D $-\dfrac{5}{7}$

Q19 Soient θ un nombre réel non nul et z un nombre complexe tells que :
$z = \cos^2\theta + i\sin\theta\cos\theta$.
La partie réelle du nombre z^{-3} est :

A $\dfrac{\cos\theta}{\sin^3\theta}$ B $\dfrac{\sin 3\theta}{\sin^3\theta}$
C $\dfrac{\cos 3\theta}{\cos^3\theta}$ D $\dfrac{\sin\theta}{\cos^3\theta}$

Q20 Le nombre $\cos 5\theta$ est égal à :

A $\cos^5\theta + 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta$
B $\cos^5\theta + 5\cos^3\theta\sin^2\theta + 10\cos\theta\sin^4\theta$
C $\cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + \cos\theta\sin^4\theta$
D $\cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta$

ÉCOLES NATIONALES DES SCIENCES APPLIQUÉES · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année des ENSA · Maroc

Session de juillet 2021

2021 — Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14
D	B	D	A	C	B	C	C	A	D	B	D	A	A

Q15	Q16	Q17	Q18	Q19	Q20
B	B	A	D	C	D

Q1 ✔ Réponse D

Une condition nécessaire est vérifiée par **tous** ceux qui réussissent. Personne ne réussit sans avoir passé le concours : D est nécessaire.
Les autres propositions ne sont pas imposées par l'énoncé : on peut réussir sans tout répondre correctement, et le texte ne fixe aucun seuil de réponses justes ou fausses.

Q2 ✔ Réponse B

Du 17 juillet 2021 au 17 juillet 2023 : $365+365=730$ jours (pas de 29 février entre les deux).
Du 17 juillet 2023 au 29 février 2024 : 14 (fin juillet)
$+31+30+31+30+31+31+29=227$ jours.
Total : 957 jours, et $957=7\times136+5$. Le 29 février 2024 tombe 5 jours de la semaine après un samedi : un **jeudi**.

Q3 ✔ Réponse D

$72=2^3\times3^2$ et $162=2\times3^4$, donc $N=2^{30}3^{20}\times2^{50}3^{200}=2^{80}\times3^{220}$.
Nombre de diviseurs : $81\times221=17901$.

Q4 ✔ Réponse A

$xy=1$ et
$(x+y)^2+x^2+y^2=2(x^2+y^2)+2=10$,
donc $x^2+y^2=4$, soit $x^2+\dfrac{1}{x^2}=4$.
Avec $X=x^2$: $X^2-4X+1=0$, donc $X=2\pm\sqrt{3}$ (les deux sont positifs).

Q5 ✔ Réponse C

$\displaystyle\prod_{k=0}^{9}5^{\frac{1}{3\cdot2^k}}=5^{\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{9}\frac{1}{2^k}}$ et
$\displaystyle\sum_{k=0}^{9}\frac{1}{2^k}=2-\frac{1}{2^9}=\frac{1023}{512}$.
Donc le produit vaut $5^{\frac{1}{3}\cdot\frac{1023}{512}}=\sqrt[3]{5^{\frac{1023}{512}}}$.

Q6 ✔ Réponse B

$3^ne^{-3n}=\left(\dfrac{3}{e^3}\right)^n$ et $0<\dfrac{3}{e^3}<1$ (car $e^3\approx20{,}1$) : la suite géométrique tend vers 0.

Q7 ✔ Réponse C

Notons $(3+\sqrt5)^n+(3-\sqrt5)^n=2k_n$ avec k_n entier. Alors $(3+\sqrt5)^n\pi=2k_n\pi-(3-\sqrt5)^n\pi$ et, par 2π-périodicité :

$$\sin\left((3+\sqrt5)^n\pi\right)=-\sin\left((3-\sqrt5)^n\pi\right)\to0,$$

car $0<3-\sqrt5<1$, donc $(3-\sqrt5)^n\to0$.

Q8 ✔ Réponse C

$\sqrt3\sin x-\cos x=$
$2\left(\frac{\sqrt3}{2}\sin x-\frac12\cos x\right)=2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$.
Avec $h=x-\frac{\pi}{6}\to0$: $\dfrac{2\sin h}{h}\to2$.

Q9 ✔ Réponse A

$x^{\frac{1}{\ln 3x}}=e^{\frac{\ln x}{\ln 3+\ln x}}$ et
$\dfrac{\ln x}{\ln3+\ln x}=\dfrac{1}{\frac{\ln3}{\ln x}+1}\to1$ quand $x\to0^+$ (car $\ln x\to-\infty$).
La limite vaut $e^1=e$.

Q10 ✔ Réponse D

Notons $L\neq0$ la limite. Pour tout x, la suite $f(x+nT)=f(x)$ est constante et tend vers L quand $n\to+\infty$, donc $f(x)=L$.
f est la constante L, non nulle.

Q11 ✔ Réponse B

$\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=x+x^2\cos\left(\dfrac1x\right)$ et
$\left|x^2\cos\frac1x\right|\le x^2$: ce taux tend vers 0.
Donc $f'(0)=0$.

Q12 ✔ Réponse D

Pour $x\neq0$:
$f'(x)=2x+3x^2\cos\left(\frac1x\right)+x\sin\left(\frac1x\right)$, et $f'(0)=0$.
$\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}=2+3x\cos\left(\frac1x\right)+\sin\left(\frac1x\right)$: les deux premiers termes tendent vers 2, mais $\sin\frac1x$ n'a pas de limite en 0. f' n'est pas dérivable en 0.

Q13 ✔ Réponse A

La région est limitée aussi par l'axe des abscisses. Pour $x\in\left[e^{\pi/2},e^{\pi}\right]$, $\ln x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ donc $\cos(\ln x)\le0$.
Une primitive de $\cos(\ln x)$ est $\dfrac{x}{2}\left(\cos(\ln x)+\sin(\ln x)\right)$ (à vérifier en dérivant). Ainsi

$$\int_{e^{\pi/2}}^{e^{\pi}}\cos(\ln x)\,dx=\frac{e^{\pi}}{2}(-1+0)-\frac{e^{\pi/2}}{2}(0+1)$$
$$=-\frac12\left(e^{\pi}+e^{\pi/2}\right),$$

et l'aire vaut $\dfrac12\left(e^{\pi}+e^{\pi/2}\right)$.

Q14 ✔ Réponse A

Notons I l'intégrale. Le changement de variable $x\mapsto\alpha-x$ donne

$$I=\int_0^{\alpha}\frac{dx}{1+f(\alpha-x)}=\int_0^{\alpha}\frac{dx}{1+\frac{1}{f(x)}}$$
$$=\int_0^{\alpha}\frac{f(x)}{1+f(x)}\,dx.$$

En additionnant : $2I=\displaystyle\int_0^{\alpha}1\,dx=\alpha$,
donc $I=\dfrac{\alpha}{2}$.

Q15 ✔ Réponse B

$f(x)=\operatorname{Im}\left(e^{(-1+i)x}\right)$, donc
$f^{(4)}(x)=\operatorname{Im}\left((-1+i)^4e^{(-1+i)x}\right)$.
$(-1+i)^2=-2i$, donc $(-1+i)^4=-4$ et $f^{(4)}=-4f$.

Q16 ✔ Réponse B

Une primitive de $e^{-x}\sin x$ est
$F(x)=-\dfrac{e^{-x}(\sin x+\cos x)}{2}$.
$\displaystyle\int_0^{\pi}f=F(\pi)-F(0)=\frac{e^{-\pi}}{2}+\frac12=\frac12\left(1+e^{-\pi}\right)$.

Q17 ✔ Réponse A

Avec $z=x+iy$:
$x^2+y^2-4y+4ix=-3+4i$.
Partie imaginaire : $x=1$. Partie réelle : $1+y^2-4y=-3$, soit $(y-2)^2=0$, $y=2$.
$u=1+2i$ et $\operatorname{Re}(u)\operatorname{Im}(u)=2$.

Q18 ✔ Réponse **D**

Avec $z = x + iy$: $x^2 - y^2 - 2x + 3 = 0$ et $2xy + 2y = 2y(x+1) = 0$.

- $y = 0$: $x^2 - 2x + 3 = 0$ n'a pas de solution réelle.
- $x = -1$: $6 - y^2 = 0$, $y = \pm\sqrt{6}$.

$z_1 = -1 + i\sqrt{6}$, $z_2 = -1 - i\sqrt{6} = \overline{z_1}$ et $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1^2}{|z_1|^2} = \dfrac{-5 - 2i\sqrt{6}}{7}$, de partie réelle $-\dfrac{5}{7}$ (même résultat en échangeant z_1 et z_2).

Q19 ✔ Réponse **C**

$z = \cos\theta(\cos\theta + i\sin\theta) = \cos\theta\, e^{i\theta}$ (avec $\cos\theta \neq 0$ pour que z^{-3} existe).

$z^{-3} = \dfrac{e^{-3i\theta}}{\cos^3\theta}$, de partie réelle $\dfrac{\cos 3\theta}{\cos^3\theta}$.

Q20 ✔ Réponse **D**

Formule de Moivre et binôme : $\cos 5\theta = \mathrm{Re}\left((\cos\theta + i\sin\theta)^5\right)$. Les termes réels sont ceux d'indices pairs :

$$\cos^5\theta + \binom{5}{2}\cos^3\theta\,(i\sin\theta)^2 + \binom{5}{4}\cos\theta\,(i\sin\theta)^4 = \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta.$$

ÉCOLES NATIONALES DES SCIENCES APPLIQUÉES · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année des ENSA · Maroc

Session de juillet 2019

2019

Énoncé

Q1 Soient $a, b > 0$, on considère la suite :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{\left(b^2+ab-a^2\right)u_n - a^2}{b^2u_n + b^2 - ab - a^2} \\ u_0 = \dfrac{b}{a} \end{cases}$$

En remarquant que la suite $v_n = \dfrac{b}{bu_n - a}$ est une suite arithmétique, u_n est égal à :

A $\dfrac{an+b}{bn+a}$ B $\dfrac{n+b}{bn+a}$ C $\dfrac{an-b}{bn-a}$ D $\dfrac{an+b}{n+a}$

Q2 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la suite :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+n}$$

On a $u_n \in I$ avec

A $I = \left[0, \frac{1}{3}\right[$ B $I = \left[\frac{1}{3}, 1\right[$ C $I = [2, 3[$ D $I = [1, 2[$

Q3 On considère toujours la suite de la question 2 ci-dessus, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ est égale à :

A $\sqrt{3}$ B $\ln(3)$ C $\ln\left(\sqrt{3}\right)$ D 0

Q4 Sachant que $\left(\ln\left(x+\sqrt{4+x^2}\right)\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{4+x^2}}$, la valeur de l'intégrale

$$\int_0^1 \sqrt{4+x^2}\,dx$$

est :

A $\ln\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right) - \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

B $\ln\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right) - \ln\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)$

C $\ln\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right) - \dfrac{5}{2}$

D $\ln\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right) + \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

Q5 On considère l'équation trigonométrique suivante :
$(E) : \cos^4(3x) + \sin^4(3x) = 1$
Les solutions de (E) sont de la forme :

A $x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

B $x = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

C $x = \dfrac{k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}$

D $x = \dfrac{k\pi}{6},\ k \in \mathbb{Z}$

Q6 Soit le réel

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{7+3\sqrt{5}}{2}} - \sqrt[4]{\frac{7-3\sqrt{5}}{2}}$$

En calculant λ^4, la valeur de λ est :

A $\lambda = 0$ B $\lambda = 1$ C $\lambda = 2$ D $\lambda = 3$

Q7 Soit $a > 0$, la valeur de l'intégrale

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

est :

A $\dfrac{\pi a}{4}$ B $4\pi a$ C πa^2 D $\dfrac{\pi a^2}{4}$

Q8 On jette 3 fois un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6, et on note a, b et c les résultats successifs obtenus. On note $Q(x) = ax^2 + bx + c$. La probabilité pour que Q admet une seule racine double est :

A $\dfrac{11}{216}$ B $\dfrac{7}{216}$ C $\dfrac{5}{216}$ D $\dfrac{9}{216}$

Q9 Une urne contient 4 boules jaunes, 3 boules rouges et 3 boules bleues. Les boules sont indiscernables au touché. L'expérience consiste à tirer au hasard successivement deux boules (une après l'autre) sans remise.
La probabilité d'obtenir la deuxième boule tirée de couleur rouge est :

A $\dfrac{17}{90}$ B $\dfrac{15}{90}$ C $\dfrac{19}{90}$ D $\dfrac{13}{90}$

Q10 On considère toujours la même expérience.
La probabilité d'obtenir la deuxième boule tirée rouge sachant que la première est jaune est :

A $\dfrac{4}{17}$ B $\dfrac{5}{17}$ C $\dfrac{8}{17}$ D $\dfrac{9}{17}$

Q11 Soit $z = -1 + \sqrt{2} + i$, $\arg(z)$ est égal à :

A $\dfrac{3\pi}{8}$ B $\dfrac{5\pi}{8}$ C $\dfrac{7\pi}{8}$ D $\dfrac{\pi}{8}$

Q12 En relation avec la question précédente, la valeur de $\cos\left(\dfrac{5\pi}{8}\right)$ est :

A $\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}}$ B $-\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ C $\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ D $-\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}}$

Q13 Soit $a = \cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$.
En calculant $a\sin\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$, la valeur de a est :

A $\dfrac{1}{2}$ B $\dfrac{1}{3}$ C $\dfrac{1}{4}$ D $\dfrac{1}{5}$

Q14 A partir de l'expression de la valeur de a (question précédente) la valeur de $b = \sin\left(\dfrac{\pi}{5}\right)\sin\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$ est :

A $\dfrac{5}{4}$ B $\dfrac{\sqrt{5}}{4}$ C $\dfrac{1}{4}$ D $\sqrt{\dfrac{5}{4}}$

Q15 Soient A, B deux points distincts du plan. L'ensemble des points M tel que $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AM} - 4\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM} = 0$ est :

A Une droite
B Un cercle
C Une demi-droite
D Un disque

Q16 L'expression simplifiée de

$$u_n = \prod_{k=0}^{n} \frac{k^2+5k+6}{k^2+5k+4}$$

est :

A $\dfrac{6n+3}{n+4}$ B $\dfrac{n+4}{3n+6}$ C $\dfrac{n+4}{6n+3}$ D $\dfrac{3n+6}{n+4}$

Q17 Le concours d'entrée à la première année des ENSA pour l'année 2019 – 2020 se déroule le 23 Juillet 2019.
Le nombre des unités de 23^{2019} est :

A 3 B 9 C 1 D 7

Q18 La valeur du produit suivant

$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(e^{2^k} + e^{-2^k}\right)$$

est :

A $\dfrac{e^{2^{n+1}} - e^{-2^{n+1}}}{e - e^{-1}}$

B $\dfrac{e^{2^{n+1}} + e^{-2^{n+1}}}{e - e^{-1}}$

C $\dfrac{e^{2^{n+1}} - e^{-2^{n+1}}}{e + e^{-1}}$

D $\dfrac{e^{2^{n+1}} + e^{-2^{n+1}}}{e + e^{-1}}$

Q19 Soient $f_n(x) = e^x + nx^2 - 3$ et u_n la solution de $f_n(x) = 0 \quad (x \geq 0,\ n > 0)$, u_n est :

A est croissante
B est décroissante
C est stationnaire
D est périodique

Q20 Suite à la question précédente, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ est égale à :

A $\dfrac{1}{2}$ B 0 C 1 D $\sqrt{\dfrac{1}{2}}$

ÉCOLES NATIONALES DES SCIENCES APPLIQUÉES · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année des ENSA · Maroc

Session de juillet 2019

2019

Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14
A	B	C	D	D	B	D	C	–	–	A	B	C	B

Q15	Q16	Q17	Q18	Q19	Q20
B	D	D	A	B	B

Q1 ✔ Réponse A

Notons $D = b^2u_n + b^2 - ab - a^2 = b(bu_n - a) + (b^2 - a^2)$. Un calcul direct donne

$$bu_{n+1} - a = \frac{(b^2 - a^2)(bu_n - a)}{D},$$

donc

$$v_{n+1} = \frac{bD}{(b^2 - a^2)(bu_n - a)} = v_n + \frac{b^2}{b^2 - a^2}.$$

(v_n) est arithmétique de raison $\frac{b^2}{b^2-a^2}$, avec $v_0 = \frac{ab}{b^2-a^2}$: $v_n = \frac{b(a+nb)}{b^2-a^2}$.

Alors $bu_n - a = \frac{b}{v_n} = \frac{b^2-a^2}{a+nb}$, d'où $u_n = \frac{an+b}{bn+a}$. (Vérification : $u_0 = \frac{b}{a}$.)

Q2 ✔ Réponse B

Pour $1 \le k \le n$: $n+2 \le 2k+n \le 3n$, donc $\frac{1}{3n} \le \frac{1}{2k+n} \le \frac{1}{n+2}$.

En sommant les n termes : $\frac{1}{3} \le u_n \le \frac{n}{n+2} < 1$.

Q3 ✔ Réponse C

$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+2\frac{k}{n}}$ est une somme de Riemann de $x \mapsto \frac{1}{1+2x}$ sur $[0,1]$:

$$\lim u_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+2x} = \left[\frac{1}{2}\ln(1+2x)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln 3 = \ln\sqrt{3}.$$

Q4 ✔ Réponse D

Notons I l'intégrale. Par parties :

$I = \left[x\sqrt{4+x^2}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{4+x^2}}dx = \sqrt{5} - \int_0^1 \frac{(4+x^2)-4}{\sqrt{4+x^2}}dx = \sqrt{5} - I + 4\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$.

Avec l'indication : $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}} = \ln(1+\sqrt{5}) - \ln 2 = \ln\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Donc $2I = \sqrt{5} + 4\ln\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, soit $I = \frac{\sqrt{5}}{2} + 2\ln\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} + \ln\frac{3+\sqrt{5}}{2}$, car $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Q5 ✔ Réponse D

$\cos^4 t + \sin^4 t = (\cos^2 t + \sin^2 t)^2 - 2\sin^2 t\cos^2 t = 1 - \frac{1}{2}\sin^2(2t)$.

Avec $t = 3x$: $(E) \iff \sin^2(6x) = 0 \iff 6x = k\pi \iff x = \frac{k\pi}{6}$.

Q6 ✔ Réponse B

Avec $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$: $\varphi^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ et $\varphi^4 = \frac{14+6\sqrt{5}}{4} = \frac{7+3\sqrt{5}}{2}$. De même $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^4 = \frac{7-3\sqrt{5}}{2}$.

Donc $\lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 1$ (et l'on vérifie $\lambda^4 = 1$).

Q7 ✔ Réponse D

La courbe $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ est le demi-cercle supérieur de centre O et de rayon a. Entre $x = 0$ et $x = a$, l'intégrale est l'aire d'un quart de disque : $\frac{\pi a^2}{4}$.

Q8 ✔ Réponse C

Racine double $\iff b^2 = 4ac$, donc b est pair :

- $b = 2$: $ac = 1$, soit $(1,1)$;
- $b = 4$: $ac = 4$, soit $(1,4), (2,2), (4,1)$;
- $b = 6$: $ac = 9$, soit $(3,3)$.

5 cas favorables sur $6^3 = 216$: $P = \frac{5}{216}$.

Q9 ✔ Réponse –

Par symétrie des tirages (ou probabilités totales) :

$$P(R_2) = \frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9} + \frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9} + \frac{3}{10}\cdot\frac{3}{9} = \frac{27}{90} = \frac{3}{10}.$$

Aucune proposition n'est juste (erreur du sujet).

Q10 ✔ Réponse –

Après une boule jaune, il reste 9 boules dont 3 rouges : $P_{J_1}(R_2) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

Aucune proposition n'est juste (erreur du sujet).

Q11 ✔ Réponse A

$\mathrm{Re}(z) = \sqrt{2} - 1 > 0$ et $\mathrm{Im}(z) = 1 > 0$: $\arg z \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, avec

$\tan(\arg z) = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$.

Or $\tan\frac{3\pi}{8} = \frac{1}{\tan\frac{\pi}{8}} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$.

Donc $\arg z = \frac{3\pi}{8}$.

Q12 ✔ Réponse B

$\cos\frac{5\pi}{8} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = -\sin\frac{\pi}{8} < 0$, et

$\sin^2\frac{\pi}{8} = \frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$.

Donc $\cos\frac{5\pi}{8} = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

Q13 ✔ Réponse C

$a\sin\frac{\pi}{5} = \sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4}\sin\frac{4\pi}{5} = \frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{5}$.

Comme $\sin\frac{\pi}{5} \neq 0$: $a = \frac{1}{4}$.

Q14 ✔ Réponse B

$b - a = -\cos\left(\frac{\pi}{5} + \frac{2\pi}{5}\right) = -\cos\frac{3\pi}{5} = \cos\frac{2\pi}{5}$ et $b + a = \cos\left(\frac{2\pi}{5} - \frac{\pi}{5}\right) = \cos\frac{\pi}{5}$.

Donc $b^2 - a^2 = \cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5} = a = \frac{1}{4}$, soit $b^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$ et, comme $b > 0$, $b = \frac{\sqrt{5}}{4}$.

Q15 ✔ Réponse **B**

$\overrightarrow{AM}\cdot\left(\overrightarrow{AM}-4\overrightarrow{BM}\right)=0$. Soit G le point tel que $\overrightarrow{AG}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$; on vérifie que $\overrightarrow{AM}-4\overrightarrow{BM}=-3\overrightarrow{GM}$.
La condition devient $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{GM}=0$: c'est le cercle de diamètre $[AG]$.

Q16 ✔ Réponse **D**

$\frac{k^2+5k+6}{k^2+5k+4}=\frac{(k+2)(k+3)}{(k+1)(k+4)}$. Les deux produits télescopent :

$$\prod_{k=0}^{n}\frac{k+2}{k+1}=n+2,$$

$$\prod_{k=0}^{n}\frac{k+3}{k+4}=\frac{3}{n+4}.$$

Donc $u_n=\frac{3(n+2)}{n+4}=\frac{3n+6}{n+4}$.

Q17 ✔ Réponse **D**

Le chiffre des unités de 23^n est celui de 3^n, qui suit le cycle $3,9,7,1$ de période 4. $2019=4\times504+3$: c'est le troisième du cycle, 7.

Q18 ✔ Réponse **A**

Pour tout k : $\left(e^{2^k}-e^{-2^k}\right)\left(e^{2^k}+e^{-2^k}\right)=e^{2^{k+1}}-e^{-2^{k+1}}$. Le produit télescope :

$$(e-e^{-1})\prod_{k=0}^{n}\left(e^{2^k}+e^{-2^k}\right)=e^{2^{n+1}}-e^{-2^{n+1}}.$$

La proposition A est donc le produit **pour k allant de 0 à n**. Avec k partant de 1 comme sur le sujet, il faut encore diviser par $e+e^{-1}$: $u_n=\frac{e^{2^{n+1}}-e^{-2^{n+1}}}{e^2-e^{-2}}$, qui n'est pas proposé.

Remarque : Tel qu'imprimé (produit à partir de k = 1), aucune proposition n'est juste : A correspond au produit à partir de k = 0 (pour n = 1 : $e^2+e^{-2}\approx7{,}52$ alors que A $\approx 23{,}2$). À trancher par le professeur (corriger l'énoncé en k = 0 ou retirer la question).

Q19 ✔ Réponse **B**

f_n est strictement croissante sur $[0,+\infty[$, avec $f_n(0)=-2<0$: u_n existe et est unique.
$f_{n+1}(u_n)=f_n(u_n)+u_n^2=u_n^2>0=f_{n+1}(u_{n+1})$, donc $u_n>u_{n+1}$: la suite est décroissante.

Q20 ✔ Réponse **B**

$nu_n^2=3-e^{u_n}\le2$ (car $e^{u_n}\ge1$), donc $0\le u_n\le\sqrt{\frac{2}{n}}\to0$.

ÉCOLES NATIONALES DES SCIENCES APPLIQUÉES · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année des ENSA · Maroc

Session de juillet 2018

2018

Énoncé

Q1 (u_n) une suite réelle. Si $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1}-u_n)=2$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{n}=$

A 0 B 1 C $+\infty$ D 2

Q2 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sin^2 n-\cos^3 n}{n}=$

A 0 B 1 C $-\infty$ D $+\infty$

Q3 $\lim\limits_{x\to1^+}\ln x.\ln(\ln x)=$

A 1 B 0 C $+\infty$ D $-\infty$

Q4 Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

A $u_{2n}-u_n\geq\dfrac{1}{2}$ B $u_{2n}-u_n\leq\dfrac{1}{4}$

C $u_{2n}-u_n<\dfrac{1}{3}$ D $u_{2n}-u_n<\dfrac{1}{2}$

Q5 Pour la même suite que Q4. On a :

A $u_{2^{10}}\geq 6$ B $u_{2^{10}}<6$

C $u_{2^{10}}=3$ D $u_{2^{10}}<5$

Q6 $\cos(\text{Arctan}\,x)=$

A $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ B $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

C $\dfrac{-1}{\sqrt{1+x^2}}$ D $\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

Q7 Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue en 0 telle que $\forall x\in\mathbb{R}\ f(2x)=f(x)$ Alors f est :

A Constante
B Strictement croissante
C Strictement décroissante
D périodique de période 2

Q8 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction dérivable en $a\in\mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to a}\frac{xf(a)-af(x)}{x-a}=$$

A $f'(a)$ B $f(a)+af'(a)$

C $f(a)-f'(a)$ D $f(a)-af'(a)$

Q9 $\displaystyle\int_0^1\frac{x^4}{x^2+1}\,dx=$

A $\dfrac{\pi}{4}$ B $\dfrac{2}{3}$ C $\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{2}{3}$ D $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2}{3}$

Q10 $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}}x^2\ln\left(x^2+1\right)dx=$

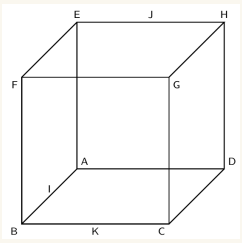
A $\sqrt{3}\ln 2-\dfrac{\pi}{9}$

B $\sqrt{3}\ln 2+\dfrac{\pi}{9}$

C $2\left(\sqrt{3}\ln 2-\dfrac{\pi}{9}\right)$

D $\sqrt{3}\ln 2$

Exercice 1 : On considère le cube ABCDEFGH et on note $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$ un repère orthonormé de l'espace.



Q11 Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{FD}$ sont

A $(1,1,1)$ B $(-1,1,1)$

C $(-1,1,-1)$ D $(1,1,0)$

Q12 Une représentation paramétrique de la droite (FD) est

A $\begin{cases}x=t\\y=t+1,\quad t\in\mathbb{R}\\z=-t\end{cases}$

B $\begin{cases}x=-t\\y=-t+1,\quad t\in\mathbb{R}\\z=-t\end{cases}$

C $\begin{cases}x=-t\\y=t+1,\quad t\in\mathbb{R}\\z=-t\end{cases}$

D $\begin{cases}x=t\\y=t+1,\quad t\in\mathbb{R}\\z=t\end{cases}$

Q13 On note I le milieu du segment [AB], J est le milieu du segment [EH] et K le milieu du segment [BC]. La droite (FD)

A est orthogonale au plan (IJK)
B n'est pas orthogonale au plan (IJK)
C appartient au plan (IJK)
D parallèle au plan (IJK)

Q14 Une équation cartésienne du plan (IJK) est $ax+by+cz+d=0$ avec

A $a=-1,\ b=-1,\ c=1$ et $d=\dfrac{-1}{2}$

B $a=1,\ b=-1,\ c=1$ et $d=\dfrac{-1}{2}$

C $a=-1,\ b=-1,\ c=1$ et $d=\dfrac{1}{2}$

D $a=1,\ b=1,\ c=-1$ et $d=\dfrac{-1}{2}$

Q15 Les coordonnées du point M ; intersection de la droite (FD) et le plan (IJK) sont :

A $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ B $\left(\dfrac{1}{2},0,\dfrac{1}{2}\right)$

C $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},0\right)$ D $(1,1,0)$

Q16 Le triangle IJK est

A Equilatéral B Rectangle en J
C Rectangle en K D Rectangle en I

Exercice 2 : Le QCM du concours ENSA comporte 20 question, pour chacune desquelles 4 réponses sont proposées et une seule est correcte. Un étudiant décide de remplir la grille-réponse en cochant au hasard une réponse pour chacune des 20 questions. Pour $n\in\mathbb{N}$ et $0\leq n\leq 20$, on note A_n «répondre au hasard exactement n fois correctement» ; l'évènement A_n est réalisé si n réponses sont correctes et $20-n$ sont incorrectes. $\binom{n}{p}$ désigne le nombre de combinaison de p parmi n.

Q17 Le nombre de grilles-réponses possibles est

A 24 B 20^4 C 80 D 4^{20}

Q18 La probabilité de ne donner aucune réponse correcte est $P(A_0)=$

A $\dfrac{3^{20}}{4^{20}}$ B $\dfrac{24}{4^{20}}$ C $\dfrac{1}{20^4}$ D $\dfrac{1}{80}$

Q19 La probabilité de donner exactement n bonnes réponses correctes est $P(A_n)=$

A $\dfrac{\binom{20}{n}3^n}{4^{20}}$ B $\dfrac{\binom{20}{n}3^{20-n}}{4^{20}}$

C $\dfrac{\binom{20}{3}3^{20-n}}{20^4}$ D $\dfrac{\binom{20}{3}3^n}{80}$

Q20 La probabilité de répondre au hasard au moins 6 fois correctement est

A $\displaystyle\sum_{n=6}^{20}\frac{\binom{20}{n}3^{20-n}}{4^{20}}$ B $\displaystyle\sum_{n=0}^{6}\frac{\binom{20}{n}3^{20-n}}{4^{20}}$

C $\displaystyle\sum_{n=6}^{20}\frac{\binom{20}{n}3^{20-n}}{20^4}$ D $\displaystyle\sum_{n=0}^{6}\frac{\binom{20}{n}3^{20-n}}{20^4}$

ÉCOLES NATIONALES DES SCIENCES APPLIQUÉES · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année des ENSA · Maroc

Session de juillet 2018

2018

Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14
D	A	B	A	A	B	A	D	C	C	C	C	A	B

Q15	Q16	Q17	Q18	Q19	Q20
A	D	D	A	B	A

Q1 ✔ Réponse D

$\frac{u_n-u_0}{n}=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1}-u_k)$ est la moyenne des n premiers écarts. Comme ces écarts tendent vers 2, leur moyenne tend aussi vers 2 (théorème de Cesàro). Et $\frac{u_0}{n}\to 0$, donc $\frac{u_n}{n}\to 2$. (Exemple : $u_n=2n$.)

Q2 ✔ Réponse A

$|\sin^2 n-\cos^3 n|\le 2$, donc $\left|\frac{\sin^2 n-\cos^3 n}{n}\right|\le\frac{2}{n}\to 0$.

Q3 ✔ Réponse B

Avec $t=\ln x\to 0^+$ quand $x\to 1^+$: $\ln x\cdot\ln(\ln x)=t\ln t\to 0$ (croissances comparées).

Q4 ✔ Réponse A

$u_{2n}-u_n=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}$ compte n termes, chacun $\ge\frac{1}{2n}$: la somme est $\ge n\times\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}$.

Q5 ✔ Réponse A

D'après Q4, $u_{2j}-u_{2j-1}\ge\frac{1}{2}$ pour tout $j\ge 1$. En sommant de $j=1$ à 10 :

$$u_{2^{10}}\ge u_1+10\times\frac{1}{2}=1+5=6.$$

Q6 ✔ Réponse B

Avec $t=\operatorname{Arctan}x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$: $\cos t>0$ et $\cos^2 t=\frac{1}{1+\tan^2 t}=\frac{1}{1+x^2}$.
Donc $\cos(\operatorname{Arctan}x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Q7 ✔ Réponse A

Pour tout x et tout n : $f(x)=f\left(\frac{x}{2}\right)=\cdots=f\left(\frac{x}{2^n}\right)$. Quand $n\to+\infty$, $\frac{x}{2^n}\to 0$ et, par continuité en 0, $f\left(\frac{x}{2^n}\right)\to f(0)$.
Donc $f(x)=f(0)$: f est constante.

Q8 ✔ Réponse D

$xf(a)-af(x)=$
$(x-a)f(a)-a\big(f(x)-f(a)\big)$, donc

$$\frac{xf(a)-af(x)}{x-a}=f(a)-a\,\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\to f(a)-af'(a).$$

Q9 ✔ Réponse C

$\frac{x^4}{x^2+1}=x^2-1+\frac{1}{x^2+1}$, donc l'intégrale vaut $\left[\frac{x^3}{3}-x+\arctan x\right]_0^1=\frac{1}{3}-1+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}$.

Q10 ✔ Réponse C

Par parties ($u=\ln(x^2+1)$, $v'=x^2$) :

$$\int_0^{\sqrt3}x^2\ln(x^2+1)\,dx=\left[\frac{x^3}{3}\ln(x^2+1)\right]_0^{\sqrt3}-\frac{2}{3}\int_0^{\sqrt3}\frac{x^4}{x^2+1}\,dx$$
$$=\sqrt3\ln 4-\frac{2}{3}\left[\frac{x^3}{3}-x+\arctan x\right]_0^{\sqrt3}.$$

Le crochet vaut $\sqrt3-\sqrt3+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$.
L'intégrale vaut
$2\sqrt3\ln 2-\frac{2\pi}{9}=2\left(\sqrt3\ln 2-\frac{\pi}{9}\right)$.

Q11 ✔ Réponse C

Dans le repère $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$:
$A(0,0,0)$, $B(1,0,0)$, $D(0,1,0)$, $E(0,0,1)$, $C(1,1,0)$, $F(1,0,1)$, $G(1,1,1)$, $H(0,1,1)$.
$\overrightarrow{FD}=D-F=(0-1,\ 1-0,\ 0-1)=(-1,1,-1)$.

Q12 ✔ Réponse C

Dans le repère $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$:
$A(0,0,0)$, $B(1,0,0)$, $D(0,1,0)$, $E(0,0,1)$, $C(1,1,0)$, $F(1,0,1)$, $G(1,1,1)$, $H(0,1,1)$.
La droite (FD) passe par $D(0,1,0)$ et est dirigée par $\overrightarrow{FD}(-1,1,-1)$: $x=-t$, $y=1+t$, $z=-t$. Les autres systèmes passent bien par D (pour $t=0$) mais ont un mauvais vecteur directeur.

Q13 ✔ Réponse A

Dans le repère $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$:
$A(0,0,0)$, $B(1,0,0)$, $D(0,1,0)$, $E(0,0,1)$, $C(1,1,0)$, $F(1,0,1)$, $G(1,1,1)$, $H(0,1,1)$.
Milieux : $I\left(\frac12,0,0\right)$, $J\left(0,\frac12,1\right)$, $K\left(1,\frac12,0\right)$.
$\overrightarrow{IJ}\left(-\frac12,\frac12,1\right)$ et $\overrightarrow{IK}\left(\frac12,\frac12,0\right)$. Avec $\overrightarrow{FD}(-1,1,-1)$:

$$\overrightarrow{FD}\cdot\overrightarrow{IJ}=\tfrac12+\tfrac12-1=0,$$
$$\overrightarrow{FD}\cdot\overrightarrow{IK}=-\tfrac12+\tfrac12+0=0.$$

$\overrightarrow{FD}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan : (FD) est orthogonale au plan (IJK).

Q14 ✔ Réponse B

Dans le repère $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$:
$A(0,0,0)$, $B(1,0,0)$, $D(0,1,0)$, $E(0,0,1)$, $C(1,1,0)$, $F(1,0,1)$, $G(1,1,1)$, $H(0,1,1)$.
Milieux : $I\left(\frac12,0,0\right)$, $J\left(0,\frac12,1\right)$, $K\left(1,\frac12,0\right)$.
D'après Q13, $\overrightarrow{FD}(-1,1,-1)$, ou $(1,-1,1)$, est normal au plan : $x-y+z+d=0$. Avec I : $\frac12+d=0$, donc $d=-\frac12$.
Vérification : J : $0-\frac12+1-\frac12=0$; K : $1-\frac12+0-\frac12=0$.

Q15 ✔ Réponse A

Avec la représentation de (FD) ($x=-t$, $y=1+t$, $z=-t$) et l'équation $x-y+z-\frac12=0$ du plan :

$$-t-(1+t)-t-\tfrac12=0\iff t=-\tfrac12.$$

$M\left(\frac12,\frac12,\frac12\right)$: c'est le centre du cube.

Q16 ✔ Réponse D

Dans le repère $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$:
$A(0,0,0)$, $B(1,0,0)$, $D(0,1,0)$, $E(0,0,1)$, $C(1,1,0)$, $F(1,0,1)$, $G(1,1,1)$, $H(0,1,1)$.
Milieux : $I\left(\frac12,0,0\right)$, $J\left(0,\frac12,1\right)$, $K\left(1,\frac12,0\right)$.
$IJ^2=\frac14+\frac14+1=\frac32$, $IK^2=\frac14+\frac14=\frac12$, $JK^2=1+0+1=2$.
$IJ^2+IK^2=2=JK^2$: d'après la réciproque de Pythagore, le triangle est rectangle en I (on a aussi $\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{IK}=-\frac14+\frac14+0=0$).

Q17 ✔ Réponse **D**

Chacune des 20 questions offre 4 choix indépendants : $4 \times 4 \times \cdots \times 4 = 4^{20}$ grilles.

Q18 ✔ Réponse **A**

Pour chaque question, il y a 3 réponses fausses sur 4 : 3^{20} grilles sans aucune bonne réponse sur 4^{20} grilles équiprobables.

$$P(A_0) = \frac{3^{20}}{4^{20}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{20}.$$

Q19 ✔ Réponse **B**

On choisit les n questions réussies : $\binom{20}{n}$ façons ; chacune a une seule bonne réponse, et chacune des $20-n$ autres a 3 réponses fausses possibles.

$P(A_n) = \dfrac{\binom{20}{n}\, 3^{20-n}}{4^{20}}$ (loi binomiale de paramètres 20 et $\frac{1}{4}$).

Q20 ✔ Réponse **A**

« Au moins 6 » est la réunion disjointe des A_n pour $n = 6, \ldots, 20$: on additionne les probabilités de Q19 pour n allant de 6 à 20.

ÉCOLES NATIONALES DES SCIENCES APPLIQUÉES · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année des ENSA · Maroc

Session de juillet 2017

2017 Énoncé

Q1 $\sqrt{9{,}8}\left(\frac{147}{375}\right)^{-\frac{4}{8}} =$

A 4 B 5 C 6 D 7

Q2 On pose

$$X = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$$

En calculant X^3, montrer que X vaut :

A 0 B 1 C 2 D 3

Q3 $2\operatorname{Arctan}\frac{1}{3} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{7} =$

A $\frac{\pi}{2}$ B $\frac{\pi}{3}$ C $\frac{\pi}{4}$ D $\frac{\pi}{6}$

Q4 $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n-(-1)^n}{n+(-1)^n} =$

A 0 B 1 C 2 D 3

Q5 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{xe^{-x}+x^2}{x-\ln x} =$

A 0 B 1 C $+\infty$ D $-\infty$

Q6 $\lim\limits_{x\to-1} \frac{x^3+x^2-x-1}{x^3-3x-2} =$

A $\frac{1}{2}$ B $\frac{1}{4}$ C $\frac{2}{3}$ D $\frac{3}{2}$

Q7 Soit $f(x)=|x|$ et f' la dérivée d'ordre 1 de f, alors :

A f n'est pas dérivable en 0
B $f'(0)=0$
C $f'(0)=1$
D $f'(0)=-1$

Q8 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^7\,dx =$

A $\frac{1}{\pi}$ B 0 C $\frac{16}{35}$ D $\frac{16}{35}\pi$

Q9 $\int_{\frac{1}{3}}^{1} \frac{(x-x^3)^{\frac{1}{3}}}{x^4}\,dx =$

A 2 B 5 C 6 D 7

Q10 $\int_0^1 \frac{xe^x}{(x+1)^2}\,dx =$

A $\left(\frac{e}{2}-1\right)$ B $(e^{-2}+1)$
C e^{-2} D e^2

Exercice 1 : On munit l'espace d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

Q11 Une représentation paramétrique de la droite passant par le point $A=(-1,2,-3)$ et orthogonale au plan d'équation $2x-3y+4z+1=0$ est :

A $\begin{cases} x=3-2t \\ y=2-t \\ z=-3+t \end{cases}$ B $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-3-2t \\ z=-3-4t \end{cases}$

C $\begin{cases} x=-3+2t \\ y=2-t \\ z=-3+t \end{cases}$ D $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=2-3t \\ z=-3+4t \end{cases}$

Q12 On note le point $A=(-1,3,1)$ et on considère la droite (D) dont l'une des représentations paramétrique est

$$\begin{cases} x=-1+2t \\ y=2-2t \\ z=3+3t \end{cases}$$

Les coordonnées du projeté orthogonal du point A sur la droite (D) sont :

A $\left(\frac{-33}{17},\frac{50}{17},\frac{27}{17}\right)$ B $\left(\frac{1}{13},\frac{12}{13},\frac{60}{13}\right)$
C $\left(\frac{-1}{17},\frac{18}{17},\frac{75}{17}\right)$ D $\left(\frac{-1}{17},\frac{18}{17},-\frac{75}{17}\right)$

Q13 L'intersection de la droite dirigée par $\vec{u}=(3,2,1)$ et passant par le point $A=(1,2,3)$ avec le plan (Oxy) est le point B de coordonnées :

A $(4,4,4)$ B $(-5,-2,1)$
C $(-8,-4,0)$ D $(4,4,0)$

Exercice 2 : Pour fêter leur réussite au concours ENSA, Taha et Jawad sont partis au restaurant pour déjeuner. Taha possède dans sa poche trois billets de 50 DH et un billet de 100 DH, alors que Jawad a dans sa poche un seul billet de 50 DH et un billet de 100 DH.
En tant que Amis, joyeux, Taha et Jawad décident en commun accord avec le serveur de payer leur repas selon la procédure suivante :
Dans une urne, deux boules enferment chacune le prénom d'un des deux amis, écrit sur un bout de papier. Le serveur choisit au hasard une des deux boules, l'ouvre, énonce le prénom écrit sur le bout de papier, le remet dans la boule qu'il dépose tout de suite dans l'urne.
La personne dont le prénom est choisi mettra sa main dans sa poche, en fermant les yeux, et fera sortir obligatoirement un seul billet (nous supposons que les billets sont indiscernables au toucher) et le remettra au serveur qu'il mettra à son tour dans sa caisse quelle que soit sa valeur. Si la valeur du billet tiré est de 100 DH, le serveur ferme la caisse et les deux amis peuvent quitter le restaurant, sinon l'opération se refait, une seule fois encore, selon la même procédure.

Q14 La probabilité pour que le coût du repas des deux amis soit de 150 DH est :

A $\frac{11}{32}$ B $\frac{10}{32}$ C $\frac{9}{32}$ D $\frac{12}{32}$

Q15 La probabilité pour que les deux amis paient équitablement le repas est :

A $\frac{6}{32}$ B $\frac{9}{32}$ C $\frac{15}{32}$ D $\frac{11}{32}$

Q16 La probabilité pour que l'un des deux amis mange gratuitement est :

A $\frac{19}{32}$ B $\frac{16}{32}$ C $\frac{22}{32}$ D $\frac{4}{32}$

Exercice 3 : On considère les nombres complexes suivants :

$$z_1=\sqrt{2}+i\sqrt{6}, \quad z_2=2+2i$$

et $Z=\frac{z_1}{z_2}$

Q17 La forme algébrique de Z est :

A $\frac{\sqrt{2}}{4}\left(1+\sqrt{3}+i\sqrt{3}-i\right)$
B $\frac{\sqrt{2}}{4}\left(1-\sqrt{3}+i\sqrt{3}-i\right)$
C $\frac{\sqrt{2}}{4}(1+i)$
D $\frac{\sqrt{2}}{4}(1-i)$

Q18 Le module de Z est :

A 4 B 2 C 3 D 1

Q19 L'argument de Z est :

A $\frac{\pi}{12}[2\pi]$ B $\frac{\pi}{3}[2\pi]$
C $\frac{\pi}{6}[2\pi]$ D $\frac{\pi}{2}[2\pi]$

Q20 La forme algébrique de Z^{2017} est :

A $\frac{\sqrt{2}}{4}\left(1+\sqrt{3}+i\sqrt{3}-i\right)$
B $\frac{\sqrt{2}}{4}\left(-\sqrt{3}+i\sqrt{3}\right)$
C $\frac{\sqrt{2}}{4}(1+i)$
D $\frac{\sqrt{2}}{4}(1-i)$

ÉCOLES NATIONALES DES SCIENCES APPLIQUÉES · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année des ENSA · Maroc

Session de juillet 2017

2017 — Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14
B	B	C	B	C	C	A	C	C	A	D	A	C	B

Q15	Q16	Q17	Q18	Q19	Q20
A	C	A	D	A	A

Q1 ✔ Réponse B

$-\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}$, donc l'expression vaut $\sqrt{9{,}8} \times \sqrt{\frac{375}{147}} = \sqrt{\frac{9{,}8 \times 375}{147}} = \sqrt{\frac{3675}{147}} = \sqrt{25} = 5$.

Q2 ✔ Réponse B

Avec $a = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2}$ et $b = \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$: $a^3 - b^3 = 4$ et $ab = \sqrt[3]{5-4} = 1$. $X^3 = (a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b) = 4 - 3X$, donc $X^3 + 3X - 4 = (X-1)(X^2+X+4) = 0$. Comme $X^2 + X + 4 > 0$, $X = 1$.

Q3 ✔ Réponse C

Avec $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$: $\tan\left(2 \operatorname{Arctan} \frac{1}{3}\right) = \dfrac{2/3}{1 - 1/9} = \dfrac{3}{4}$, puis

$$\tan\left(2 \operatorname{Arctan} \tfrac{1}{3} + \operatorname{Arctan} \tfrac{1}{7}\right) = \frac{\frac{3}{4} + \frac{1}{7}}{1 - \frac{3}{28}} = \frac{25/28}{25/28} = 1.$$

La somme est dans $]0, \frac{\pi}{2}[$ (chaque angle est petit), donc elle vaut $\dfrac{\pi}{4}$.

Q4 ✔ Réponse B

En divisant par n : $\dfrac{1 - \frac{(-1)^n}{n}}{1 + \frac{(-1)^n}{n}} \to \dfrac{1}{1} = 1$, car $\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n} \to 0$.

Q5 ✔ Réponse C

$$\frac{xe^{-x} + x^2}{x - \ln x} = x \times \frac{e^{-x} + x}{x - \ln x} = x \times \frac{1 + \frac{e^{-x}}{x}}{1 - \frac{\ln x}{x}}.$$

La fraction tend vers 1 et $x \to +\infty$: la limite est $+\infty$.

Q6 ✔ Réponse C

$x^3 + x^2 - x - 1 = (x+1)^2(x-1)$ et $x^3 - 3x - 2 = (x+1)^2(x-2)$. Pour $x \neq -1$, la fraction vaut $\dfrac{x-1}{x-2} \to \dfrac{-2}{-3} = \dfrac{2}{3}$.

Q7 ✔ Réponse A

$\dfrac{|x| - 0}{x - 0}$ vaut 1 pour $x > 0$ et -1 pour $x < 0$: les limites à droite et à gauche diffèrent. f n'est pas dérivable en 0.

Q8 ✔ Réponse C

$(\cos x)^7 = (1 - \sin^2 x)^3 \cos x$. Avec $u = \sin x$:

$$\int_0^1 (1-u^2)^3\, du = \int_0^1 (1 - 3u^2 + 3u^4 - u^6)\, du = 1 - 1 + \frac{3}{5} - \frac{1}{7} = \frac{16}{35}.$$

Q9 ✔ Réponse C

Pour $x > 0$: $\left(x - x^3\right)^{\frac{1}{3}} = x\left(\frac{1}{x^2} - 1\right)^{\frac{1}{3}}$, donc l'intégrande vaut $\dfrac{1}{x^3}\left(\dfrac{1}{x^2} - 1\right)^{\frac{1}{3}}$.

Avec $u = \dfrac{1}{x^2} - 1$, $du = -\dfrac{2}{x^3}dx$; u va de 8 (pour $x = \frac{1}{3}$) à 0 :

$$\int_{1/3}^1 \ldots = \frac{1}{2}\int_0^8 u^{\frac{1}{3}}\, du = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4}\left[u^{\frac{4}{3}}\right]_0^8 = \frac{3}{8} \times 16 = 6.$$

Q10 ✔ Réponse A

$$\left(\frac{e^x}{x+1}\right)' = \frac{e^x(x+1) - e^x}{(x+1)^2} = \frac{xe^x}{(x+1)^2}.$$

L'intégrale vaut $\left[\dfrac{e^x}{x+1}\right]_0^1 = \dfrac{e}{2} - 1$.

Q11 ✔ Réponse D

Une droite orthogonale au plan est dirigée par son vecteur normal $\vec{n}(2,-3,4)$. Passant par $A(-1,2,-3)$: $x = -1 + 2t$, $y = 2 - 3t$, $z = -3 + 4t$.

Q12 ✔ Réponse A

Le point $M(t) = (-1+2t, 2-2t, 3+3t)$ de (D) est le projeté de A quand $\overrightarrow{AM}$ est orthogonal à $\vec{u}(2,-2,3)$:

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 2(2t) - 2(-1-2t) + 3(2+3t) = 17t + 8 = 0 \iff t = -\frac{8}{17}.$$

$M\left(-1 - \frac{16}{17},\ 2 + \frac{16}{17},\ 3 - \frac{24}{17}\right) = \left(-\frac{33}{17}, \frac{50}{17}, \frac{27}{17}\right)$.

Q13 ✔ Réponse C

La droite : $(1+3t, 2+2t, 3+t)$. Le plan (Oxy) a pour équation $z = 0$, donc $t = -3$ et $B(1-9, 2-6, 0) = (-8, -4, 0)$.

Q14 ✔ Réponse B

Premier tirage : Taha est désigné avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et tire 100 DH avec la probabilité $\frac{1}{4}$ ($\frac{3}{4}$ pour 50 DH) ; Jawad tire 100 DH avec la probabilité $\frac{1}{2}$. Le billet tiré ne revient pas dans la poche.
Le repas coûte 150 DH si le premier billet est de 50 DH et le second de 100 DH.

- Taha tire 50 DH ($\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$). Il lui reste deux billets de 50 et un de 100. Second tirage de 100 DH : $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{12}$. Contribution : $\frac{3}{8} \times \frac{5}{12} = \frac{5}{32}$.
- Jawad tire 50 DH ($\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$). Il ne lui reste que le billet de 100. Second tirage de 100 DH : $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times 1 = \frac{5}{8}$. Contribution : $\frac{1}{4} \times \frac{5}{8} = \frac{5}{32}$.

Total : $\dfrac{10}{32}$.

Q15 ✔ Réponse A

Premier tirage : Taha est désigné avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et tire 100 DH avec la probabilité $\frac{1}{4}$ ($\frac{3}{4}$ pour 50 DH) ; Jawad tire 100 DH avec la probabilité $\frac{1}{2}$. Le billet tiré ne revient pas dans la poche.
Ils paient la même somme seulement si chacun donne un billet de 50 DH : un premier tirage de 50 DH par l'un, puis un second de 50 DH par l'autre.

- Taha 50 puis Jawad 50 : $\frac{3}{8} \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{32}$.
- Jawad 50 puis Taha 50 : $\frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{4}\right) = \frac{3}{32}$.

Total : $\dfrac{6}{32}$.

Q16 ✔ Réponse C

Premier tirage : Taha est désigné avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et tire 100 DH avec la probabilité $\frac{1}{4}$ ($\frac{3}{4}$ pour 50 DH) ; Jawad tire 100 DH avec la probabilité $\frac{1}{2}$. Le billet tiré ne revient pas dans la poche.
L'un mange gratuitement si tous les billets viennent de la poche de l'autre :

- un seul tirage, de 100 DH : $\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{8}=\frac{12}{32}$;
- deux tirages par Taha (le premier de 50 DH) : $\frac{3}{8}\times\frac{1}{2}=\frac{6}{32}$;
- deux tirages par Jawad (le premier de 50 DH) : $\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{4}{32}$.

Total : $\dfrac{22}{32}$.

Q17 ✔ Réponse A

$$Z=\frac{(\sqrt{2}+i\sqrt{6})(2-2i)}{(2+2i)(2-2i)}=\frac{2\sqrt{2}+2\sqrt{6}+i(2\sqrt{6}-2\sqrt{2})}{8}=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(1+\sqrt{3}+i\sqrt{3}-i\right).$$

Q18 ✔ Réponse D

$|z_1|=\sqrt{2+6}=2\sqrt{2}$ et
$|z_2|=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$, donc $|Z|=1$.

Q19 ✔ Réponse A

$z_1=2\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\sqrt{2}\,e^{i\pi/3}$ et
$z_2=2\sqrt{2}\,e^{i\pi/4}$.
$\arg Z=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{12}\ [2\pi]$.

Q20 ✔ Réponse A

$Z=e^{i\pi/12}$, donc $Z^{24}=e^{2i\pi}=1$.
Comme $2017=24\times84+1$: $Z^{2017}=Z$, dont la forme algébrique est celle de Q17.

ÉCOLES NATIONALES DES SCIENCES APPLIQUÉES · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année des ENSA · Maroc

Session de juillet 2016

2016 Énoncé

Exercice 1 : Soient a, b, c trois nombres complexes distincts, A, B, C leurs images dans le plan. On note

$$t = \frac{c-a}{b-a}$$

Q1 Soient $r \in \mathbb{R}_+^*$, $\theta \in \mathbb{R}$, la relation $t = re^{i\theta}$ se traduit géométriquement par :

A $AC = rAB$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv 0[2\pi]$

B $AB = rAC$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \theta[2\pi]$

C $AC = rAB$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \theta[2\pi]$

D $AC = r^2AB$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \theta[2\pi]$

Q2 A, B, C sont alignés si et seulement si

A $t \in i\mathbb{R}$ B $t \in \mathbb{R}_+$
C $t \in i\mathbb{R}_+$ D $t \in \mathbb{R}$

Q3 Le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si

A $t \in i\mathbb{R}$ B $t \in \mathbb{R}_+$
C $t \in i\mathbb{R}_+$ D $t \in \mathbb{R}$

Exercice 2 : Soit E un ensemble à n éléments, et $A \subset E$ un sous-ensemble à p éléments.

Q4 Le nombre de parties de E est

A n^2 B 2^n C n^n D $n!$

Q5 Le nombre de parties de E qui contiennent un et un seul élément de A est

A $n\ 2^{n-p}$ B $p\ n\ 2^{n-p}$
C $p\ 2^{n-p}$ D 2^{n-p}

Q6 On part du point de coordonnées (0,0) pour rejoindre le point de coordonnées (p, q) (p et q entiers naturels donnés strictement supérieures à 1) en se déplaçant à chaque étape d'une unité vers la droite ou vers le haut. Combien y a-t-il de chemins possibles ?

A C_{p+q}^q B qC_{p+q}^q C C_{pq}^q D 2^{p+q}

Q7 Soit f la fonction réelle définit de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

A f est injective
B f est surjective
C f n'est pas injective
D f est injective et n'est pas surjective

Q8 Combien le nombre 15! admet-il de diviseurs ?

A 4032 B 3042 C 2034 D 3044

Q9 Un QCM comporte 20 questions, pour chacune d'elles 4 réponses sont proposées, une seule est exacte. Le nombre de grilles réponses possibles est :

A 4^{20} B 20^4 C 800 D 80

Q10 Soit $(x, y, z) \in ([0,1])^3$
$\alpha = \text{Minimum}\{x(1-y); y(1-z); z(1-x)\}$

A $\alpha = 0$ B $\alpha > \frac{1}{4}$
C $\frac{1}{8} < \alpha < \frac{1}{4}$ D $\alpha \leq \frac{1}{4}$

Q11 $\displaystyle\sum_{k=0}^{2016} (-1)^k C_{2016}^k =$

A 0 B 1 C 2 D 3

Q12 $\displaystyle\sum_{1\leq i\leq 10} \sum_{1\leq j\leq 10} (i+j)^2 =$

A 10000 B 10750
C 13000 D 13750

Q13 Toute fonction discontinue est :

A constante B non dérivable
C dérivable D périodique

Q14 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$

A f' n'est pas continue en 0
B f' est continue en 0
C f' admet une limite finie en 0
D f' a pour limite $+\infty$ en 0

Q15 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2} =$

A 1 B e^{-4} C $\sqrt{e}$ D 0

Q16 $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{2\cos^2\left(\frac{1}{x}\right) - \sin\left(\frac{1}{x}\right) + 3}{x + \sqrt{x}} =$

A $+\infty$ B 0 C 1 D 3

Q17 Soit r_i $(i = 1, 4)$ les quatres racines de l'équation réelle :

$$(x-7)(x-5)(x+4)(x+6) = 608$$

Le produit des racines

$$\prod_{i=1}^{4} r_i$$

vaut :

A 464 B 608 C 232 D 840

Q18 $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1+\ln x}{x \ln x}\, dx =$

A $1 - \ln 2$ B $1 + \ln 2$ C $\ln 2$ D 1

Q19 $\displaystyle\int_0^1 x^2 \sin(\pi x)\, dx =$

A $\frac{\pi^2 - 4}{\pi^3}$ B $\frac{\pi^2 + 4}{\pi^3}$
C $\frac{4}{\pi^3}$ D $\frac{-4}{\pi^3}$

Q20 Soient

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\cos(x) + \sin(x)}\, dx$$

et

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\cos(x) + \sin(x)}\, dx$$

A $I = J = 0$
B $I = \frac{\pi}{2}$ et $J = \frac{\pi}{4}$
C $I = J = \frac{\pi}{4}$
D $I = \frac{\pi}{3}$ et $J = \pi$

ÉCOLES NATIONALES DES SCIENCES APPLIQUÉES · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année des ENSA · Maroc

Session de juillet 2016

2016

Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14
C	D	A	B	C	A	C	A	A	D	A	D	B	A

Q15	Q16	Q17	Q18	Q19	Q20
B	A	C	B	A	C

Q1 ✔ Réponse C

$|t| = \dfrac{|c-a|}{|b-a|} = \dfrac{AC}{AB}$ et $\arg t = \arg(c-a) - \arg(b-a) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ $[2\pi]$.

$t = re^{i\theta}$ signifie donc $AC = rAB$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \theta$ $[2\pi]$.

Q2 ✔ Réponse D

A, B, C sont alignés si et seulement si $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv 0$ $[\pi]$, c'est-à-dire $\arg t \equiv 0$ $[\pi]$: t est réel (positif ou négatif).

Q3 ✔ Réponse A

ABC est rectangle en A si et seulement si $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{2}$ $[\pi]$: t est imaginaire pur ($t \neq 0$ car les points sont distincts). L'angle peut valoir $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$, d'où $i\mathbb{R}$ et non $i\mathbb{R}_+$.

Q4 ✔ Réponse B

Une partie est déterminée en décidant, pour chacun des n éléments, s'il y appartient ou non : 2^n parties.

Q5 ✔ Réponse C

On choisit l'unique élément de A (p façons), puis une partie quelconque de $E \setminus A$, qui a $n-p$ éléments (2^{n-p} façons) : $p\,2^{n-p}$.

Q6 ✔ Réponse A

Un chemin compte $p+q$ pas, dont q vers le haut. Il est déterminé par la position de ces q pas parmi les $p+q$: C_{p+q}^{q} chemins.

Q7 ✔ Réponse C

$f(2) = \dfrac{4}{5} = f\left(\dfrac{1}{2}\right)$: deux réels distincts ont la même image, f n'est pas injective. (Elle n'est pas surjective non plus : $|f(x)| \leq 1$ car $1 + x^2 \geq 2|x|$.)

Q8 ✔ Réponse A

$15! = 2^{11} \times 3^6 \times 5^3 \times 7^2 \times 11 \times 13$ (exposant de 2 : $7+3+1 = 11$; de 3 : $5+1 = 6$; de 5 : 3 ; de 7 : 2).
Nombre de diviseurs : $12 \times 7 \times 4 \times 3 \times 2 \times 2 = 4032$.

Q9 ✔ Réponse A

4 choix pour chacune des 20 questions : 4^{20} grilles.

Q10 ✔ Réponse D

Les trois nombres sont positifs, donc

$$\begin{aligned}\alpha^3 &\leq x(1-y)\,y(1-z)\,z(1-x)\\ &= \big(x(1-x)\big)\big(y(1-y)\big)\big(z(1-z)\big)\\ &\leq \left(\frac{1}{4}\right)^3,\end{aligned}$$

car $t(1-t) \leq \frac{1}{4}$ pour tout réel t. Donc $\alpha \leq \frac{1}{4}$ pour tout triplet.
A n'est pas toujours vraie : pour $x = y = z = \frac{1}{2}$, $\alpha = \frac{1}{4} \neq 0$. B et C ne sont pas toujours vraies (pour $x = 0$, $\alpha = 0$).

Remarque : Le corrigé de la bibliothèque (« Concours ENSA 2016 (corrigé) ») retient A (α = 0) en prenant x = 0, ce qui n'est qu'un cas particulier. La seule affirmation vraie pour tout triplet est D ($\alpha \leq 1/4$). À trancher par le professeur.

Q11 ✔ Réponse A

Formule du binôme : $\sum_{k=0}^{2016} C_{2016}^{k}(-1)^k\,1^{2016-k} = (1-1)^{2016} = 0$.

Q12 ✔ Réponse D

$(i+j)^2 = i^2 + 2ij + j^2$, avec $\sum_{i=1}^{10} i = 55$ et $\sum_{i=1}^{10} i^2 = 385$:

$$\begin{aligned}\sum_{i,j}(i+j)^2 &= 10 \times 385 + 2 \times 55^2 + 10 \times 385\\ &= 3850 + 6050 + 3850 = 13750.\end{aligned}$$

Q13 ✔ Réponse B

Une fonction dérivable en un point y est continue. Par contraposée, une fonction discontinue en un point n'y est pas dérivable : elle n'est pas dérivable (sur tout son domaine).

Q14 ✔ Réponse A

$f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$, et pour $x \neq 0$: $f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$.
$2x\sin\frac{1}{x} \to 0$ mais $\cos\frac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0 : f' n'a pas de limite en 0, elle n'est pas continue en 0.

Q15 ✔ Réponse B

$\left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)^{x+2} = e^{(x+2)\ln\left(1-\frac{4}{x+3}\right)}$ et $\ln\left(1-\frac{4}{x+3}\right) \sim -\frac{4}{x+3}$, donc l'exposant tend vers -4. La limite vaut e^{-4}.

Q16 ✔ Réponse A

Le numérateur est toujours $\geq 0 - 1 + 3 = 2$, et le dénominateur tend vers 0^+. Donc le quotient est $\geq \dfrac{2}{x + \sqrt{x}} \to +\infty$.

Q17 ✔ Réponse C

L'équation s'écrit $P(x) = (x-7)(x-5)(x+4)(x+6) - 608 = 0$, avec P unitaire de degré 4 : le produit des racines est $P(0) = 7 \times 5 \times 4 \times 6 - 608 = 840 - 608 = 232$.
(Les quatre racines sont bien réelles : avec $y = x^2 - x$, l'équation devient $(y-42)(y-20) = 608$, soit $y = 58$ ou $y = 4$.)

Q18 ✔ Réponse B

$\dfrac{1+\ln x}{x\ln x} = \dfrac{1/x}{\ln x} + \dfrac{1}{x}$, d'où l'intégrale $\Big[\ln(\ln x) + \ln x\Big]_e^{e^2} = (\ln 2 + 2) - (0 + 1) = 1 + \ln 2$.

Q19 ✔ Réponse A

Deux intégrations par parties donnent la primitive $-\dfrac{x^2\cos(\pi x)}{\pi} + \dfrac{2x\sin(\pi x)}{\pi^2} + \dfrac{2\cos(\pi x)}{\pi^3}$.
Entre 0 et 1 : $\left(\dfrac{1}{\pi} - \dfrac{2}{\pi^3}\right) - \dfrac{2}{\pi^3} = \dfrac{\pi^2 - 4}{\pi^3}$.

Q20 ✔ Réponse C

Le changement de variable $x \mapsto \frac{\pi}{2} - x$ échange sin et cos : $I = J$. Et $I + J = \displaystyle\int_0^{\pi/2} 1\,dx = \frac{\pi}{2}$.
Donc $I = J = \dfrac{\pi}{4}$.

ÉCOLES NATIONALES DES SCIENCES APPLIQUÉES · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année des ENSA · Maroc

Session de juillet 2015

2015 Énoncé

Q1 La somme

$$\frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{12} C_{12}^{k}\right) - 34 =$$

A 2012 B 2013 C 2014 D 2015

Q2 $n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}} \text{Min}(i,j) =$$

A $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
B $\dfrac{n(n+1)}{3}$
C $\dfrac{n(n+2)}{3}$
D $\dfrac{(n+1)(n+2)}{6}$

Q3 Soit le réel

$$\lambda = \sqrt[3]{3+\sqrt{9+\frac{125}{27}}} - \sqrt[3]{-3+\sqrt{9+\frac{125}{27}}}$$

En calculant λ^3, montrer que :

A $\lambda = 0$ B $\lambda = 1$
C $\lambda = 2$ D $\lambda = 3$

Q4 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\sin(n)}{3}\right)^n =$

A 1 B $\frac{1}{3}$ C $\frac{2}{3}$ D 0

Q5 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{2n+1}\dfrac{n}{n^2+k} =$

A 0 B 1 C 2 D k

Q6 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{10x}-e^{7x}}{x} =$

A 1 B 2 C 3 D 4

Q7 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+\sin^2\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)\ln x =$

A 1 B 0 C $-\infty$ D $+\infty$

Q8 $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{(10-3e^x)^2}\,dx =$

A $\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{10-3e}-\dfrac{1}{7}\right)$
B $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{10-3e}+\dfrac{1}{7}\right)$
C $\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{10-e}-\dfrac{1}{7}\right)$
D $\dfrac{1}{10-3e}$

Q9 $\displaystyle\int_1^e \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx =$

A $-\frac{5}{e}$ B $2+\frac{5}{e}$ C $\frac{5}{e}$ D $2-\frac{5}{e}$

Q10 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2+3x+2}\,dx =$

A $\ln\left(\frac{4}{3}\right)$ B $\frac{4}{3}$ C $\ln\left(\frac{5}{3}\right)$ D $\frac{5}{3}$

Problème 1 : On considère plusieurs urnes de boules $U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots$ telles que : la première urne, U_1, contient trois boules jaunes et deux boules vertes et chacune des autres urnes contient deux boules jaunes et deux boules vertes. On réalise des tirages successifs de la manière suivante :

- on tire au hasard une boule de U_1 ;
- on place la boule tirée de U_1 dans U_2, puis on tire une boule dans U_2 ;
- on place la boule tirée de U_2 dans U_3, puis on tire une boule dans U_3 ;
- … etc.

Pour tout entier $n \geq 1$, on note E_n l'événement « la boule tirée de U_n est verte » et $P_n = P(E_n)$ sa probabilité.

Q11 La valeur de P_1 est

A 0,54 B 0,40 C 0,44 D 0,64

Q12 Sachant qu'on a tiré une boule verte de U_1 et qu'on l'a placée dans U_2, la probabilité de tirer une boule verte de U_2 est

A 0,60 B 0,83 C 0,80 D 0,33

Q13 La valeur de P_2 est

A 0,44 B 0,46 C 0,48 D 0,45

Q14 La relation entre P_n et P_{n+1} est

A $P_{n+1} = 5 + 5P_n$
B $P_{n+1} = 2 + 5P_n$
C $P_{n+1} = 5 + 2P_n$
D $5P_{n+1} = 2 + P_n$

Q15 En étudiant le comportement de la suite P_n, peut-on confirmer qu'après un grand nombre de tirage on a

A une chance sur deux de tirer une boule verte
B une chance sur trois de tirer une boule verte
C une chance sur quatre de tirer une boule verte
D une chance sur cinq de tirer une boule verte

Problème 2 : Le plan complexe P est rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$; unité graphique 1 cm. Soient A, B et C les points d'affixes respectives $a = 2$, $b = 3 + i\sqrt{3}$ et $c = 2i\sqrt{3}$.

Q16 La mesure de l'angle $\widehat{ABC}$ vaut

A 90° B 95° C 85° D 180°

Q17 L'affixe ω du centre Ω du cercle circonscrit au triangle ABC est

A $1 - i\sqrt{3}$ B $1 + i\sqrt{3}$
C $-1 + i\sqrt{3}$ D $-1 - i\sqrt{3}$

Q18 On note A_n le point d'affixe z_n, où z_n est la suite de nombres complexes, de premier terme $z_0 = 0$, et telle que, pour tout entier naturel n :

$$z_{n+1} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} z_n + 2$$

On considère la suite $t_n = z_n - \omega$.
En faisant remarquer que ω est solution de l'équation $z = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2} z + 2$, la suite t_n vérifie la relation :

A $t_{n+1} = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2} t_n$
B $t_{n+1} = \dfrac{1-i\sqrt{3}}{2} t_n$
C $\left(1+i\sqrt{3}\right) t_{n+1} = 2t_n$
D $\left(1+i\sqrt{3}\right) t_n = 2t_{n+1}$

Q19 En déduire que pour tout entier naturel n, on a :

A $A_{n+6} = 2A_n$ B $A_{n+6} = -A_n$
C $A_{n+6} = A_n$ D $A_{n+6} = -2A_n$

Q20 La valeur de A_{2015} est

A $-1 + 2i\sqrt{3}$ B $3 + i\sqrt{3}$
C $3i\sqrt{2}$ D $-1 + i\sqrt{3}$

ÉCOLES NATIONALES DES SCIENCES APPLIQUÉES · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année des ENSA · Maroc

Session de juillet 2015

2015

Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14
C	A	B	D	C	C	C	A	D	A	B	A	C	D

Q15	Q16	Q17	Q18	Q19	Q20
A	A	B	A	C	D

Q1 ✔ Réponse C

$\sum_{k=0}^{12} C_{12}^k = (1+1)^{12} = 4096$, donc la somme vaut $2048 - 34 = 2014$.

Q2 ✔ Réponse A

$\mathrm{Min}(i,j) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{k\le i}\mathbf{1}_{k\le j}$, donc la somme vaut $\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)^2 = \sum_{m=1}^{n} m^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Vérification : pour $n=2$, Min vaut $1,1,1,2$, de somme $5 = \frac{2\times3\times5}{6}$.

Q3 ✔ Réponse B

Avec a et b les deux racines cubiques : $a^3 - b^3 = 6$ et $ab = \sqrt[3]{(9+\frac{125}{27})} - 9 = \sqrt[3]{\frac{125}{27}} = \frac{5}{3}$.

$\lambda^3 = (a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b) = 6 - 5\lambda$, donc $\lambda^3 + 5\lambda - 6 = (\lambda-1)(\lambda^2+\lambda+6) = 0$, et $\lambda = 1$ (le second facteur est toujours positif).

Q4 ✔ Réponse D

$\left|\left(\frac{\sin n}{3}\right)^n\right| \le \left(\frac{1}{3}\right)^n \to 0$.

Q5 ✔ Réponse C

La somme compte $2n+2$ termes, chacun compris entre $\frac{n}{n^2+2n+1}$ et $\frac{n}{n^2}$:

$$\frac{(2n+2)n}{(n+1)^2} = \frac{2n}{n+1} \le \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{n}{n^2+k} \le \frac{2n+2}{n}.$$

Les deux bornes tendent vers 2.

Q6 ✔ Réponse C

$\frac{e^{10x}-e^{7x}}{x} = 10\,\frac{e^{10x}-1}{10x} - 7\,\frac{e^{7x}-1}{7x} \to 10 - 7 = 3$.

Q7 ✔ Réponse C

Pour $0 < x < 1$: $\ln x < 0$ et $1 \le 1 + \sin^2\frac{1}{x}$, donc $\left(1+\sin^2\frac{1}{x}\right)\ln x \le \ln x \to -\infty$.

Q8 ✔ Réponse A

$10 - 3e^x$ ne s'annule pas sur $[0,1]$ (car $3e < 10$), et $\left(\frac{1}{3(10-3e^x)}\right)' = \frac{e^x}{(10-3e^x)^2}$.

L'intégrale vaut $\left[\frac{1}{3(10-3e^x)}\right]_0^1 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{10-3e} - \frac{1}{7}\right)$.

Q9 ✔ Réponse D

Par parties ($u = (\ln x)^2$, $v' = \frac{1}{x^2}$) : $\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x^2}dx = \left[-\frac{(\ln x)^2}{x}\right]_1^e + 2\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx = -\frac{1}{e} + 2\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx$.

De même, $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx = \left[-\frac{\ln x}{x}\right]_1^e + \int_1^e \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{e} + 1 - \frac{1}{e} = 1 - \frac{2}{e}$.

Total : $-\frac{1}{e} + 2 - \frac{4}{e} = 2 - \frac{5}{e}$.

Q10 ✔ Réponse A

$\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$, d'où $\left[\ln\frac{x+1}{x+2}\right]_0^1 = \ln\frac{2}{3} - \ln\frac{1}{2} = \ln\frac{4}{3}$.

Q11 ✔ Réponse B

U_1 contient 2 boules vertes sur 5 : $P_1 = \frac{2}{5} = 0{,}40$.

Q12 ✔ Réponse A

U_2 contient alors 2 jaunes et 3 vertes : $\frac{3}{5} = 0{,}60$.

Q13 ✔ Réponse C

Pour $n \ge 1$, l'urne U_{n+1} contient 2 jaunes, 2 vertes et la boule reçue de U_n (donc 5 boules). Si cette boule est verte, on tire une verte avec la probabilité $\frac{3}{5}$, sinon $\frac{2}{5}$. Formule des probabilités totales : $P_2 = 0{,}4 \times \frac{3}{5} + 0{,}6 \times \frac{2}{5} = 0{,}24 + 0{,}24 = 0{,}48$.

Q14 ✔ Réponse D

Pour $n \ge 1$, l'urne U_{n+1} contient 2 jaunes, 2 vertes et la boule reçue de U_n (donc 5 boules). Si cette boule est verte, on tire une verte avec la probabilité $\frac{3}{5}$, sinon $\frac{2}{5}$. $P_{n+1} = \frac{3}{5}P_n + \frac{2}{5}(1-P_n) = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}P_n$, soit $5P_{n+1} = 2 + P_n$.

Q15 ✔ Réponse A

Avec $5P_{n+1} = 2 + P_n$: $P_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{5}\left(P_n - \frac{1}{2}\right)$. La suite $\left(P_n - \frac{1}{2}\right)$ est géométrique de raison $\frac{1}{5}$, donc $P_n \to \frac{1}{2}$: une chance sur deux.

Q16 ✔ Réponse A

$\frac{c-b}{a-b} = \frac{-3+i\sqrt{3}}{-1-i\sqrt{3}} = \frac{(-3+i\sqrt{3})(-1+i\sqrt{3})}{4} = -i\sqrt{3}$: imaginaire pur, donc $\widehat{ABC} = 90°$.

Q17 ✔ Réponse B

Le triangle est rectangle en B : le centre du cercle circonscrit est le milieu de $[AC]$, $\omega = \frac{2+2i\sqrt{3}}{2} = 1 + i\sqrt{3}$.

Q18 ✔ Réponse A

Avec $q = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$: $\omega = q\omega + 2$ (vérification : $q\omega = -1 + i\sqrt{3}$). En soustrayant, $t_{n+1} = z_{n+1} - \omega = q(z_n - \omega) = q\,t_n$.

Q19 ✔ Réponse C

$q = e^{i\pi/3}$ donc $q^6 = 1$: $t_{n+6} = q^6 t_n = t_n$, d'où $z_{n+6} = z_n$ et $A_{n+6} = A_n$.

Q20 ✔ Réponse D

$2015 = 6 \times 335 + 5$, donc $A_{2015} = A_5$. $t_0 = -\omega$ et

$$t_5 = q^5 t_0 = -e^{-i\pi/3}(1+i\sqrt{3}) = -2,$$

donc $z_5 = t_5 + \omega = -1 + i\sqrt{3}$.

ÉCOLES NATIONALES DES SCIENCES APPLIQUÉES · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année des ENSA · Maroc

Session d'août 2014

2014 Énoncé

Exercice 1 : Soit u_n et v_n les suites réelles définies par :

$$u_0 = \alpha,\ v_0 = \beta \quad \text{avec } 0 < \alpha < \beta$$

$$\text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} : \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{u_n + v_n} \\ v_{n+1} = \dfrac{v_n^2}{u_n + v_n} \end{cases}$$

On pose : $x_n = \dfrac{u_n}{v_n}$ et $y_n = u_n - v_n$

Q1 La suite (x_n) :

A Converge vers $\dfrac{\alpha}{\beta}$ B Converge vers 1
C Converge vers 0 D Diverge

Q2 La suite (y_n) :

A Converge vers $\alpha - \beta$
B Converge vers $\alpha + \beta$
C Converge vers 0
D Diverge

Q3 La suite (u_n) :

A Converge vers α B Converge vers β
C Converge vers 0 D Diverge

Q4 La suite (v_n) :

A Converge vers $\alpha - \beta$
B Converge vers $\beta - \alpha$
C Converge vers β
D Diverge

Q5 Soit δ un élément de $]0, 1[$.

$$\lim_{n \to +\infty} \prod_{k=0}^{n} \left(1 + \delta^{2^k}\right) =$$

A 1 B $+\infty$ C $\dfrac{1}{1-\delta}$ D $\dfrac{1}{1+\delta}$

Exercice 2 : Calculer les intégrales suivantes :

Q6 $\displaystyle\int_0^{\pi} e^t \cos 2t\, dt =$

A $\dfrac{e^{\pi}}{5}$ B $\dfrac{e^{\pi}+1}{5}$
C $\dfrac{e^{\pi}-2}{5}$ D $\dfrac{e^{\pi}-1}{5}$

Q7 $\displaystyle\int_0^{\pi} e^t \cos^2 t\, dt =$

A $\dfrac{e^{\pi}-1}{5}$ B $\dfrac{4(e^{\pi}+1)}{5}$
C $\dfrac{3(e^{\pi}-1)}{5}$ D $\dfrac{e^{\pi}+2}{5}$

Exercice 3 : Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et telle que :
$\forall x \in [a, b],\ f(a + b - x) = f(x)$.

Q8 L'intégrale

$$\int_a^b t f(t)\, dt =$$

A $\dfrac{a+b}{2}\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ B $\dfrac{a-b}{2}\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$
C $\dfrac{a}{2}\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ D $\dfrac{b}{2}\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$

Q9 L'intégrale

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{3 + \cos^2 t}\, dt =$$

A $\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}$ B $\dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$ C $\dfrac{\pi}{3}$ D $\dfrac{\pi}{2\sqrt{3}}$

Q10 L'intégrale

$$\int_0^{\pi} \frac{t \sin t}{3 + \cos^2 t}\, dt =$$

A $\dfrac{\pi}{6\sqrt{3}}$ B $\dfrac{\pi^2}{6\sqrt{3}}$ C $\dfrac{\pi^3}{6\sqrt{3}}$ D $\dfrac{\pi^2}{2\sqrt{3}}$

Exercice 4 : On note

$$a = \frac{\sqrt[3]{41\sqrt{5} + 54\sqrt{3}}}{\sqrt{3}},$$

$$b = \frac{\sqrt[3]{54\sqrt{3} - 41\sqrt{5}}}{\sqrt{3}}$$

et $\lambda = a + b$.

Q11 Le produit ab vaut

A $\dfrac{1}{3}$ B $\dfrac{2}{3}$ C $\dfrac{7}{3}$ D 1

Q12 λ est solution de l'équation

A $x^3 - 7x - 36 = 0$
B $x^3 + 7x - 21 = 0$
C $x^3 - 7x = 0$
D $x^3 - 7x - 35 = 0$

Q13 La valeur de λ est alors

A nulle B un réel pair
C un réel impair D $\lambda > 4$

Exercice 5 : Un candidat se présentant à un concours, doit répondre d'une manière successive à une série de questions $(Q_n)_{n>0}$. L'épreuve est présentée en ligne et autre que Q_1, l'accès à Q_n n'est possible que si le candidat donne une réponse à Q_{n-1}. On admet que :

- la probabilité de donner une bonne réponse à Q_1 est $0{,}1$;
- pour $n > 1$: si le candidat donne une bonne réponse à Q_{n-1}, la probabilité de donner une bonne réponse à Q_n est $0{,}8$; si le candidat donne une mauvaise réponse à Q_{n-1}, la probabilité de donner une bonne réponse à Q_n est $0{,}6$.

On note pour tout entier naturel n non nul, B_n l'évènement « L'étudiant donne une bonne réponse à la question Q_n » et P_n la probabilité de B_n.

Q14 La valeur de P_2 est :

A $0{,}52$ B $0{,}59$ C $0{,}54$ D $0{,}62$

Q15 L'étudiant a répondu correctement à la deuxième question, la probabilité qu'il ait donné une mauvaise réponse à la première vaut

A $\dfrac{27}{37}$ B $\dfrac{21}{37}$ C $\dfrac{27}{31}$ D $\dfrac{21}{31}$

Q16 La probabilité que le candidat ait au moins une bonne réponse aux trois premières questions est

A $0{,}856$ B $0{,}865$ C $0{,}685$ D $0{,}585$

Exercice 6 : Le plan complexe P est rapporté au repère orthonormal direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$; unité graphique 1 cm. Soit A le point d'affixe $3i$. On appelle f l'application qui, à tout point M d'affixe z, distinct de A, associe le point M' d'affixe z' définie par

$$z' = \frac{3iz - 7}{z - 3i}$$

On dit que M est invariant si $M = M'$.

Q17 f admet deux points invariants B et C et on note z_B et z_C les affixes respectives. Montrer que la somme des parties imaginaires de z_B et z_C vaut

A -6 B 6 C 5 D -5

On admet que B et C sont tels que $|\mathrm{Im}(z_B)| > |\mathrm{Im}(z_C)|$ et on appelle $\mathcal{E}$ le cercle de diamètre $[BC]$. Soit M un point quelconque de $\mathcal{E}$ différent de B et de C et M' son image par f.

Q18 Il existe un réel Θ tel que l'affixe z de M s'écrit

A $3i - 4e^{i\Theta}$ B $-3i - 4e^{i\Theta}$
C $3i + 4e^{-i\Theta}$ D $3i + 4e^{i\Theta}$

Q19 Il existe un réel Θ tel que l'affixe z' de M' s'écrit

A $3i - 4e^{-i\Theta}$ B $-3i + 4e^{i\Theta}$
C $-3i + 4e^{-i\Theta}$ D $3i + 4e^{-i\Theta}$

Q20 Le point M'

A est à l'intérieur du cercle $\mathcal{E}$
B est à l'extérieur du cercle $\mathcal{E}$
C appartient au cercle $\mathcal{E}$
D est le centre du cercle $\mathcal{E}$

ÉCOLES NATIONALES DES SCIENCES APPLIQUÉES · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année des ENSA · Maroc

Session d'août 2014

2014

Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14
C	A	C	B	C	D	C	A	B	B	C	A	B	D

Q15	Q16	Q17	Q18	Q19	Q20
C	A	B	D	A	C

Q1 ✔ Réponse C

$y_{n+1} = \dfrac{u_n^2 - v_n^2}{u_n + v_n} = u_n - v_n = y_n : (y_n)$ est constante, égale à $\alpha - \beta$. Et $x_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{v_n^2} = x_n^2$, donc $x_n = \left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{2^n} \to 0$ car $0 < \frac{\alpha}{\beta} < 1$.

Q2 ✔ Réponse A

$y_{n+1} = \dfrac{u_n^2 - v_n^2}{u_n + v_n} = u_n - v_n = y_n : (y_n)$ est constante, égale à $\alpha - \beta$. Et $x_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{v_n^2} = x_n^2$, donc $x_n = \left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{2^n} \to 0$ car $0 < \frac{\alpha}{\beta} < 1$.

Q3 ✔ Réponse C

$y_{n+1} = \dfrac{u_n^2 - v_n^2}{u_n + v_n} = u_n - v_n = y_n : (y_n)$ est constante, égale à $\alpha - \beta$. Et $x_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{v_n^2} = x_n^2$, donc $x_n = \left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{2^n} \to 0$ car $0 < \frac{\alpha}{\beta} < 1$.
Comme $u_n = x_n v_n : y_n = v_n(x_n - 1)$, donc $v_n = \dfrac{\alpha - \beta}{x_n - 1} \to \beta - \alpha$, puis $u_n = v_n + y_n \to (\beta - \alpha) + (\alpha - \beta) = 0$.

Q4 ✔ Réponse B

$y_{n+1} = \dfrac{u_n^2 - v_n^2}{u_n + v_n} = u_n - v_n = y_n : (y_n)$ est constante, égale à $\alpha - \beta$. Et $x_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{v_n^2} = x_n^2$, donc $x_n = \left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{2^n} \to 0$ car $0 < \frac{\alpha}{\beta} < 1$.
$y_n = u_n - v_n = v_n(x_n - 1)$, donc $v_n = \dfrac{\alpha - \beta}{x_n - 1} \to \dfrac{\alpha - \beta}{-1} = \beta - \alpha$.

Q5 ✔ Réponse C

$(1-\delta)(1+\delta) = 1 - \delta^2$, puis $(1-\delta^2)(1+\delta^2) = 1 - \delta^4$, etc. Par récurrence :

$$(1-\delta)\prod_{k=0}^{n}\left(1+\delta^{2^k}\right) = 1 - \delta^{2^{n+1}} \to 1,$$

donc le produit tend vers $\dfrac{1}{1-\delta}$.

Q6 ✔ Réponse D

$e^t \cos 2t = \mathrm{Re}\left(e^{(1+2i)t}\right)$ et $\displaystyle\int_0^\pi e^{(1+2i)t}dt = \frac{e^{(1+2i)\pi} - 1}{1+2i} = \frac{e^\pi - 1}{1+2i}$ (car $e^{2i\pi} = 1$).
$\dfrac{1}{1+2i} = \dfrac{1-2i}{5}$, de partie réelle $\dfrac{1}{5}$: l'intégrale vaut $\dfrac{e^\pi - 1}{5}$.

Q7 ✔ Réponse C

$\cos^2 t = \dfrac{1 + \cos 2t}{2}$, donc l'intégrale vaut $\dfrac{1}{2}(e^\pi - 1) + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{e^\pi - 1}{5} = \dfrac{3(e^\pi - 1)}{5}$ (avec Q6).

Q8 ✔ Réponse A

Notons $I = \int_a^b t f(t)\,dt$. Avec $t \mapsto a + b - t$:
$I = \displaystyle\int_a^b (a+b-t)f(a+b-t)\,dt = \int_a^b (a+b-t)f(t)\,dt.$
En additionnant : $2I = (a+b)\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt.$

Q9 ✔ Réponse B

Avec $u = \cos t$:
$\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{du}{3+u^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\arctan\frac{u}{\sqrt{3}}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$

Q10 ✔ Réponse B

$f(t) = \dfrac{\sin t}{3 + \cos^2 t}$ vérifie $f(\pi - t) = f(t)$ sur $[0, \pi]$. D'après Q8 puis Q9 :

$$\int_0^\pi t f(t)\,dt = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(t)\,dt = \frac{\pi}{2}\times\frac{\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{\pi^2}{6\sqrt{3}}.$$

Q11 ✔ Réponse C

$$ab = \frac{\sqrt[3]{(54\sqrt{3})^2 - (41\sqrt{5})^2}}{3} = \frac{\sqrt[3]{8748 - 8405}}{3} = \frac{\sqrt[3]{343}}{3} = \frac{7}{3}.$$

Q12 ✔ Réponse A

$\lambda^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$, avec $a^3 + b^3 = \dfrac{(41\sqrt{5} + 54\sqrt{3}) + (54\sqrt{3} - 41\sqrt{5})}{3\sqrt{3}} = \dfrac{108\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = 36$ et $3ab = 7$.
Donc $\lambda^3 = 36 + 7\lambda$, soit $\lambda^3 - 7\lambda - 36 = 0$.

Q13 ✔ Réponse B

$4^3 - 7\times 4 - 36 = 64 - 28 - 36 = 0$, et $x^3 - 7x - 36 = (x-4)(x^2 + 4x + 9)$ où $x^2 + 4x + 9 > 0$. Donc $\lambda = 4$: un réel pair (et $\lambda > 4$ est faux).

Q14 ✔ Réponse D

$P_2 = 0{,}8 \times P_1 + 0{,}6 \times (1 - P_1) = 0{,}8\times 0{,}1 + 0{,}6\times 0{,}9 = 0{,}08 + 0{,}54 = 0{,}62.$

Q15 ✔ Réponse C

$P_{B_2}\left(\overline{B_1}\right) = \dfrac{P\left(\overline{B_1}\cap B_2\right)}{P(B_2)} = \dfrac{0{,}9\times 0{,}6}{0{,}62} = \dfrac{0{,}54}{0{,}62} = \dfrac{27}{31}.$

Q16 ✔ Réponse A

Événement contraire : trois mauvaises réponses, de probabilité $0{,}9\times 0{,}4\times 0{,}4 = 0{,}144$ (après une mauvaise réponse, la suivante est mauvaise avec la probabilité 0,4).
$P = 1 - 0{,}144 = 0{,}856.$

Q17 ✔ Réponse B

z est invariant si $z(z - 3i) = 3iz - 7$, soit $z^2 - 6iz + 7 = 0$. Discriminant : $-36 - 28 = -64 = (8i)^2$, d'où $z = \dfrac{6i \pm 8i}{2}$: $z_B = 7i$ et $z_C = -i$. Le cercle $\mathcal{E}$ a pour centre le milieu $3i$ (c'est le point A) et pour rayon 4.
$\mathrm{Im}(z_B) + \mathrm{Im}(z_C) = 7 - 1 = 6$ (c'est aussi la partie imaginaire de la somme des racines, $6i$).

Q18 ✔ Réponse **D**

z est invariant si $z(z-3i) = 3iz - 7$, soit $z^2 - 6iz + 7 = 0$. Discriminant : $-36 - 28 = -64 = (8i)^2$, d'où $z = \dfrac{6i \pm 8i}{2}$: $z_B = 7i$ et $z_C = -i$. Le cercle $\mathcal{E}$ a pour centre le milieu $3i$ (c'est le point A) et pour rayon 4.
Un point M de $\mathcal{E}$ vérifie $|z - 3i| = 4$, donc $z = 3i + 4e^{i\Theta}$ pour un réel Θ.
(Les écritures A et C décrivent aussi ce cercle, en remplaçant Θ par $\Theta + \pi$ ou $-\Theta$; la forme attendue, directement lue sur le centre et le rayon, est D.)

Remarque : A (3i − 4e^{iΘ}) et C (3i + 4e^{−iΘ}) décrivent aussi le cercle $\mathcal{E}$ pour un autre choix de Θ : plusieurs propositions sont vraies au sens strict. D est la forme attendue. À trancher par le professeur.

Q19 ✔ Réponse **A**

z est invariant si $z(z-3i) = 3iz - 7$, soit $z^2 - 6iz + 7 = 0$. Discriminant : $-36 - 28 = -64 = (8i)^2$, d'où $z = \dfrac{6i \pm 8i}{2}$: $z_B = 7i$ et $z_C = -i$. Le cercle $\mathcal{E}$ a pour centre le milieu $3i$ (c'est le point A) et pour rayon 4.
Avec $z = 3i + 4e^{i\Theta}$: $z - 3i = 4e^{i\Theta}$ et $3iz - 7 = 3i(3i + 4e^{i\Theta}) - 7 = -16 + 12ie^{i\Theta}$. Donc

$$z' = \frac{-16 + 12ie^{i\Theta}}{4e^{i\Theta}} = 3i - 4e^{-i\Theta}.$$

Remarque : Pour le même Θ que celui de M (Q18), z′ = 3i − 4e^{−iΘ} (A). Mais « il existe un réel Θ » rend D (3i + 4e^{−iΘ}) vraie aussi, avec Θ remplacé par Θ + π. À trancher par le professeur.

Q20 ✔ Réponse **C**

D'après Q19, $|z' - 3i| = \left|-4e^{-i\Theta}\right| = 4$: M' appartient au cercle $\mathcal{E}$ de centre $3i$ et de rayon 4.

ÉCOLES NATIONALES DES SCIENCES APPLIQUÉES · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année des ENSA · Maroc

Session de juillet 2013

2013

Énoncé

Q1 Le comité du concours ENSA sait par expérience que la probabilité de réussir le concours est de $0{,}95$ pour l'étudiant(e) ayant mention "Très bien" au BAC, de $0{,}5$ pour celui ou celle qui a mention "Bien" au BAC et de $0{,}2$ pour les autres. Il estime, de plus, que parmi les candidats au concours ENSA 2013, 35% ont mention "Très bien" et 50% ont mention "Bien". Si l'on considère un(e) candidat(e) 2013 au hasard, ayant réussi le concours ENSA, la probabilité pour qu'il (ou elle) n'ait ni mention "Très Bien" ni mention "Bien" est :

A $0{,}0144$ B $0{,}0489$ C $0{,}1444$ D $0{,}0498$

Q2 Dans le conseil de l'établissement d'une ENSA, il y'a 5 mathématiciens et 6 physiciens. On doit former un comité concours, issu du conseil, composé de 3 mathématiciens et de 3 physiciens. Le règlement impose que les 2 physiciens les plus âgés doivent absolument faire partie du comité. Le nombre de comités différents à former est :

A 80 B 60 C 40 D 20

Q3 Le reste de la division euclidienne de $1234^{4321} + 4321^{1234}$ par 7 est égal à :

A 1 B 2 C 3 D 4

Q4 Le nombre $2^{100} - 1$

A est divisible par 31 et non par 3
B est divisible par 3 et non par 31
C est divisible par 3 et par 31
D n'est divisible ni par 3 ni par 31

Q5 La valeur de la somme

$$S = \sum_{k=1}^{35} k^2$$

est :

A 14512 B 14510 C 14910 D 14215

Q6 La valeur de la somme

$$\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k(k+1)}$$

est :

A $\frac{12}{11}$ B $\frac{11}{10}$ C $\frac{11}{12}$ D $\frac{10}{11}$

Q7 On note par $E(x)$ la partie entière du réel x

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} E(7k)$$

A 7 B $\frac{7}{2}$ C $\frac{7}{3}$ D $\frac{7}{4}$

Q8 $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2+(-1)^n} =$

A 1 B $\sqrt{2}$ C $\sqrt{3}$ D $+\infty$

Q9 Si z_1 et z_2 sont les deux solutions de l'équation complexe

$$z^2 = 5 - 12i$$

Alors la quantité $Re(z_1)Im(z_2)$ vaut

A 6 B 3 C -6 D 0

Q10 La partie imaginaire du nombre complexe

$$z = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$$

est :

A $\sqrt{3}^{20}$ B $-512\sqrt{3}$ C $-20\sqrt{3}$ D $+512\sqrt{3}$

Q11 $\lim_{x\to0^+} \frac{\sqrt{x+x^2}-\sqrt{x}}{\sqrt{3x}\ln(1+x)} =$

A $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ B $\frac{1}{3\sqrt{3}}$ C $+\infty$ D 0

Q12 $\lim_{x\to0} \frac{\ln(\cos(2x))}{\ln(\cos(3x))} =$

A $\frac{3}{2}$ B $\frac{2}{3}$ C $\frac{4}{9}$ D $\frac{9}{4}$

Q13 $\lim_{x\to0} \frac{\ln(x)+x^2}{\ln(x+x^2)} =$

A 1 B 0 C $-\infty$ D $+\infty$

Q14 $\int_0^3 \frac{dx}{3+2^x} =$

A $-\frac{\ln(11)}{\ln(8)}$ B $\frac{5}{3}$ C $\frac{1}{5} - \frac{\ln(11)}{\ln(8)}$ D $\frac{5}{3} - \frac{\ln(11)}{\ln(8)}$

Q15 $\int_0^1 \ln\left(1+x^2\right) dx =$

A $\ln(2)$ B $\ln(2)-2$ C $\frac{\pi}{2}$ D $\ln(2)-2+\frac{\pi}{2}$

Q16 $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\, dx =$

A $\frac{\pi}{8}$ B π C 0 D $\frac{\pi}{16}$

Q17 Le plan $\mathcal{E}_2$ est rapporté à un repère orthonormal $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. Soient les points $A(4,5)$, $B(5,2)$ et $C(2,1)$. La distance du point C à la droite (AB) est égale à :

A $\sqrt{5}$ B $\sqrt{10}$ C $2\sqrt{10}$ D $10\sqrt{2}$

Q18 Soit ABC un triangle équilatéral du plan $\mathcal{E}_2$ rapporté à un repère orthonormal $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ de coté $4\sqrt{3}$ cm. Si M est un point intérieur quelconque du triangle ABC alors la valeur de la somme des distances de M aux cotés de ABC est

A $7\frac{\sqrt{3}}{2}$ B $6\sqrt{3}$ C 6 D $\sqrt{3}$

Q19 Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et H_1 et H_2 deux sous espaces vectoriels de E distincts.
Si $\dim E = 4$ et $\dim H_1 = \dim H_2 = 3$, alors

$$\dim(H_1 \cap H_2) =$$

$\dim X$ désigne la dimension de l'espace vectoriel X qui représente le nombre des vecteurs de l'une de ses bases

A 0 B 1 C 2 D 3

Q20 On considère la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice B^{13} vaut

A $\begin{pmatrix} 1 & 13 & 91 \\ 0 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ B $\begin{pmatrix} 1 & 13 & 92 \\ 0 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

C $\begin{pmatrix} 1 & 13 & 93 \\ 0 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ D $\begin{pmatrix} 1 & 13 & 94 \\ 0 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ÉCOLES NATIONALES DES SCIENCES APPLIQUÉES · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année des ENSA · Maroc

Session de juillet 2013

2013

Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14
B	C	D	C	C	D	B	A	A	B	A	C	A	D

Q15	Q16	Q17	Q18	Q19	Q20
D	D	B	C	C	A

Q1 ✔ Réponse B

Les « autres » représentent 15 % des candidats. Probabilité de réussir :

$$\begin{aligned}P(R) &= 0{,}35\times 0{,}95 + 0{,}5\times 0{,}5 + 0{,}15\times 0{,}2\\ &= 0{,}3325 + 0{,}25 + 0{,}03\\ &= 0{,}6125.\end{aligned}$$

$P_R(\text{autres}) = \dfrac{0{,}03}{0{,}6125} \approx 0{,}04898$, soit $0{,}0489$ (en tronquant à quatre décimales). La proposition $0{,}0498$ est trop grande.

Q2 ✔ Réponse C

Mathématiciens : $\binom{5}{3} = 10$ choix.
Physiciens : les 2 plus âgés sont imposés, il reste à en choisir 1 parmi les 4 autres : 4 choix.
$10 \times 4 = 40$ comités.

Q3 ✔ Réponse D

$1234 = 7\times 176 + 2$ et $4321 = 7\times 617 + 2$: les deux sont congrus à 2 modulo 7. Or $2^3 = 8 \equiv 1\ [7]$.
$4321 = 3\times 1440 + 1$ donc $2^{4321} \equiv 2$;
$1234 = 3\times 411 + 1$ donc $2^{1234} \equiv 2$. La somme est congrue à 4 : le reste est 4.

Q4 ✔ Réponse C

$2^2 = 4 \equiv 1\ [3]$, donc
$2^{100} = (2^2)^{50} \equiv 1\ [3]$: 3 divise $2^{100} - 1$.
$2^5 = 32 \equiv 1\ [31]$, donc
$2^{100} = (2^5)^{20} \equiv 1\ [31]$: 31 divise aussi $2^{100} - 1$.

Q5 ✔ Réponse C

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, donc
$S = \dfrac{35\times 36\times 71}{6} = 35\times 6\times 71 = 14910$.

Q6 ✔ Réponse D

$\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$: la somme télescope et vaut $1 - \dfrac{1}{11} = \dfrac{10}{11}$.

Q7 ✔ Réponse B

$7k$ est un entier, donc $E(7k) = 7k$ et
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} E(7k) = \frac{7n(n+1)}{2}$.
$\dfrac{1}{n^2}\times\dfrac{7n(n+1)}{2} \to \dfrac{7}{2}$.

Q8 ✔ Réponse A

Pour n pair, le terme vaut $3^{1/n} \to 1$; pour n impair, il vaut $1^{1/n} = 1$. La limite est 1.

Q9 ✔ Réponse A

$(3-2i)^2 = 9 - 12i - 4 = 5 - 12i$: les solutions sont $3-2i$ et $-3+2i$.
$\mathrm{Re}(z_1)\,\mathrm{Im}(z_2) = 3\times 2 = 6$, et l'on trouve aussi $(-3)\times(-2) = 6$ en échangeant z_1 et z_2.

Q10 ✔ Réponse B

$1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\pi/3}$ et $1 - i = \sqrt{2}\,e^{-i\pi/4}$, donc $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i} = \sqrt{2}\,e^{7i\pi/12}$.
$z = 2^{10}e^{140i\pi/12} = 1024\,e^{35i\pi/3} = 1024\,e^{-i\pi/3}$ (car $\frac{35\pi}{3} = 12\pi - \frac{\pi}{3}$).
$\mathrm{Im}(z) = 1024\times\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -512\sqrt{3}$.

Q11 ✔ Réponse A

$\sqrt{x+x^2} - \sqrt{x} = \sqrt{x}\left(\sqrt{1+x} - 1\right) = \dfrac{x\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}+1}$. Le quotient vaut

$$\frac{x\sqrt{x}}{(\sqrt{1+x}+1)\sqrt{3}\sqrt{x}\ln(1+x)} = \frac{1}{\sqrt{3}(\sqrt{1+x}+1)}\cdot\frac{x}{\ln(1+x)} \to \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

Q12 ✔ Réponse C

Quand $u \to 0$: $\cos u - 1 \sim -\dfrac{u^2}{2}$ et
$\ln(1+h) \sim h$, donc $\ln(\cos u) \sim -\dfrac{u^2}{2}$.
Le quotient est équivalent à $\dfrac{-(2x)^2/2}{-(3x)^2/2} = \dfrac{4}{9}$.

Q13 ✔ Réponse A

La limite se prend pour $x \to 0^+$.
$\ln(x+x^2) = \ln x + \ln(1+x)$, donc

$$\frac{\ln x + x^2}{\ln x + \ln(1+x)} = \frac{1 + \frac{x^2}{\ln x}}{1 + \frac{\ln(1+x)}{\ln x}} \to \frac{1+0}{1+0} = 1.$$

Q14 ✔ Réponse D

$\dfrac{1}{3+2^x} = \dfrac{1}{3}\left(1 - \dfrac{2^x}{3+2^x}\right)$ et une primitive de $\dfrac{2^x}{3+2^x}$ est $\dfrac{\ln(3+2^x)}{\ln 2}$.
L'intégrale vaut

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\left[x - \frac{\ln(3+2^x)}{\ln 2}\right]_0^3 &= \frac{1}{3}\left(3 - \frac{\ln 11 - \ln 4}{\ln 2}\right)\\ &= 1 + \frac{2}{3} - \frac{\ln 11}{3\ln 2} = \frac{5}{3} - \frac{\ln 11}{\ln 8}.\end{aligned}$$

Q15 ✔ Réponse D

Par parties :
$\left[x\ln(1+x^2)\right]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 \frac{2x^2}{1+x^2}dx = \ln 2 - 2\int_0^1\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx = \ln 2 - 2 + 2\times\frac{\pi}{4}$.

Q16 ✔ Réponse D

Avec $x = \sin t$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$:
$\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^2 t\cos^2 t\,dt =$
$\dfrac{1}{4}\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^2(2t)\,dt = \frac{1}{4}\times\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{16}$.

Q17 ✔ Réponse B

$\overrightarrow{AB}(1,-3)$ dirige (AB), donc
$(AB) : 3(x-4) + (y-5) = 0$, soit $3x + y - 17 = 0$.
$d(C,(AB)) = \dfrac{|6+1-17|}{\sqrt{10}} = \dfrac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$.

Q18 ✔ Réponse C

En découpant ABC en trois triangles de sommet M :
$\text{Aire}(ABC) = \frac{1}{2}a(d_1+d_2+d_3)$, où a est le côté. Donc $d_1+d_2+d_3$ est la hauteur du triangle équilatéral :

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}\times 4\sqrt{3} = 6 \text{ cm}.$$

Q19 ✔ Réponse C

$H_1 \neq H_2$ et tous deux de dimension 3 : $H_1 + H_2$ contient strictement H_1, donc $\dim(H_1+H_2) = 4$.
Formule de Grassmann :
$\dim(H_1 \cap H_2) = 3 + 3 - 4 = 2$.

Q20 ✔ Réponse **A**

$B = I + N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = 0$. Comme I et N commutent :

$$\begin{aligned} B^{13} &= I + 13N + \binom{13}{2} N^2 \\ &= I + 13N + 78N^2. \end{aligned}$$

Le coefficient en haut à droite vaut $13 + 78 = 91$.

ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES DE TANGER · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année · ENSA Tanger

Édition 2012

2012

Énoncé

Q1 Soit L une liste finie d'entiers relatifs **consécutifs** dont le premier terme est -15.
$L = \{-15, -14, \dots\}$. Si la somme de tous les éléments de L est égale à 51 alors **le nombre total des termes** de liste L est égale

A 34 B 50 C 18

Q2 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n 3^{n+1}}{\pi^n} =$

A 3 B 0 C $\dfrac{3}{\pi}$

Q3 Soit $Z_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{e^{k-1}}{\pi^{k+1}}$; alors
$\lim\limits_{n\to\infty} Z_n =$

A $+\infty$ B $\dfrac{1}{\pi(\pi-e)}$ C $\dfrac{1}{\pi-e}$

Q4 Une entreprise de fabrication de mixeurs a adopté pour l'année 2012 la stratégie de production suivante : la production connaitre une diminution mensuelle de 10% ; mais grâce à une commande destinée à l'export, l'entreprise produira chaque mois 150 mixeurs de plus.
On note à présent par t_n la production de l'usine relative au moins $N^\circ\, n$.
L'expression reliant t_{n+1} et t_n est donnée par

A $t_{n+1} = 0{,}1\, t_n - 150$
B $t_{n+1} = 0{,}9\, t_n + 150$
C $t_{n+1} = 0{,}1\, t_n$

Q5 suite de la question 4).
A Long terme la production mensuelle des mixeurs est estimée à $P =$

A $P = 10$ mixeurs
B $P = 90$ mixeurs
C $P = 1500$ mixeurs

Q6 Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite nulmérique à termes strictement positifs $(u_n > 0)$ vérifiant
$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{2}$, Alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = L$ avec

A $L = \dfrac{1}{2}$ B $L = 0$ C $0 < L < \dfrac{1}{2}$

Q7 Soit $T_n = \sum\limits_{p=1}^{n} 2^{\frac{1}{2p-1}} - 2^{\frac{1}{2p+1}}$; alors
$\lim\limits_{n\to\infty} T_n =$

A 1 B 0 C $+\infty$

Q8 On considère la courbe représentative de la fonction $f(x) = e^{-x^2}$. On désigne par $R(x)$, $x > 0$ le rectangle symétrique inscrit à l'intérieur de la courbe et dont l'un des côtés est le segment d'extrémités $(-x, 0)$ et $(x, 0)$. La surface maximale de ce rectangle est égale à

A $\sqrt{2e}$ B $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ C $\sqrt{\dfrac{2}{e}}$

Q9 $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin \pi x}{1 - \cos\sqrt{\pi x}} =$

A 0 B 2 C $\sqrt{\pi}$

Q10 $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{h} \displaystyle\int_e^{e+h} \dfrac{1}{(\ln x)^2}\, dx =$

A 1 B e C 0

Q11 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \dfrac{1+\sin x}{1+\cos x}\, dx =$

A $\dfrac{\sqrt{\pi}}{\pi}$ B 0 C $\ln \pi$

Q12 $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \dfrac{dx}{4x^2+4x+5}$

A $\dfrac{\pi}{16}$ B $\dfrac{\pi\sqrt{3}}{18}$ C $\dfrac{\sqrt{\pi}}{6}$

Q13 La surface formée par la courbe de $f(x) = (\ln x)^2$ et par les droites $x = 1$ et $x = e$ est égale

A e B $3e - 2$ C $e - 2$

Q14 Soit $(V_n)_{n\geq 3}$ la suite définie par $V_n = \displaystyle\int_e^n \dfrac{1}{x\sqrt{(\ln x)^3}}\, dx$. Alors $\lim\limits_{n\to\infty} V_n =$

A $\dfrac{1}{2}$ B $+\infty$ C $\dfrac{2}{\sqrt{e}}$

Q15 Soit $g(x) = \displaystyle\int_1^{\tan x} \dfrac{1}{\arctan u}\, du$, alors la tangente à la courbe de g en $x = \dfrac{\pi}{4}$ admet pour équation

A $y = \dfrac{8}{\pi}x - 2$
B $y = \dfrac{\pi}{4}(x-1)$
C $y = \dfrac{\pi}{2}x - 1$

Q16 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{dx}{\cos^2 x + 4\sin^2 x} =$

A $\dfrac{\ln 2}{2}$ B $\dfrac{1}{2}\arctan 2$ C $\dfrac{1}{2}$

Q17 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n!)^2}{(2n)!} =$

A 0 B $\dfrac{1}{2}$ C $+\infty$

Q18 Soit $B = \{u, v, w\}$ une base de $(\mathbb{R}^3, +, .)$. On considère les familles suivantes
- $E = \{u+v, v+w, u+w\}$
- $N = \{u, v, u+w\}$
- $S = \{-u, v+w, v-u+w\}$
- $A = \{u-v-w, u+v+w, u\}$

Alors laquelle (ou lesquelles) des familles forme une base ?

A Toutes les 4
B Seulement E
C Seulement E et N

Q19 Soit
$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + 2y = 0\}$.
Lequel des systèmes suivants forme une base pour E ?

A $\{(-2, 1, 0); (0, 1, 0); (0, 0, 1)\}$
B $\{(-2, 1, 0); (0, 0, 1)\}$
C $\{(-2, 1, 0)\}$

Q20 On considère les ensembles suivants
- $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + yz = 0\}$
- $N = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / xyz = 0\}$
- $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = 2\}$
- $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y = z\}$

Lesquels parmi ces ensembles sont des sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?

A Seulement A
B Seulement A et N
C Tous E, N, S et A

Q21 Soit A une matrice carrée d'ordre n vérifiant $A^2 = 2I_n - A$ (I_n est la matrice identité)
On considère les égalités suivantes
- (I) $\det A = 0$
- (II) $A^{-1} = \dfrac{1}{2}(A + I_n)$
- (III) $\det A \neq 0$
- (IV) $A^{-1} = 2I_n + A$
- (V) $\det(A + I_n) = \dfrac{2}{\det A}$

Alors

A Seulement (I) et (IV) sont vraies
B Seulement (II), (III) et (V) sont vraies
C Seulement (III), (IV) et (V) sont vraies

Q22 $\sqrt{12345^2 - 12343 \times 12347} =$

A 4 B 2 C 42

Q23 $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{2}\right)\left(\sqrt[4]{2}\right)\left(\sqrt[8]{2}\right)\dots\left(\sqrt[2^n]{2}\right) =$

A 1 B 2 C $\sqrt{2}$

Q24 Si $\displaystyle\int_0^x h(t)\, dt = x\arctan x$ alors $h(1) =$

A $\dfrac{1}{2}$ B $\dfrac{\pi}{4}$ C $\dfrac{\pi+2}{4}$

Q25 $\displaystyle\int \dfrac{dx}{\tan^3 x}$ (K une constante)

A $-\left[\dfrac{1}{2\sin^2 x} + \ln|\sin x|\right] + K$
B $-\dfrac{1}{2\tan^2 x} + K$
C $\dfrac{1}{2\arctan^2 x} + K$

ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES DE TANGER · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année · ENSA Tanger

Édition 2012

2012

Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14
A	B	B	B	C	B	A	C	B	A	B	A	C	–

Q15	Q16	Q17	Q18	Q19	Q20	Q21	Q22	Q23	Q24	Q25
A	B	A	C	B	A	B	B	B	C	A

Q1 ✔ Réponse A

Avec n termes $-15, -14, \dots, n-16$ (suite arithmétique de raison 1) :

$$S = \frac{n\,(-15 + (n-16))}{2} = \frac{n(n-31)}{2}.$$

$S = 51 \iff n^2 - 31n - 102 = 0$.
Discriminant : $961 + 408 = 1369 = 37^2$, donc $n = \dfrac{31+37}{2} = 34$ (l'autre racine est négative).
Vérification : la liste va de -15 à 18 ; les termes de -15 à 15 s'annulent et il reste $16 + 17 + 18 = 51$.

Q2 ✔ Réponse B

$\dfrac{(-1)^n 3^{n+1}}{\pi^n} = 3\left(-\dfrac{3}{\pi}\right)^n$ et $\left|-\dfrac{3}{\pi}\right| < 1$ car $3 < \pi$. La suite géométrique tend vers 0.

Q3 ✔ Réponse B

$Z_n = \dfrac{1}{\pi^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{e}{\pi}\right)^{k-1}$: somme géométrique de raison $\dfrac{e}{\pi} \in]0,1[$. Donc

$$\lim_{n\to\infty} Z_n = \frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{e}{\pi}} = \frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{\pi}{\pi-e} = \frac{1}{\pi(\pi-e)}.$$

Q4 ✔ Réponse B

Une diminution de 10 % multiplie la production par $1 - 0{,}1 = 0{,}9$, puis on ajoute les 150 mixeurs de la commande : $t_{n+1} = 0{,}9\,t_n + 150$.

Q5 ✔ Réponse C

La suite arithmético-géométrique converge (coefficient 0,9 de valeur absolue < 1) vers le point fixe P :

$$\begin{aligned} P &= 0{,}9\,P + 150 \\ &\iff 0{,}1\,P = 150 \\ &\iff P = 1500. \end{aligned}$$

En effet
$t_n - 1500 = 0{,}9^n\,(t_0 - 1500) \to 0$.

Q6 ✔ Réponse B

Comme le rapport tend vers $\frac{1}{2} < \frac{3}{4}$, il existe un rang N tel que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \le \dfrac{3}{4}$ pour $n \ge N$. Alors $0 < u_n \le \left(\frac{3}{4}\right)^{n-N} u_N$ pour $n \ge N$, et le majorant tend vers 0. Donc $L = 0$.

Q7 ✔ Réponse A

Avec $a_p = 2^{\frac{1}{2p-1}}$, on a $2^{\frac{1}{2p+1}} = a_{p+1}$: la somme télescope.

$$\begin{aligned} T_n &= a_1 - a_{n+1} \\ &= 2^1 - 2^{\frac{1}{2n+1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 2 - 2^0 = 1. \end{aligned}$$

Q8 ✔ Réponse C

Le rectangle a pour base $2x$ et pour hauteur $f(x) = e^{-x^2}$: $S(x) = 2x\,e^{-x^2}$.
$S'(x) = 2e^{-x^2}(1 - 2x^2)$ s'annule en $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (S croît avant, décroît après). Le maximum vaut

$$S\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2}{\sqrt{2}}\,e^{-1/2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{e}} = \sqrt{\frac{2}{e}}.$$

Q9 ✔ Réponse B

Quand $x \to 0^+$: $\sin \pi x \sim \pi x$ et, avec $u = \sqrt{\pi x} \to 0$, $1 - \cos u \sim \dfrac{u^2}{2} = \dfrac{\pi x}{2}$. Le quotient tend vers $\dfrac{\pi x}{\pi x/2} = 2$.

Q10 ✔ Réponse A

Si F est une primitive de $f(x) = \dfrac{1}{(\ln x)^2}$ (continue près de e), la quantité vaut $\dfrac{F(e+h) - F(e)}{h} \to F'(e) = f(e) = \dfrac{1}{(\ln e)^2} = 1$.

Q11 ✔ Réponse B

Le changement de variable $x = \frac{\pi}{2} - t$ échange sin et cos :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\frac{1+\cos t}{1+\sin t}\,dt = -I.$$

Donc $I = 0$.

Q12 ✔ Réponse A

$4x^2 + 4x + 5 = (2x+1)^2 + 4$. Une primitive est $\dfrac{1}{4}\arctan\dfrac{2x+1}{2}$ (dériver pour vérifier). Donc

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{4x^2+4x+5} &= \frac{1}{4}\,(\arctan 1 - \arctan 0) \\ &= \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{16}. \end{aligned}$$

Q13 ✔ Réponse C

$f \ge 0$, donc l'aire est $\displaystyle\int_1^e (\ln x)^2\,dx$. Deux intégrations par parties donnent la primitive $x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x$. D'où

$$\begin{aligned} \int_1^e (\ln x)^2\,dx &= (e - 2e + 2e) - (0 - 0 + 2) \\ &= e - 2. \end{aligned}$$

Q14 ✔ Réponse –

Avec $u = \ln x$: $V_n = \displaystyle\int_1^{\ln n} u^{-3/2}\,du = \left[-\frac{2}{\sqrt{u}}\right]_1^{\ln n} = 2 - \frac{2}{\sqrt{\ln n}} \to 2$. Aucune proposition n'est juste (erreur du sujet).

Q15 ✔ Réponse A

$g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \displaystyle\int_1^1 \cdots = 0$. Pour x proche de $\frac{\pi}{4}$:

$$g'(x) = \frac{1+\tan^2 x}{\arctan(\tan x)} = \frac{1+\tan^2 x}{x},$$

$$g'\left(\tfrac{\pi}{4}\right) = \frac{2}{\pi/4} = \frac{8}{\pi}.$$

Tangente : $y = \dfrac{8}{\pi}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{8}{\pi}x - 2$.

Q16 ✔ Réponse B

On divise par $\cos^2 x$: l'intégrande devient $\dfrac{1+\tan^2 x}{1+4\tan^2 x}$. Avec $t = \tan x$, $dt = (1+\tan^2 x)\,dx$:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dt}{1+4t^2} &= \left[\frac{1}{2}\arctan(2t)\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}\arctan 2. \end{aligned}$$

Q17 ✔ Réponse **A**

Avec $u_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{n+1}{2(2n+1)} \leq \frac{1}{2} \text{ pour } n \geq 1.$$

Donc $0 < u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u_1$ et $u_n \to 0$.

Q18 ✔ Réponse **C**

Trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ forment une base si et seulement s'ils sont libres. Dans la base B :

- E : $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$: base.
- N : $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$: base.
- S : $v - u + w = (-u) + (v + w)$: famille liée.
- A : $(u - v - w) + (u + v + w) = 2u$: famille liée.

Seules E et N sont des bases.

Q19 ✔ Réponse **B**

L'ensemble défini dans l'énoncé (noté S, puis E dans la question) est le plan d'équation $x + 2y = 0$: $(x, y, z) = (-2y, y, z) = y(-2, 1, 0) + z(0, 0, 1)$. La famille $\{(-2, 1, 0); (0, 0, 1)\}$ est génératrice et libre : c'est une base (dimension 2). A contient $(0, 1, 0)$, qui n'est pas dans le plan ; C n'engendre qu'une droite.

Q20 ✔ Réponse **A**

- A est défini par une équation linéaire : c'est un sous-espace vectoriel (un plan).
- S ne contient pas $(0, 0, 0)$.
- N : $(1, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$ sont dans N, mais leur somme $(1, 1, 1)$ ne l'est pas.
- E : $(-1, 1, 1) \in E$ mais $2 \cdot (-1, 1, 1) = (-2, 2, 2)$ donne $-2 + 4 = 2 \neq 0$.

Seul A est un sous-espace vectoriel.

Q21 ✔ Réponse **B**

$A^2 + A = 2I_n$ s'écrit $A \cdot \dfrac{1}{2}(A + I_n) = I_n$: A est inversible, $A^{-1} = \dfrac{1}{2}(A + I_n)$. Donc (II) et (III) sont vraies, (I) est fausse, et (IV) est fausse (l'inverse est unique). Pour (V) : $A + I_n = 2A^{-1}$, donc $\det(A + I_n) = 2^n \det(A^{-1}) = \dfrac{2^n}{\det A}$. Cela vaut $\dfrac{2}{\det A}$ seulement si $n = 1$; la proposition B suppose donc $n = 1$ (ou un oubli du facteur 2^n).

Remarque : (V) n'est vraie que pour n = 1 : en général $\det(A + I_n) = 2^n/\det A$ (par exemple $A = I_n$ vérifie $A^2 = 2I_n - A$ et $\det(2I_n) = 2^n$). Pour $n \geq 2$ aucune proposition n'est exacte ; B est la réponse visée par le sujet. À trancher par le professeur.

Q22 ✔ Réponse **B**

Avec $a = 12345$:
$12343 \times 12347 = (a - 2)(a + 2) = a^2 - 4$.
Donc $\sqrt{a^2 - (a^2 - 4)} = \sqrt{4} = 2$.

Q23 ✔ Réponse **B**

Le produit vaut $2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}} = 2^{1 - \frac{1}{2^n}}$, qui tend vers $2^1 = 2$.

Q24 ✔ Réponse **C**

En dérivant (h continue) : $h(x) = \arctan x + \dfrac{x}{1 + x^2}$. Donc $h(1) = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi + 2}{4}$.

Q25 ✔ Réponse **A**

$$\frac{1}{\tan^3 x} = \frac{\cos^3 x}{\sin^3 x} = \frac{\cos x\,(1 - \sin^2 x)}{\sin^3 x} = \frac{\cos x}{\sin^3 x} - \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Une primitive est donc $-\dfrac{1}{2\sin^2 x} - \ln|\sin x|$, c'est-à-dire A. (B est la primitive de $\dfrac{1 + \tan^2 x}{\tan^3 x}$, pas de $\dfrac{1}{\tan^3 x}$.)

ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES DE TANGER · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'entrée en 1re année du cycle préparatoire · ENSA Tanger

Tanger, le 08/08/2011

2011 Énoncé

Q1 Soient z_1, z_2 deux nombres complexes. On suppose que : $|z_1| = |z_2| = 1$ et $|2 + z_1 z_2| = 1$. Alors $z_1.z_2 =$

A 0 B -1 C $+1$

Q2 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n =$

A $\begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ B $\begin{pmatrix} 1 & 2^n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ C $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Q3 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$; alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $A^n =$

A $\begin{pmatrix} 2^{n+1}-1 & 2^n-1 \\ 2-2^{n+1} & 2-2^n \end{pmatrix}$

B $\begin{pmatrix} 2^n-1 & 2^n-1 \\ 2-2^{n+1} & 2-2^n \end{pmatrix}$

C $\begin{pmatrix} 2^{n+1}-1 & 2^n-1 \\ 1-2^{n+1} & 2-2^n \end{pmatrix}$

Q4 Soient a et b deux nombres complexes tels que $a \neq b$, et $|a| = 1$. Alors, on a

A $\left|\dfrac{a-b}{1-\overline{a}b}\right| = 1$

B $\left|\dfrac{a-b}{1-\overline{a}b}\right| = |ab|$

C $\left|\dfrac{a-b}{1-\overline{a}b}\right| = \left|\overline{ab}\right|$

Q5 Si $|a| = |b| = |c| = 1$, alors : $|ab + bc + ca| =$

A $|abc|$ B $|a+b+c|$ C $\left|\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}\right|$

Q6 La somme de la série $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$ est :

A $+\infty$
B e
C $\mathrm{Log}\, e$ (e : nombre d'Euler)

Q7 $\displaystyle\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{2\cos x - \sqrt{2}} =$

A $-\sqrt{2}$ B $+\sqrt{2}$ C 1

Q8 $\displaystyle\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{cotan} x}{x - \frac{\pi}{2}}$

A -1 B $+1$ C 0

Q9

A $\displaystyle\lim_{x \to 3} \frac{x^4 - 81}{x - 3} = 108$

B $\displaystyle\lim_{x \to 3} \frac{x^4 - 81}{x - 3} = 0$

C $\displaystyle\lim_{x \to 3} \frac{x^4 - 81}{x - 3} = 1$

Q10

A $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \left(x^2 \ln x\right) = 1$

B $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \left(x^2 \ln x\right) = -\infty$

C $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \left(x^2 \ln x\right) = 0$

Q11

A $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$

B $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 1$

C $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 2$

Q12

A $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1$

B $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

C $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = +\infty$

Q13

A $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$

B $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$

C $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 + \tan a \tan b}$

Q14

A $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$

B $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$

C $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 - \tan a \tan b}$

Q15 La dérivée première de $\arctan 3x^2$ est :

A $\dfrac{6x}{1+9x^4}$ B $\dfrac{6x}{1+x^4}$ C $\dfrac{6x}{1-9x^4}$

Q16 Pour calculer la dérivée première de la fonction $y = (x^2+2)^2 (1-x^3)^4$, on utilise la dérivation logarithmique et on obtient :

A $y' = 6x(x^2+2)^2(1-x^3)^3(1-4x-3x^3)$

B $y' = 6x(x^2+2)^2(1-x^3)^3(1-4x-3x^2)$

C $y' = x(x^2+2)^2(1-x^3)^3(1-4x-3x^3)$

Q17 Soit $f(x) = \dfrac{2}{1-x}$. Alors $f^{(n)}(x) =$

A $2(n!)(1-x)^{-n}$
B $2(n!)(1-x)^{-(n+1)}$
C $(n!)(1-x)^{-(n+1)}$

Q18 Trouver y' à partir de l'équation $xy + x - 2y - 1 = 0$:

A $y' = \dfrac{1+y}{1-x}$

B $y' = \dfrac{1+y}{2-x}$

C $y' = \dfrac{1+y}{2+x}$

Q19 Évaluation de l'intégrale $I = \displaystyle\int \sin^2 x\, dx$:

A $I = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}\sin 2x + C$, C constante.

B $I = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}\sin 2x + C$, C constante.

C $I = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{4}\sin 2x + C$, C constante.

Q20 Évaluation de l'intégrale $I = \displaystyle\int \frac{dx}{x^2-4}$:

A $I = \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-2}{x+2}\right| + C$, C constante.

B $I = \dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{x+2}{x-2}\right| + C$, C constante.

C $I = \dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{x-2}{x+2}\right| + C$, C constante.

Q21

A $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

B $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n-1)}{2}$

C $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

Q22

A $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

B $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{3}$

C $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+2)}{6}$

Q23

A $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(2n+1)}{2}\right)^2$

B $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^3$

C $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

Q24 L'aire $\mathcal{A}$ de la région délimitée par la courbe $y = x^2$, la droite $y = \dfrac{-x}{2}$ et la droite $x = 3$ est :

A $\mathcal{A} = \dfrac{45}{4}$ B $\mathcal{A} = \dfrac{45}{2}$ C $\mathcal{A} = 45$

Q25 Le nombre d'Euler e correspond à :

A $e = 2{,}71628$
B $e = 2{,}717828$
C $e = 2{,}71828$

ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES DE TANGER · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'entrée en 1re année du cycle préparatoire · ENSA Tanger

Tanger, le 08/08/2011

2011

Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14
B	A	A	A	BC	–	A	A	A	C	A	B	A	A

Q15	Q16	Q17	Q18	Q19	Q20	Q21	Q22	Q23	Q24	Q25
A	–	B	B	A	C	C	A	C	A	C

Q1 ✔ Réponse B

$w = z_1 z_2$ vérifie $|w| = 1$ et $|w + 2| = 1$: w est sur le cercle unité et sur le cercle de centre -2 et de rayon 1, dont le seul point commun est -1.

Q2 ✔ Réponse A

$A = I + N$ avec $N^2 = 0$: $A^n = I + nN = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Q3 ✔ Réponse A

Pour $n = 1$, A donne $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ (B et C non). On vérifie par récurrence que la formule A est stable par multiplication par A (valeurs propres 1 et 2).

Q4 ✔ Réponse A

$|a| = 1$ donne $\overline{a}a = 1$ et $1 - \overline{a}b = \overline{a}(a - b)$, donc le quotient a pour module $\dfrac{1}{|\overline{a}|} = 1$.

Q5 ✔ Réponse BC

$|ab + bc + ca| = |abc| \left|\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right| = |\overline{a} + \overline{b} + \overline{c}|$ car $\dfrac{1}{a} = \overline{a}$.

Comme un nombre et son conjugué ont même module, c'est aussi $|a + b + c|$: B et C sont justes.

Q6 ✔ Réponse –

$\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e$, donc la somme à partir de $k = 1$ vaut $e - 1$. Aucune proposition n'est juste (erreur du sujet).

Q7 ✔ Réponse A

Taux d'accroissement : $\tan'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$ et $(2\cos)'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$. La limite vaut $\dfrac{2}{-\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$.

Q8 ✔ Réponse A

Avec $h = x - \frac{\pi}{2}$: $\operatorname{cotan} x = -\tan h \sim -h$. La limite vaut -1.

Q9 ✔ Réponse A

C'est la dérivée de x^4 en 3 : $4 \times 27 = 108$.

Q10 ✔ Réponse C

Croissances comparées : $x^2 \ln x \to 0$.

Q11 ✔ Réponse A

e^x l'emporte sur x^2 : la limite est 0.

Q12 ✔ Réponse B

$n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \to 1$: la limite est e.

Q13 ✔ Réponse A

Formule d'addition : $\tan(a + b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$.

Q14 ✔ Réponse A

On remplace b par $-b$: $\tan(a - b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$.

Q15 ✔ Réponse A

$(\arctan u)' = \dfrac{u'}{1 + u^2}$ avec $u = 3x^2$: $\dfrac{6x}{1 + 9x^4}$.

Q16 ✔ Réponse –

$\dfrac{y'}{y} = \dfrac{4x}{x^2 + 2} - \dfrac{12x^2}{1 - x^3}$, d'où

$$y' = 4x(x^2 + 2)(1 - x^3)^3 \left(1 - 6x - 4x^3\right).$$

Aucune proposition n'est juste (erreur du sujet).

Q17 ✔ Réponse B

$f(x) = 2(1 - x)^{-1}$, $f'(x) = 2(1 - x)^{-2}$, $f''(x) = 2 \cdot 2(1 - x)^{-3}$… Par récurrence $f^{(n)}(x) = 2\,n!\,(1 - x)^{-(n+1)}$.

Q18 ✔ Réponse B

En dérivant : $y + xy' + 1 - 2y' = 0$, d'où $y'(2 - x) = 1 + y$ et $y' = \dfrac{1 + y}{2 - x}$.

Q19 ✔ Réponse A

$\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$: $I = \dfrac{x}{2} - \dfrac{\sin 2x}{4} + C$.

Q20 ✔ Réponse C

$\dfrac{1}{x^2 - 4} = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{x - 2} - \dfrac{1}{x + 2}\right)$: $I = \dfrac{1}{4} \ln\left|\dfrac{x - 2}{x + 2}\right| + C$.

Q21 ✔ Réponse C

$1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n + 1)}{2}$.

Q22 ✔ Réponse A

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$ (vérifier avec $n = 1$: 1).

Q23 ✔ Réponse C

$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ (vérifier avec $n = 2 : 9$).

Q24 ✔ Réponse A

La courbe et la droite se coupent en 0 ; sur $[0, 3]$, $x^2 \geq -\frac{x}{2}$:

$$\mathcal{A} = \int_0^3 \left(x^2 + \frac{x}{2}\right) dx = 9 + \frac{9}{4} = \frac{45}{4}.$$

Q25 ✔ Réponse C

$e \approx 2{,}71828$.

ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES DE TANGER · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'entrée en 1re année du cycle préparatoire · ENSA Tanger

Tanger, le 23/07/2010

2010 — Énoncé

Q1 Soit $S(m)$ la fonction qui associe à chaque réel m strictement positif, la surface délimitée par le graphe $y = \frac{1}{x}$ et les droites $x = m$ et $x = 2m$ alors

A $S(m)$ est strictement croissante
B $S(m)$ est strictement décroissante
C $S(m)$ est une fonction constante

Q2 $\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \ln\left(1 + \frac{h}{\pi}\right) =$

A $\frac{1}{\pi}$ B 0 C n'existe pas

Q3 $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{3}\right)\left(\sqrt[6]{3}\right)\left(\sqrt[12]{3}\right)\ldots\left(\sqrt[3\cdot 2^n]{3}\right) =$

A $\sqrt[3]{6}$ B 1 C $\sqrt[3]{9}$

Q4 Soit $f(x) = x^{\ln x}$. La tangente à la courbe de f au point $x = e$ est donnée par

A $y = e(x - e)$ B $y = x$ C $y = 2x - e$

Q5 Soit $(x_n)_n$ une suite numérique telle que $x_0 = 1$. Alors : $\sum_{i=1}^{n}\left(x_{i-1} + \frac{1}{2}\right) =$

A $\frac{3n}{2}$ B $\frac{n^2+5n}{4}$ C $\frac{2n-1}{4}$

Q6 Soit $(u_n)_n$ une suite numérique à termes strictement positifs vérifiant $(u_n)^{\frac{1}{n}} \leq M$; $\forall n \in \mathbb{N}$ tel que $M < 1$. On définit la suite $(w_n)_n$ par $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. On considère les assertions suivantes :
(I) $(w_n)_n$ est convergente
(II) $(u_n)_n$ est bornée
(III) $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$
Laquelle (lesquelles) des assertions est (sont) VRAIE(S) ?

A Seulement II
B Seulement II et III
C I, II et III.

Q7 Pour quelle valeur de x, la fonction définie par $f(x) = \int_{-2}^{x^2-3x} e^{t^2}\,dt$ prend une valeur minimale

A $\frac{3}{2}$ B -2 C 2

Q8 Soit $f(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t^3+2}}\,dt$. Laquelle parmi ces trois assertions est FAUSSE ?

A $f(0) = 0$
B $f'(1) = \frac{1}{2\sqrt{3}}$
C $f(1) > 0$

Q9 $\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{\tan x} =$

A N'existe pas B 2 C 0

Q10 $\lim_{x\to 1} \frac{1}{x^2-1} \int_1^x e^{u^2}\,du =$

A 0 B $\frac{e}{2}$ C N'existe pas

Q11 Soit f une fonction deux fois dérivable telle que $f''(x) = 2f'(x)$ avec $f'(0) = f(0) = e$. Alors $f(1) =$

A $\frac{e}{2}(e^2+1)$ B $2e$ C $\frac{e^3}{2}$

Q12 $\int_1^2 (\ln x)^2\,dx$

A $\frac{(\ln 2)^3}{3}$ B $2(1-\ln 2)^2$ C $\frac{8}{3}$

Q13 Soient f, g et h trois fonctions telles que : $\begin{cases} h(x) = f(x^3) \\ f'(x) = g(x) \\ g'(x) = f(x^2) \end{cases}$ Alors $h''(x) =$

A $3x^2 g(x^3)$
B $6xg(x^3) + 9x^4 f(x^6)$
C $3x^2 g(x^3) + 6x^3 f(x^5)$

Q14 Soit $(v_n)_{n\geq 3}$ la suite définie par $v_n = \int_1^n \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx$. Alors $\lim_{n\to\infty} v_n =$

A $\frac{1}{4}$ B $\frac{1}{2}$ C $+\infty$

Q15 Soit $H(x) = \int_{\sqrt{x}}^{e^x} \frac{1}{\sqrt{\ln t}}\,dt$, alors $H'(x) =$

A $\frac{1}{\sqrt{\ln x}}$
B $\frac{e^x}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{2x\ln x}}$
C $\frac{e^x}{\sqrt{\ln x}} - \sqrt{\frac{x}{\ln x}}$

Q16 Soit $h(x) = \sqrt{e^x - 1}$. Une primitive de $h(x)$ est donnée par

A $2(x - \arctan x)$
B $\sin\sqrt{h(x)}$
C $2h(x) - 2\arctan h(x)$

Q17 La fonction $f(x) = a\cos x + b\sin x$ admet comme amplitude le nombre

A $\sqrt{a^2+b^2}$ B $a+b$ C $\frac{a+b}{2}$

Q18 Soit $B = \{u, v, w\}$ une base de $(\mathbb{R}^3, +, .)$. On considère les familles suivantes
$A = \{u - v, u + w, v + w\}$;
$B = \{u, v - 2u, v\}$;
$C = \{u + v + w, v + w, w\}$ et
$D = \{v + w, -v, -w\}$.
Alors laquelle (ou lesquelles) des familles forme une base ?

A Seulement B
B Seulement A et C
C Seulement A et D

Q19 Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - 3z = 0\}$. Lequel des systèmes suivants forme une base pour F ?

A $\{(3, 0, 1)\}$
B $\{(3, 0, 1); (0, 1, 0)\}$
C $\{(3, 0, 1); (1, 0, 3); (0, 1, 3)\}$

Q20 On considère les ensembles suivants
$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = 0\}$;
$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 - 2y + z = 1\}$;
$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / xz - y = 0\}$ et
$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + z = 0\}$. Lesquels parmi ces ensembles sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?

A Seulement A et C
B Seulement A et D
C Seulement A, C et D

Q21 Soit $w = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - z = 0 \text{ et } 2x - y = 0\}$

A $\dim w = 1$
B $\dim w = 2$
C $\dim w = 3$

Q22 Soit A une matrice carrée d'ordre n vérifiant $A^3 - A = -I_n$. Soit $B = (I_n - A)(I_n + A)$. On considère les égalités suivantes
(I) $B^{-1} = A$
(II) $B^{-1} = (I_n - A)^{-1}(I_n + A)^{-1}$
(III) $B^{-1} = (I_n + A)^{-1}(I_n - A)^{-1}$
Parmi lesquelles ou laquelle de ces égalités est VRAIE ?

A (I) et (III)
B Seulement (II)
C Seulement (III)

Q23 Soient A, B deux matrices carrées d'ordre n, telles que $I_n - AB$ est inversible. Alors $(I_n - BA)^{-1} =$

A $(I_n - AB)^{-1}$
B $B(I_n - AB)^{-1}A$
C $I_n + B(I_n - AB)^{-1}A$

Q24 Soit g une fonction décroissante sur $]0, +\infty[$ et $G(x) = \int_0^x tg'(t)\,dt$ définie sur $]0, +\infty[$. Laquelle parmi ces trois assertions est FAUSSE ?

A $G(x) \leq 0$ pour tout $x > 0$
B G est croissante sur $]0, +\infty[$
C $G(x) = xg(x) - \int_0^x g(t)\,dt$

Q25 $\int \frac{1}{\cos x}\,dx =$ (K une constante)

A $\ln(|\cos x|) + K$
B $\ln\left(\left|\tan x + \frac{1}{\cos x}\right|\right) + K$
C $\ln\left|\frac{1}{\sin x}\right| + K$

ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES DE TANGER · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'entrée en 1re année du cycle préparatoire · ENSA Tanger

Tanger, le 23/07/2010

2010 — Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14
C	A	C	C	–	C	A	B	B	B	A	B	B	A

Q15	Q16	Q17	Q18	Q19	Q20	Q21	Q22	Q23	Q24	Q25
B	C	A	–	B	B	A	–	C	B	B

Q1 ✔ Réponse C

$S(m) = \int_m^{2m} \frac{dx}{x} = \ln(2m) - \ln m = \ln 2$: constante.

Q2 ✔ Réponse A

$\ln\left(1+\frac{h}{\pi}\right) \sim \frac{h}{\pi}$: la limite vaut $\frac{1}{\pi}$.

Q3 ✔ Réponse C

Le produit vaut $3^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\cdots}$ et la somme géométrique tend vers $\frac{1/3}{1-1/2} = \frac{2}{3}$: limite $3^{2/3} = \sqrt[3]{9}$.

Q4 ✔ Réponse C

$f(x) = e^{(\ln x)^2}$, $f(e) = e$ et $f'(x) = \frac{2\ln x}{x} f(x)$, $f'(e) = 2$.
Tangente : $y = 2(x-e)+e = 2x-e$.

Q5 ✔ Réponse –

La somme dépend des termes $x_1, \ldots, x_{n-1}$, que l'énoncé ne donne pas : elle ne peut pas être calculée (erreur du sujet). B correspond au cas où (x_n) est arithmétique de raison $\frac{1}{2}$ ($x_n = 1 + \frac{n}{2}$).

Q6 ✔ Réponse C

$0 < u_n \leq M^n$ avec $0 \leq M < 1$: (u_n) est bornée et tend vers 0, et (w_n) est croissante majorée par $\frac{1}{1-M}$, donc convergente.

Q7 ✔ Réponse A

$f'(x) = (2x-3)e^{(x^2-3x)^2}$ change de signe de $-$ à $+$ en $x = \frac{3}{2}$: minimum.

Q8 ✔ Réponse B

$f'(1) = \frac{1}{\sqrt{1+2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \neq \frac{1}{2\sqrt{3}}$. ($f(0) = 0$ et $f(1) > 0$ sont vraies.)

Q9 ✔ Réponse B

$e^{2x} - 1 \sim 2x$ et $\tan x \sim x$: la limite vaut 2.

Q10 ✔ Réponse B

$\int_1^x e^{u^2} du \sim e(x-1)$ et $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$: la limite vaut $\frac{e}{2}$.

Q11 ✔ Réponse A

$f' = ee^{2x}$, donc $f = \frac{e}{2}e^{2x} + c$ et $f(0) = e$ donne $c = \frac{e}{2}$.
$f(1) = \frac{e}{2}\left(e^2+1\right)$.

Q12 ✔ Réponse B

Une primitive est $x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x$:

$$\int_1^2 (\ln x)^2 dx = 2(\ln 2)^2 - 4\ln 2 + 2 = 2(1-\ln 2)^2.$$

Q13 ✔ Réponse B

$h'(x) = 3x^2 g\left(x^3\right)$, puis $h''(x) = 6xg\left(x^3\right) + 3x^2 \cdot 3x^2 f\left(x^6\right)$.

Q14 ✔ Réponse A

$v_n = \left[-\frac{1}{2(1+x^2)}\right]_1^n = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(1+n^2)} \to \frac{1}{4}$.

Q15 ✔ Réponse B

$H'(x) = \frac{e^x}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\ln x}} = \frac{e^x}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{2x\ln x}}$.

Q16 ✔ Réponse C

$(2h - 2\arctan h)' = 2h'\left(1 - \frac{1}{1+h^2}\right) = \frac{2h'h^2}{e^x}$ avec $h' = \frac{e^x}{2h}$: on obtient h.

Q17 ✔ Réponse A

$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\varphi)$: amplitude $\sqrt{a^2+b^2}$.

Q18 ✔ Réponse –

A : $(u+w)-(v+w) = u-v$, famille liée. B et D sont liées. Seule C (triangulaire) est une base. Aucune proposition n'est juste (erreur du sujet).

Q19 ✔ Réponse B

F : $x = 3z$, de dimension 2 ; $(3,0,1)$ et $(0,1,0)$ sont dans F et libres.

Q20 ✔ Réponse B

A et D sont définis par des équations linéaires homogènes. B ne contient pas 0 et C ($y = xz$) n'est pas stable par somme.

Q21 ✔ Réponse A

Deux équations indépendantes dans $\mathbb{R}^3$: $\dim w = 1$ (droite dirigée par $(1,2,3)$).

Q22 ✔ Réponse –

$B = I_n - A^2$ et $A(I_n - A^2) = -I_n$, d'où $B^{-1} = -A$: (I) est fausse. $I_n - A$ et $I_n + A$ commutent, donc (II) et (III) sont vraies toutes les deux. Aucune proposition n'est exacte.

Q23 ✔ Réponse C

$(I_n - BA)\left(I_n + B(I_n - AB)^{-1}A\right) =$
$I_n - BA + B(I_n - AB)(I_n - AB)^{-1}A = I_n.$

Q24 ✔ Réponse B

$g' \leq 0$ donne $G'(x) = xg'(x) \leq 0$: G est décroissante, B est fausse. A ($tg' \leq 0$) et C (intégration par parties) sont vraies.

Q25 ✔ Réponse B

$$\left(\ln\left|\tan x + \frac{1}{\cos x}\right|\right)' = \frac{\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\sin x}{\cos^2 x}}{\frac{\sin x + 1}{\cos x}} = \frac{1}{\cos x}.$$

ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES DE TANGER · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'entrée en 1re année du cycle préparatoire · ENSA Tanger

Session du 24 juillet 2009

2009 — Énoncé

Q1 Soit L une liste d'entiers relatifs **consécutifs** dont le premier terme est -22 et le dernier terme est noté par x. $L = \{-22, \ldots, x\}$. Si la somme de tous les éléments de L est égale à 72 alors $x =$

A -72 B 25 C 22

Q2 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n e^n}{\pi^{n+1}} =$

A $\dfrac{1}{\pi}$ B 0 C n'existe pas

Q3 Soit $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{2^k}{e^{k+1}}$; alors $\lim\limits_{n\to\infty} x_n =$

A $+\infty$ B $\dfrac{1}{e-2}$ C $\dfrac{2}{e(e-2)}$

Q4 On considère un carré C_0 dont les côtés mesurent a cm. Soit C_1 le carré inscrit dans C_0 dont les sommets sont les milieux des côtés de C_0. Nous procédons de la même manière et nous formons une famille infinie de carrés (C_i) tel que C_{i+1} est le carré inscrit dans C_i dont les sommets sont les milieux des côtés de C_i. **La somme totale des périmètres des carrés C_i est égale à**

A $4a\left(2+\sqrt{2}\right)$ B $4a\left(1+\sqrt{2}\right)$ C $4a$

Q5 Soit $w_n = \sum\limits_{p=2}^{n} \dfrac{1}{p^2-1}$; alors $\lim\limits_{n\to\infty} w_n =$

A $\dfrac{3}{2}$ B $\dfrac{3}{4}$ C $+\infty$

Q6 Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite numérique à termes strictement positifs ($u_n > 0$) vérifiant $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq k$, $\forall n \in \mathbb{N}$ avec k une constante strictement inférieure à 1 ($k < 1$). On définit la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ par $v_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$. On considère les assertions suivantes :
(I) $(u_n)_n$ est bornée
(II) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$
(III) $(v_n)_{n\geq 0}$ est convergente
Laquelle (lesquelles) des assertions est (sont) vraie(s) ?

A Seulement I
B Seulement I et II
C I, II et III

Q7 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{(9+\tan^2 x)\cos^2 x}\,dx$

A $\dfrac{\pi}{9}$ B $\dfrac{\pi}{18}$ C $\dfrac{1}{3}\arctan\dfrac{1}{3}$

Q8 $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\arctan \pi x}{x} =$

A π B 1 C 0

Q9 $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin^2 3x}{3x^2} =$

A 1 B $\dfrac{1}{3}$ C 3

Q10 $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{h} \displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}+h} \frac{1}{\tan x}\,dx =$

A $\dfrac{\pi\sqrt{2}}{2}$ B $\sqrt{2}$ C 0

Q11 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{\pi}x}{1-\cos \pi x} =$

A $\sqrt{\pi}$ B $\dfrac{\sqrt{\pi}}{\pi}$ C 0

Q12 $\displaystyle\int_{-2}^{0} \frac{dx}{x^2+6x+12}$

A $\dfrac{\pi}{6}$ B $\dfrac{\pi\sqrt{3}}{18}$ C $\dfrac{1}{6}$

Q13 La surface formée par la courbe de $f(x) = \dfrac{1}{x(1+\ln x)}$ et par les droites $x = 1$ et $x = e^2$ est égale à

A $\ln 3$ B $\ln\left(e^2+1\right) - \ln 2$ C $e^2 - 1$

Q14 Soit $(u_n)_{n\geq 3}$ la suite définie par $u_n = \displaystyle\int_e^n \frac{1}{x(\ln x)^3}\,dx$. Alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n =$

A $+\infty$ B $\dfrac{1}{2}$ C $\dfrac{1}{2e^2}$

Q15 Soit $g(x) = \displaystyle\int_{\sqrt{x}}^{x^2} e^{u^2}\,du$, alors la tangente à la courbe de g en $x = 1$ admet pour équation

A $y = \dfrac{3e}{2}(x-1)$
B $y = ex - (e+1)$
C Les données sont insuffisantes pour la déterminer

Q16 $\displaystyle\int \frac{\tan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = (K \text{ une constante})$

A $\ln\left(\dfrac{1}{\cos^2 x}\right) + K$
B $-\ln\left(\cos\sqrt{x}\right) + K$
C $\ln\left(\dfrac{1}{\cos^2\sqrt{x}}\right) + K$

Q17 $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n}{3n-1}\right)^{2n-1} =$

A 0 B $\dfrac{1}{3}$ C $+\infty$

Q18 Soit $B = \{i, j, k\}$ une base de $(\mathbb{R}^3, +, .)$. On considère les familles suivantes
$E = \{i+j, i+k, j+k\}$;
$N = \{i, j+k, i+j+k\}$;
$S = \{i, 2j, 3k\}$ et $A = \{i, 2j-k, j\}$.
Alors laquelle (ou lesquelles) des familles forme une base ?

A Aucune
B Seulement S
C Seulement E, S et A

Q19 Soit $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + 2y - z = 0\}$. Lequel des systèmes suivants forme une base pour S ?

A $\{(1,0,1); (0,1,2)\}$
B $\{(0,1,2); (1,0,2); (1,2,0)\}$
C $\{(0,1,2)\}$

Q20 On considère les ensembles suivants
$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / y = 0\}$;
$N = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 1\}$;
$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = 2\}$ et
$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\}$. Lesquels parmi ces ensembles sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?

A Seulement E et A
B Seulement N et S
C Tous (E, N, S et A)

Q21 Soit A une matrice carrée d'ordre n vérifiant $A^2 = A + 3I_n$ (I_n est la matrice identité). On considère les égalités suivantes
(I) $\det A = 0$ (II) $A^{-1} = 3I_n - A$
(III) $\det A \neq 0$ (IV) $A^{-1} = \dfrac{1}{3}(A - I_n)$
Alors

A (II) et (III) sont vraies
B (III) et (IV) sont vraies
C (I) et (IV) sont vraies

Q22 Soit A une matrice carrée d'ordre n vérifiant $A^2 - A - I_n = 0_n$ (I_n est la matrice identité et 0_n est la matrice nulle). Alors $\det(A - I_n) =$

A $\det(A) - 1$ B $\sqrt{\det(A)}$ C $\dfrac{1}{\det(A)}$

Q23 Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice carrée d'ordre n. On appelle la trace de A notée par $\mathrm{Tr}(A)$ le nombre $\mathrm{Tr}(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}$.
Alors $\mathrm{Tr}(A + I_n) =$

A $\mathrm{Tr}(A) + n$ B $n\,\mathrm{Tr}(A)$ C $\mathrm{Tr}(A) + 1$

Q24 Si $\displaystyle\int_0^x h(t)\,dt = x\ln\left(1+x^2\right)$ alors $h(1) =$

A $\ln 2$
B $1 + \ln 2$
C Les données sont insuffisantes

Q25 $\displaystyle\int \sin(\ln x)\,dx = (K \text{ une constante})$

A $\dfrac{e^x}{2}[\sin x - \cos x] + K$
B $\dfrac{x}{2}[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] + K$
C $\dfrac{\cos(\ln x)}{x} + K$

ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES DE TANGER · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'entrée en 1re année du cycle préparatoire · ENSA Tanger

Session du 24 juillet 2009

2009 — Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14
B	B	C	A	B	C	B	A	C	–	–	B	A	B

Q15	Q16	Q17	Q18	Q19	Q20	Q21	Q22	Q23	Q24	Q25
A	C	A	C	A	A	B	C	A	B	B

Q1 ✔ Réponse B

Les termes de -22 à 22 ont une somme nulle ; il reste $23+24+25=72$: $x=25$.

Q2 ✔ Réponse B

$\left|\dfrac{(-1)^n e^n}{\pi^{n+1}}\right| = \dfrac{1}{\pi}\left(\dfrac{e}{\pi}\right)^n \to 0$ car $e<\pi$.

Q3 ✔ Réponse C

$$x_n = \frac{1}{e}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{e}\right)^k \to \frac{1}{e}\cdot\frac{2/e}{1-2/e} = \frac{2}{e(e-2)}.$$

Q4 ✔ Réponse A

Le côté est multiplié par $\frac{1}{\sqrt{2}}$ à chaque étape :

$$\sum_{i\geq 0} 4a\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^i = \frac{4a\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = 4a\left(2+\sqrt{2}\right).$$

Q5 ✔ Réponse B

$\dfrac{1}{p^2-1} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p-1}-\dfrac{1}{p+1}\right)$: somme télescopique de limite $\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{4}$.

Q6 ✔ Réponse C

$0<u_n\leq u_0 k^n$: (u_n) est bornée et tend vers 0, et (v_n) est croissante majorée par $\dfrac{u_0}{1-k}$, donc convergente.

Q7 ✔ Réponse B

Avec $t=\tan x$: $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dt}{9+t^2} = \frac{1}{3}\arctan\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{18}$.

Q8 ✔ Réponse A

$\arctan \pi x \sim \pi x$: la limite vaut π.

Q9 ✔ Réponse C

$\sin^2 3x \sim 9x^2$: la limite vaut $\dfrac{9}{3}=3$.

Q10 ✔ Réponse –

C'est la valeur de l'intégrande en $\frac{\pi}{4}$: $\dfrac{1}{\tan\frac{\pi}{4}}=1$. Aucune proposition n'est juste (erreur du sujet).

Q11 ✔ Réponse –

Le numérateur est d'ordre x et le dénominateur $\sim \dfrac{\pi^2 x^2}{2}$: le quotient tend vers $\pm\infty$ (pas de limite finie). Aucune proposition n'est juste (erreur du sujet).

Q12 ✔ Réponse B

$x^2+6x+12=(x+3)^2+3$:

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\arctan\frac{x+3}{\sqrt{3}}\right]_{-2}^{0} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi\sqrt{3}}{18}.$$

Q13 ✔ Réponse A

$$\int_1^{e^2}\frac{dx}{x(1+\ln x)} = \left[\ln(1+\ln x)\right]_1^{e^2} = \ln 3.$$

Q14 ✔ Réponse B

$$u_n = \left[-\frac{1}{2(\ln x)^2}\right]_e^n = \frac{1}{2}-\frac{1}{2(\ln n)^2}\to\frac{1}{2}.$$

Q15 ✔ Réponse A

$g(1)=0$ et $g'(x)=2xe^{x^4}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}e^x$, $g'(1)=2e-\dfrac{e}{2}=\dfrac{3e}{2}$.

Q16 ✔ Réponse C

Avec $u=\sqrt{x}$: $\displaystyle\int 2\tan u\,du = -2\ln(\cos u) = \ln\frac{1}{\cos^2\sqrt{x}}$.

Q17 ✔ Réponse A

$\dfrac{n}{3n-1}\to\dfrac{1}{3}<1$ et l'exposant tend vers $+\infty$: la limite est 0.

Q18 ✔ Réponse C

E : déterminant $-2\neq 0$; S : diagonale ; A : déterminant $1\neq 0$. N est liée ($i+j+k=i+(j+k)$).

Q19 ✔ Réponse A

S est un plan (dimension 2) ; $(1,0,1)$ et $(0,1,2)$ vérifient $x+2y-z=0$ et sont libres. (L'énoncé écrit E pour S.)

Q20 ✔ Réponse A

E et A sont définis par des équations linéaires homogènes ; N et S ne contiennent pas 0.

Q21 ✔ Réponse B

$A(A-I_n)=3I_n$: A est inversible et $A^{-1}=\dfrac{1}{3}(A-I_n)$.

Q22 ✔ Réponse C

$A(A - I_n) = I_n$, donc $\det A \det(A - I_n) = 1$.

Q23 ✔ Réponse A

On ajoute 1 à chacun des n termes diagonaux : $\mathrm{Tr}(A) + n$.

Q24 ✔ Réponse B

$h(x) = \ln(1 + x^2) + \dfrac{2x^2}{1 + x^2}$, donc $h(1) = \ln 2 + 1$.

Q25 ✔ Réponse B

$\left(\dfrac{x}{2}(\sin \ln x - \cos \ln x)\right)' =$
$\dfrac{1}{2}(\sin \ln x - \cos \ln x) + \dfrac{1}{2}(\cos \ln x + \sin \ln x) = \sin \ln x.$

ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES DE KHOURIBGA · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'entrée en 1re année · ENSA Khouribga

Année 2011–2012

2011 Énoncé

Q1 Pour tout vecteur $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ on pose

$$< x, y >= \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \quad \text{et} \quad \|x\| = \sqrt{< x, x >} = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

et on a

- A $| < x, y > | \geq \|x\| \, \|y\|$
- B $(1 + \|x\|) \leq \sqrt{2}\sqrt{1 + \|x\|^2}$
- C $< x, y >= \|x\| \, \|y\|$
- D $(1 + \|x\|) \leq \dfrac{1}{\sqrt{2}} (1 + \|x\|^2)$

Q2 L'ensemble S des solutions de l'équation en « x »

- A $6x^3 + 5x^2 - 2x - 1 = 0$ est $S = \left\{\dfrac{-1}{3}, \dfrac{1}{2}, 1\right\}$
- B $6\cos^3 x + 5\cos^2 x - 2\cos x - 1 = 0$ est $S = \left\{0, \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{3}\right\}$
- C $6\ln^3 x + 5\ln^2 x - 2\ln x - 1 = 0$ est $S = \left\{\dfrac{1}{\sqrt[3]{e}}, \dfrac{1}{e}, \sqrt{e}\right\}$
- D $6e^{3x} + 5e^{2x} - 2e^x - 1 = 0$ est $S = \{-\ln 3, -\ln 2, 0\}$

Q3 On considère la suite récurrente de nombres réels $(u_n)_n$ donnée par $\begin{cases} u_0 = a \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = qu_n + r \end{cases}$ avec $q \neq 1$ et $r \neq 0$. Alors la suite $(v_n)_n$ définie par $v_n = u_n - \dfrac{r}{1-q}$ est

- A Géométrique de raison (rq)
- B Géométrique de raison q
- C Arithmétique de raison r
- D Arithmétique de raison $(r - q)$

Q4 On a $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{x^3} =$

A $\dfrac{-1}{2}$ B $\dfrac{1}{2}$ C -1 D 1

Q5 La solution générale de l'équation différentielle homogène du second ordre

- A $y'' + 6y' + 9y = 0$ est $y = (ax + b)e^{-3x}$
- B $y'' - 4y' + 4y = 0$ est $y = (a\cos 2x + b\sin 2x)e^{2x}$
- C $y'' + 2y' + 3y = 0$ est $y = \left(a\cos\sqrt{2}x + b\sin\sqrt{2}x\right)$
- D $y'' + 5y' + 6y = 0$ est $y = (a\cos 3x - b\sin 3x)e^{-2x}$

Q6 On a

- A $\lim\limits_{t \to 0} (|t| \ln |t|) = -\infty$
- B $\lim\limits_{t \to \infty} \left(\dfrac{\ln t}{t}\right) = +\infty$
- C $\lim\limits_{t \to \infty} \left(\dfrac{e^t}{t}\right) = 0$
- D $\lim\limits_{t \to +\infty} \left(t^3 e^{-t}\right) = 0$

Q7 On considère les intégrales

$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^2 x \, dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \, dx$.

Alors on a

- A $I + J = 1$
- B $I - J = 1$
- C $I = J$
- D $I = -J$

Q8 La suite de nombre réels $(u_n)_n$ donnée par

- A $u_n = (-1)^n \left(\dfrac{5^n}{3^n}\right)$ est majorée
- B $u_n = (-1)^n \ln\left(1 + n^2\right)$ est convergente
- C $u_n = (-1)^n \ln\left(1 + n^2\right)$ est bornée
- D $u_n = \left(n^2 - n\cos n\right)$ est divergente.

Q9 Toute suite de nombres réels

- A Convergente est bornée
- B Croissante est majorée
- C Décroissante est minorée
- D Bornée est convergente

Q10 Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$, un point M est sur le cercle de diamètre $[AB]$ si, et seulement, si

- A Le triangle AMB est isocèle
- B Le triangle AMB est équilatéral
- C Le triangle AMB est droit
- D Le triangle AMB est quelconque

Q11 Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$, on considère les points M_1 et M_2 d'affixe respectifs z_1 et z_2 dans $\mathbb{C}$ solutions de l'équation en « z » : $3z^2 + z + 5 = 0$. Et soit I le milieu du segment $[M_1, M_2]$. Alors on a

- A Le triangle OM_1M_2 est équilatéral
- B $(z_1 + z_2)$ est imaginaire pur
- C L'affixe de I est imaginaire pur
- D Le triangle OM_1M_2 est isocèle

Q12 On a $\lim\limits_{t \to 0} \left(\dfrac{t \sin t}{1 - \cos t}\right) =$

A $\dfrac{-1}{2}$ B -2 C $\dfrac{1}{2}$ D 2

Q13 Dans un espace vectoriel de dimension n :

- A Une partie libre de moins de n éléments est génératrice
- B Une partie génératrice de plus de n éléments est libre
- C Une partie libre de n éléments est une base
- D Une partie génératrice de n éléments n'est pas une base

Q14 Pour tout $a < b$ dans $\mathbb{R}$ et toute fonction f continue sur $]a; b[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$,

- A La fonction f est bornée sur $]a; b[$
- B $\forall x, y \in]a; b[, \exists z \in]a; b[$ / $f(x) + 2f(y) = 3f(z)$
- C $\forall x, y \in]a; b[$ si $f(x) = f(y)$ alors $\exists z \in]a; b[$ / $f(z) = 0$
- D $\forall x, y \in]a; b[, \exists z \in]a; b[$ / $f(x) - f(y) = (x - y)f(z)$

Q15 Une fonction strictement monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est

A Bijective B Inversible C Injective D Surjective

Q16 Dans une urne à 52 jetons numérotés de 1 à 13 et de quatre couleurs différentes : noire, blanche, rouge et verte. On tire un jeton rouge. La probabilité pour qu'il porte le numéro est de

A $P = \dfrac{1}{52}$ B $P = \dfrac{4}{52}$ C $P = \dfrac{1}{13}$ D $P = \dfrac{4}{13}$

Q17 Pour tout réel $a > 0$, la fonction f donnée par $f(x) = \ln\left|\dfrac{x - a}{x + a}\right|$ est

- A Paire sur son domaine
- B Impaire sur son domaine
- C Croissante sur son domaine
- D Décroissante sur son domaine

Q18 On considère la fonction $f(t) = \arctan(t) + \arctan\left(\dfrac{1}{t}\right)$; $t \neq 0$. Alors on a

- A La fonction f ne prend que deux valeurs distinctes sur son domaine
- B La fonction f est constante sur son domaine
- C La fonction f prend plus de deux valeurs distinctes sur son domaine
- D La fonction f est non bornée sur son domaine

Q19 La dérivée $f'(t)$ de la fonction $f(t) = \dfrac{2\arctan\left(\sqrt{t}\right)}{1 + \sqrt{t}}$; $t > 0$ est

- A $f'(t) = \dfrac{1}{(1 + \sqrt{t})}\left(\dfrac{1}{1 + t} - \dfrac{\arctan\left(\sqrt{t}\right)}{1 + \sqrt{t}}\right)$
- B $f'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}\,(1 + \sqrt{t})}\left(\dfrac{1}{1 + t} + \dfrac{\arctan\left(\sqrt{t}\right)}{1 + \sqrt{t}}\right)$
- C $f'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}\,(1 + \sqrt{t})^2}\left(\dfrac{1}{1 + t} - \dfrac{\arctan\left(\sqrt{t}\right)}{1 + \sqrt{t}}\right)$
- D $f'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}\,(1 + \sqrt{t})}\left(\dfrac{1}{1 + t} - \dfrac{\arctan\left(\sqrt{t}\right)}{1 + \sqrt{t}}\right)$

ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES DE KHOURIBGA · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'entrée en 1re année · ENSA Khouribga

Année 2011–2012

2011 — Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14
B	C	B	B	A	D	A	D	A	C	D	D	C	B

Q15	Q16	Q17	Q18	Q19
C	C	B	A	D

Q1 ✔ Réponse B

Inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^2$: $1\cdot 1+1\cdot\|x\|\le\sqrt{1+1}\sqrt{1+\|x\|^2}$. (A et C sont fausses en général ; D est fausse pour $x=0$.)

Q2 ✔ Réponse C

$6X^3+5X^2-2X-1=(X+1)(3X+1)(2X-1)$: racines -1, $-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$. Avec $X=\ln x$: $x\in\left\{\frac{1}{e},\frac{1}{\sqrt[3]{e}},\sqrt{e}\right\}$. (A ne contient pas -1 ; B : $\cos 0=1$ n'est pas racine ; D : seul $e^x=\frac{1}{2}$ convient.)

Q3 ✔ Réponse B

$$v_{n+1}=qu_n+r-\frac{r}{1-q}=qu_n-\frac{qr}{1-q}=q\,v_n.$$

Q4 ✔ Réponse B

$\tan x-\sin x=\tan x\,(1-\cos x)\sim x\cdot\dfrac{x^2}{2}$: la limite vaut $\dfrac{1}{2}$.

Q5 ✔ Réponse A

$r^2+6r+9=(r+3)^2$: racine double -3, d'où $y=(ax+b)e^{-3x}$. (B : racine double 2 ; C : $r=-1\pm i\sqrt{2}$, il manque e^{-x} ; D : racines réelles -2, -3.)

Q6 ✔ Réponse D

Croissances comparées : $t^3e^{-t}\to 0$. ($|t|\ln|t|\to 0$, $\frac{\ln t}{t}\to 0$, $\frac{e^t}{t}\to+\infty$.)

Q7 ✔ Réponse A

$$I=\left[\frac{\sin^3 x}{3}\right]_0^{\pi/2}=\frac{1}{3}\text{ et }I+J=\int_0^{\pi/2}\cos x\,dx=1.$$

Q8 ✔ Réponse D

$n^2-n\cos n\ge n^2-n\to+\infty$. (Les suites de A, B, C ne sont pas bornées.)

Q9 ✔ Réponse A

Toute suite convergente est bornée. Les réciproques B, C, D sont fausses ($u_n=n$, $u_n=-n$, $u_n=(-1)^n$).

Q10 ✔ Réponse C

M (distinct de A et B) est sur le cercle de diamètre $[AB]$ si et seulement si $\widehat{AMB}$ est droit : le triangle est rectangle en M.

Q11 ✔ Réponse D

Les racines sont conjuguées : $|z_1|=|z_2|$, donc $OM_1=OM_2$. $z_1+z_2=-\frac{1}{3}$ est réel et $z_I=-\frac{1}{6}$. $|z_1|=\sqrt{\frac{5}{3}}$ mais $|z_1-z_2|=\frac{\sqrt{59}}{3}$: pas équilatéral.

Q12 ✔ Réponse D

$t\sin t\sim t^2$ et $1-\cos t\sim\dfrac{t^2}{2}$: la limite vaut 2.

Q13 ✔ Réponse C

En dimension n, une famille libre de n vecteurs est une base.

Q14 ✔ Réponse B

$\dfrac{f(x)+2f(y)}{3}$ est compris entre $f(x)$ et $f(y)$; par le théorème des valeurs intermédiaires, il est atteint en un z entre x et y. (A : $f(x)=\frac{1}{x}$ sur $]0,1[$; D demande la dérivabilité.)

Q15 ✔ Réponse C

Strictement monotone $\Rightarrow$ injective. Elle n'est bijective que sur son image.

Q16 ✔ Réponse C

Il y a 13 jetons rouges équiprobables : un numéro donné a la probabilité $\dfrac{1}{13}$. (L'énoncé omet le numéro.)

Q17 ✔ Réponse B

$$f(-x)=\ln\left|\frac{-x-a}{-x+a}\right|=\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right|=-f(x)$$: f est impaire.

Q18 ✔ Réponse A

f est de dérivée nulle sur chaque intervalle : $f(t)=\dfrac{\pi}{2}$ pour $t>0$ et $-\dfrac{\pi}{2}$ pour $t<0$.

Q19 ✔ Réponse D

Avec $(\arctan\sqrt{t})'=\dfrac{1}{2\sqrt{t}(1+t)}$:

$$f'(t)=\frac{\frac{1+\sqrt{t}}{\sqrt{t}(1+t)}-\frac{\arctan\sqrt{t}}{\sqrt{t}}}{(1+\sqrt{t})^2}=\frac{1}{\sqrt{t}(1+\sqrt{t})}\left(\frac{1}{1+t}-\frac{\arctan\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}\right).$$

ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES DE KHOURIBGA · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'entrée en 1re année · ENSA Khouribga

Année 2010–2011

2010 Énoncé

Q1 Soient a et b deux nombres réels donnés. On a

A $(a-b)^2 \leq 2\left(a^2-b^2\right)$
B $(a+b)^2 \leq 2\left(a^2+b^2\right)$
C $|a-b| \leq |a|-|b|$
D $|a+b| \leq a+b$

Q2 La partie $\mathcal{E}$ ci-après est un espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$:

A $\mathcal{E}=\{(s,t,x,y)\in\mathbb{R}^4/\ 7s+t-x-2y=1\}$
B $\mathcal{E}=\{(s,t,x,y)\in\mathbb{R}^4/\ s=-5\}$
C $\mathcal{E}=\{(s,t,x,y)\in\mathbb{R}^4/\ -3s-2t+x-y=0\}$
D $\mathcal{E}=\{(s,t,x,y)\in\mathbb{R}^4/\ -5s-3t=8\}$

Q3 Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$; soit M le point d'affixe $z=x+iy\in\mathbb{C}$. Le point N d'affixe $\overline{z}\in\mathbb{C}$ est :

A sur le cercle centré à l'origine et passant par le point M
B le symétrique du point M par rapport à l'axe oy
C le symétrique du point M par rapport à l'origine
D sur la droite passant par l'origine et le point M.

Q4 Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$; soit M le point d'affixe $z=x+iy\in\mathbb{C}$. Le point N d'affixe $(2iz)\in\mathbb{C}$ est :

A sur le cercle centré en M et de rayon $|z|$
B sur la droite passant par l'origine et le point M
C sur le cercle centré à l'origine et passant par le point M
D sur la droite passant par l'origine et orthogonale à OM

Q5 L'équation en $z\in\mathbb{C}$, le corps des nombres complexes $z^5+z^3-z^2+1=0$ admet pour ensemble de solutions

A $S=\left\{1,i,-i,\frac{-1+i\sqrt{3}}{2},\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right\}$
B $S=\left\{1,i,-i,\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right\}$
C $S=\left\{i,-i,\frac{-1+i\sqrt{3}}{2},\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right\}$
D $S=\left\{1,i,\frac{-1+i\sqrt{3}}{2},\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right\}$

Q6 Toute suite de nombres réels

A majorée est convergente
B minorée est convergente
C croissante majorée est convergente
D croissante minorée est convergente

Q7 On a

A $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\sin t}{t^2}=1$
B $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\sin t^2}{t}=1$
C $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\sin^2 t}{t}=1$
D $\lim\limits_{t\to0}\left(\dfrac{\sin(-t)}{t}\right)^2=1$

Q8 Pour tout $0<a<1$; le domaine de la fonction $f(x)=\ln\left(\sqrt[3]{\dfrac{x-a}{a^3-x}}\right)$ est

A $D_f=[a^3,a[$ B $D_f=]a^3,a[$
C $D_f=]a^3,a]$ D $D_f=[a^3,a]$

Q9 On a $\lim\limits_{|x|\to1}\dfrac{1-2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}x\right)}{1-x^2}=$

A $+\infty$ B $\dfrac{-\pi}{4}$ C $-\infty$ D $\dfrac{\pi}{4}$

Q10 On a $\lim\limits_{|x|\to\infty}\dfrac{x^2+\cos^2 x}{x^2+\sin^2 x}=$

A $-\pi$ B π C -1 D 1

Q11 La fonction f définie par

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-2}\ln\left(\dfrac{1+x^2}{5}\right) & \text{si } x\neq2\\ \ell & \text{si } x=2\end{cases}$$

est continue si

A $\ell=\dfrac{5}{4}$ B $\ell=\dfrac{-5}{4}$
C $\ell=\dfrac{4}{5}$ D $\ell=\dfrac{-4}{5}$

Q12 Toute fonction f continue sur $\mathbb{R}$ et vérifiant $\lim\limits_{|x|\to\infty}f(x)=\ell\in\mathbb{R}$ est nécessairement

A bornée
B majorée et non minorée
C non bornée
D minorée et non majorée

Q13 La dérivée $f'(t)$ de la fonction $f(t)=\dfrac{2\ln\left(1+\sqrt{t}\right)}{1+\sqrt{t}}$ est

A $f'(t)=\dfrac{1-\ln\left(1+\sqrt{t}\right)}{\sqrt{t}(1+t)}$
B $f'(t)=\dfrac{1-\ln\left(1+\sqrt{t}\right)}{2\left(1+\sqrt{t}\right)^2}$
C $f'(t)=\dfrac{1-\ln\left(1+\sqrt{t}\right)}{\sqrt{t}\left(1+\sqrt{t}\right)^2}$
D $f'(t)=\dfrac{1-\ln\left(1+\sqrt{t}\right)}{2(1+t)^2}$

Q14 La primitive $F(x)=\displaystyle\int\frac{x\,dx}{(1+x^2)\sqrt{\ln(1+x^2)}}$

A $F(x)=\sqrt{\ln\left(1+x^2\right)}+c$
B $F(x)=2x\sqrt{\ln\left(1+x^2\right)}+c$
C $F(x)=\sqrt{\ln|1+x|}+c$
D $F(x)=\sqrt{\ln(1+|x|)}+c$

Q15 Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$; pour tout $a>0$, l'aire géométrique $\mathcal{A}$ de la région délimitée par les quatre droites d'équations $x=-a$; $x=a$; $y=3ax$; et $y=5ax$ est

A $\mathcal{A}=2\sqrt{a}$ B $\mathcal{A}=2a$
C $\mathcal{A}=2a^2$ D $\mathcal{A}=2a^3$

Q16 La solution générale de l'équation différentielle homogène du second ordre

A $y''-2y'+2y=0$ est $y=(a\cos3x+b\sin2x)$
B $y''-4y'+13y=0$ est $y=e^{2x}(a\cos3x+b\sin3x)$
C $y''+y'+y=0$ est $y=ae^{2x}+be^{-2x}$
D $y''+5y'+6y=0$ est $y=(a\cos3x-b\sin3x)e^{-2x}$

Q17 Dans un jeu à trois cartes dont une est la gagnante ; un joueur tire une carte, sachant que nécessairement une des deux autres est une carte perdante ; la probabilité pour que la carte tirée soit la carte gagnante est

A $P=\dfrac{1}{2}$ B $P=\dfrac{2}{3}$
C $P=\dfrac{1}{3}$ D $P=1$

ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES DE KHOURIBGA · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'entrée en 1re année · ENSA Khouribga

Année 2010–2011

2010 — Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14
B	C	A	D	A	C	D	B	B	D	C	A	C	A

Q15	Q16	Q17
D	B	C

Q1 ✔ Réponse B

$2(a^2+b^2)-(a+b)^2=(a-b)^2\geq 0$. (A est faux pour $a=0$, $b=1$; C et D sont faux en général.)

Q2 ✔ Réponse C

Seule l'équation linéaire homogène $-3s-2t+x-y=0$ définit un sous-espace (les autres ne contiennent pas 0).

Q3 ✔ Réponse A

$|\overline{z}|=|z|$: N est sur le cercle de centre O passant par M (c'est le symétrique de M par rapport à l'axe Ox).

Q4 ✔ Réponse D

$2iz=2e^{i\pi/2}z$: $\overrightarrow{ON}$ est orthogonal à $\overrightarrow{OM}$ (et $ON=2OM$).

Q5 ✔ Réponse A

L'équation imprimée n'a pas 1 pour racine ($1+1-1+1=2$) : coquille probable pour $z^5+z^3-z^2-1=0$, qui se factorise en

$$(z^2+1)(z^3-1)=0,$$

de racines $\pm i$, 1 et $\dfrac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$: réponse A.

Q6 ✔ Réponse C

Théorème de la limite monotone : toute suite croissante majorée converge.

Q7 ✔ Réponse D

$\left(\dfrac{\sin(-t)}{t}\right)^2=\left(\dfrac{\sin t}{t}\right)^2\to 1$. (A tend vers l'infini, B et C vers 0.)

Q8 ✔ Réponse B

Il faut $\dfrac{x-a}{a^3-x}>0$. Comme $a^3<a$, cela équivaut à $a^3<x<a$.

Q9 ✔ Réponse B

$1-2\cos^2\left(\frac{\pi x}{4}\right)=-\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$. Près de $x=1$: $-\cos\frac{\pi x}{2}\sim\frac{\pi}{2}(x-1)$ et $1-x^2\sim-2(x-1)$. La limite vaut $-\dfrac{\pi}{4}$ (même valeur en -1 par parité).

Q10 ✔ Réponse D

Numérateur et dénominateur sont équivalents à x^2 : la limite vaut 1.

Q11 ✔ Réponse C

$\ln\dfrac{1+x^2}{5}$ s'annule en 2 ; la limite est sa dérivée en 2 : $\dfrac{2x}{1+x^2}=\dfrac{4}{5}$.

Q12 ✔ Réponse A

Hors d'un segment $[-A,A]$, f reste proche de ℓ ; sur le segment elle est continue donc bornée : f est bornée.

Q13 ✔ Réponse C

Avec $u=1+\sqrt{t}$, $u'=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}$:

$$f'(t)=\frac{2u'(1-\ln u)}{u^2}=\frac{1-\ln\left(1+\sqrt{t}\right)}{\sqrt{t}\left(1+\sqrt{t}\right)^2}.$$

Q14 ✔ Réponse A

Avec $u=\ln(1+x^2)$, $u'=\dfrac{2x}{1+x^2}$: l'intégrande vaut $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$, de primitive $\sqrt{u}$.

Q15 ✔ Réponse D

$\mathcal{A}=\displaystyle\int_{-a}^{a}|5ax-3ax|\,dx=2a\int_{-a}^{a}|x|\,dx=2a\cdot a^2=2a^3$.

Q16 ✔ Réponse B

$r^2-4r+13=0$: $r=2\pm 3i$, donc $y=e^{2x}(a\cos 3x+b\sin 3x)$.

Q17 ✔ Réponse C

L'information donnée est toujours vraie (deux des trois cartes sont perdantes) : elle ne change rien, $P=\dfrac{1}{3}$.

ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES DE KHOURIBGA · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'entrée en 1re année · ENSA Khouribga

Année 2009-2010

2009 — Énoncé

Q1 On considère a et b deux nombres réels quelconques. Laquelle des propositions suivantes est la proposition correcte :

A $|ab| \leq |a| - |b|$ B $|ab| \leq \dfrac{a^2+b^2}{2}$

C $|ab| \leq |a| + |b|$ D $|ab| \leq a^2 - b^2$

Q2 Laquelle des propositions suivantes est la proposition correcte : deux nombres réels dont la somme est S et le produit est P sont solutions de l'équation

A $t^2 - St - P = 0$
B $t^2 + St + P = 0$
C $-t^2 + St - P = 0$
D $t^2 + St - P = 0$

Q3 Laquelle des propositions suivantes est la proposition correcte : la partie S ci-après est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$:

A $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 2x - y = 0 \text{ et } z = 1\}$
B $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / y = z = 1\}$
C $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 1\}$
D $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 2x + 3y - z = 0\}$

Q4 Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$; on considère les points $A = (1,2)$; $B = (-2,-1)$ et $M = (x,y)$. Laquelle des propositions suivantes est la proposition correcte : le point M est

A sur le cercle de diamètre $[AB]$ si $x^2 + y^2 + x - y = 4$
B sur le cercle de centre A et passant par B si $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 18$
C le milieu de $[AB]$ si $x = y = \dfrac{1}{2}$
D sur la droite passant par A et B si $y = 3x - 1$

Q5 Dans $\mathbb{C}$, on considère l'équation en « z » suivante : $z^3 - z^2 + (3+2i)z + (1-2i) = 0$. L'ensemble S des solutions est :

A $S = \{0, i, (1-2i)\}$
B $S = \{i, (1-2i)\}$
C $S = \{i, 1, (1-2i)\}$
D $S = \{-1, -i, (1-2i), 3\}$

Q6 Dans $\mathbb{C}$, on considère l'équation en « z » donnée par : $z^3 = 8$. L'ensemble S des solutions est :

A $S = \left\{2, \left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right), \left(-\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right\}$
B $S = \left\{2, \left(-1 + i\sqrt{3}\right), \left(-1 - i\sqrt{3}\right)\right\}$
C $S = \{-1 + i\sqrt{3}, -1 - i\sqrt{3}, 1 - i\sqrt{3}\}$
D $S = \left\{2, \left(-1 + i\sqrt{3}\right), \left(-1 - i\sqrt{3}\right)\right\}$

Q7 Laquelle des propositions suivantes est la proposition correcte :

A Toute suite de nombres réels convergente est bornée
B Toute suite de nombres réels bornée est convergente
C Toute suite de nombres réels croissante est bornée
D Toute suite de nombres réels convergente est monotone

Q8 Laquelle des propositions suivantes est la proposition correcte : la suite

A $\left((\cos k)\ln\left(1 + \dfrac{\sin k}{k}\right)\right)_{k\geq 1}$ est divergente
B $\left(\ln\left(1 + \dfrac{\sin k}{k}\right)^k\right)_{k\geq 1}$ est convergente
C $\left(\ln\left(1 + \dfrac{\sin k}{k}\right)^k\right)_{k\geq 1}$ est bornée
D $\left(\ln\left(1 + \dfrac{\sin k}{k}\right)\right)_{k\geq 1}$ est divergente

Q9 Pour $a > 1$; on considère la fonction f donnée par $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-a}{x-a^3}}$. Laquelle des propositions suivantes est la proposition correcte :

A Le domaine D_f est $D_f = [a, a^3[$
B $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x-a^3}}$; $\forall x \in]a^3, +\infty[$
C Le domaine D_f est $D_f =]a^3, +\infty[$
D $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x-a^3}}$; $\forall x \in D_f$

Q10 $\lim\limits_{|x|\to 1} \dfrac{1 - 4\sin^2\left(\frac{\pi}{6}x\right)}{1-x^2}$ est

A $\dfrac{\sqrt{3}}{6}\pi$ B $\dfrac{1}{2}$ C n'existe pas D $\dfrac{\pi}{6}$

Q11 $\lim\limits_{|x|\to\infty} \dfrac{x - \sin x}{x + \cos x}$ est

A $\dfrac{1}{6}$ B π C 1 D n'existe pas

Q12 On considère la fonction f donnée par

$$f(x) = \begin{cases} 4\sqrt{1+x^2} & \text{si } x \leq 1 \\ \dfrac{x^2-1}{\sqrt{x^2+a^2} - \sqrt{x+a^2}} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

A Si $a = \pm\sqrt{3}$, la fonction f est continue en $x = 1$
B $\forall a \in \mathbb{R}$, la fonction f est discontinue en $x = 1$
C $\forall a \in \mathbb{R}$, la fonction f est continue en $x = 1$
D Si $a = \pm 1$, la fonction f est continue en $x = 1$

Q13 On considère f une fonction dérivable en un point a ; $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a-h)}{h}$ est

A $2f'(a)$ B $f'(a)$ C $f(a)$ D $f'(0)$

Q14 On considère f la fonction dérivable donnée par $f(x) = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

A $f'(x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2} + x\arcsin(x)}{(1-x^2)^2}$
B $f'(x) = \dfrac{1 - x^2 + x\arcsin(x)}{1-x^2}$
C $f'(x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2} - x\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$
D $f'(x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2} + x\arcsin(x)}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$

Q15 Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$; on désigne par C_f la courbe de $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in \mathbb{R}_+$ et C_g celle de $g(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$. On note $\mathcal{A}$ l'aire géométrique de la région du plan délimitée par les droites d'équations $x = \dfrac{1}{2}$ et $x = 2$ et par les courbes C_f et C_g.

A $\mathcal{A} = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(t^2 - \sqrt{t}\right) dt$
B $\mathcal{A} = \dfrac{27}{8} - \dfrac{3}{2}\sqrt{2}$
C $\mathcal{A} = \dfrac{21}{8} - \dfrac{7}{6}\sqrt{2}$
D $\mathcal{A} = \left|\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(t^2 - \sqrt{t}\right) dt\right|$

Q16 La solution générale de l'équation différentielle

A $y'' - 4y' + 5y = 0$ est $y = ae^{2x} + be^{-2x}$
B $y'' - 5y' + 6y = 0$ est $y = a\cos 3x + b\sin 2x$
C $y'' - 6y' + 9y = 0$ est $y = (ax+b)e^{3x}$
D $y'' + 5y' + 6y = 0$ est $y = (a\cos 3x + b\sin 3x)e^{-2x}$

Q17 Un jeu de dominos comprend 28 pièces. Une des faces de chaque pièce compte deux cases. Sur chacune de ces deux cases est inscrit un chiffre compris entre 0 et 6. Un joueur tire une pièce. Pour $k = 0, 1, \ldots, 12$; on désigne par $P(k)$ la probabilité pour que la somme des chiffres sur ses cases soit exactement k.

A $P(6) = \dfrac{1}{7}$ B $P(12) = \dfrac{1}{14}$
C $P(3) = \dfrac{1}{28}$ D $P(8) = \dfrac{1}{7}$

ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES DE KHOURIBGA · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'entrée en 1re année · ENSA Khouribga

Année 2009–2010

2009 — Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14
B	C	D	A	B	BD	A	C	B	A	C	D	A	D

Q15	Q16	Q17
B	C	A

Q1 ✔ Réponse B

$a^2+b^2-2|ab| = (|a|-|b|)^2 \geq 0$.

Q2 ✔ Réponse C

Ils sont racines de $t^2 - St + P = 0$, équation équivalente à $-t^2 + St - P = 0$.

Q3 ✔ Réponse D

Seule $2x+3y-z=0$ est linéaire homogène ; les autres ensembles ne contiennent pas 0.

Q4 ✔ Réponse A

Centre $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et $R^2 = \frac{18}{4} = \frac{9}{2}$:
$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{2} \iff x^2+y^2+x-y=4$. (B est centré en B ; le milieu est $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$; $(AB) : y = x+1$.)

Q5 ✔ Réponse B

On vérifie que i et $1-2i$ sont racines. Somme des racines $= 1$: la troisième est $1-i-(1-2i) = i$. Racine double i : $S = \{i, 1-2i\}$.

Q6 ✔ Réponse BD

$z^3 = 8 \iff z = 2e^{2ik\pi/3}$: 2, $-1+i\sqrt{3}$, $-1-i\sqrt{3}$. B et D sont identiques et justes.

Q7 ✔ Réponse A

Toute suite convergente est bornée ; B, C, D sont fausses ($(-1)^n$, n, $\frac{(-1)^n}{n}$).

Q8 ✔ Réponse C

$k\ln\left(1+\frac{\sin k}{k}\right) = \sin k + O\left(\frac{1}{k}\right)$: bornée mais sans limite (B faux). A et D tendent vers 0.

Q9 ✔ Réponse B

$a < a^3$. $D_f =]-\infty, a] \cup]a^3, +\infty[$. Pour $x > a^3$, les deux termes sont positifs et $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x-a^3}}$; ce n'est pas vrai pour $x < a$ (D faux).

Q10 ✔ Réponse A

Le numérateur s'annule en 1 ; sa dérivée y vaut $-\frac{2\pi}{3}\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$, celle du dénominateur -2 : limite $\dfrac{\pi\sqrt{3}}{6}$ (même valeur en -1 par parité).

Q11 ✔ Réponse C

$\dfrac{1-\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\cos x}{x}} \to 1$.

Q12 ✔ Réponse D

Pour $x > 1$, en multipliant par la quantité conjuguée :

$$f(x) = \frac{(x+1)\left(\sqrt{x^2+a^2}+\sqrt{x+a^2}\right)}{x} \to 4\sqrt{1+a^2}.$$

Continuité : $4\sqrt{1+a^2} = f(1) = 4\sqrt{2}$, soit $a = \pm 1$.

Q13 ✔ Réponse A

$\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} + \dfrac{f(a)-f(a-h)}{h} \to 2f'(a)$.

Q14 ✔ Réponse D

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-x^2} + \arcsin x \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{\sqrt{1-x^2}+x\arcsin x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}.$$

Q15 ✔ Réponse B

$\sqrt{t} \geq t^2$ sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ et l'inverse sur $[1,2]$. Avec $F(t) = \frac{t^3}{3} - \frac{2}{3}t^{3/2}$:

$$\mathcal{A} = \left(F\left(\tfrac{1}{2}\right) - F(1)\right) + (F(2) - F(1)) = \frac{27}{8} - \frac{3}{2}\sqrt{2}.$$

(A et D ne tiennent pas compte du changement de signe.)

Q16 ✔ Réponse C

$r^2 - 6r + 9 = (r-3)^2$: racine double 3, $y = (ax+b)e^{3x}$.

Q17 ✔ Réponse A

Les 28 pièces sont les paires $\{i, j\}$ avec $0 \leq i \leq j \leq 6$. Somme 6 : $\{0,6\}, \{1,5\}, \{2,4\}, \{3,3\}$, soit $\frac{4}{28} = \frac{1}{7}$. ($P(12) = \frac{1}{28}$, $P(3) = \frac{2}{28}$, $P(8) = \frac{3}{28}$.)

ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES DE KHOURIBGA · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'entrée en 1re année · ENSA Khouribga

Année 2008–2009

2008

Énoncé

Q1 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin\left(\pi\sqrt{1+x}\right)}{x} =$

A n'existe pas
B $\dfrac{-\pi}{2}$
C $\dfrac{\pi}{2}$
D $+\infty$

Q2 Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_0 \in \mathbb{R}$ et $v_{n+1} = f(v_n)$, alors :

A Si de plus f est décroissante alors (v_n) est décroissante
B Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$
C Si f est continue sur $\mathbb{R}$ et (v_n) converge vers ℓ alors $\ell = f(\ell)$
D Si f est dérivable sur $\mathbb{R}$ alors (v_n) est bornée

Q3 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers :

A $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$
B $\sqrt{2}$
C $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$
D (u_n) ne converge pas

Q4 L'ensemble des solutions de l'équation $iz^2 - 2z + 2 - i = 0$ est :

A $\{1, 1+2i\}$
B $\{i, \bar{i} = -i\}$
C $\{1, -(1+2i)\}$
D $\varnothing$

Q5 Soit f la fonction définie sur $D =]-\infty, -2[\cup]3, +\infty[$ par $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+2}{x-3}\right)$.

A $f(x) = \ln(x+2) - \ln(x-3)\ \forall x \in D$
B f est une primitive de la fonction $h(x) = \dfrac{5}{6+x-x^2}$ $(x \in D)$
C f est croissante sur $]3, +\infty[$
D L'équation $f(x) = -1$ admet une solution dans $]3, +\infty[$

Q6 Soit f la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{2+x}}{x+2} & x \geq 0 \\ \dfrac{\cos(x) - \sqrt{1+\sin(ax)}}{x} & x < 0 \end{cases}$

La valeur de a pour laquelle la fonction f est continue au point zéro est :

A $a = 1$
B $a = \sqrt{2}$
C $a = \pi$
D $a = 0$

Q7 Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \sqrt[3]{8-x^3}$. Alors :

A $h^{-1}(x) = \sqrt[3]{8-x^3}$
B h est dérivable sur $\mathbb{R}$
C Domaine de définition de h est $[2, +\infty[$
D $h \circ h(x) = x^2$

Q8 Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[1, +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x}$. Alors :

A g est décroissante sur $[1, +\infty[$
B $g^{-1}(2) = 2 + \sqrt{3}$
C Une primitive de g est $G(x) = \dfrac{x^2}{2} - x + \ln(x)$
D La droite d'équation $y = 2x$ est une asymptote à la courbe de g au voisinage de $+\infty$

Q9

A L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $3e^{2x} + 4e^x + 1 = 0$ est $\{0, \ln(3)\}$
B L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $3e^{2x} + 4e^x + 1 = 0$ est $\varnothing$
C L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $e^{2x} - 2e^x - 3 = 0$ est $\{0, \ln(3)\}$
D L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $e^{2x} - 2e^x - 3 = 0$ est $\varnothing$

Q10 Soit l'équation différentielle : (E) $y'' + 2y' + 4y = 0$

A La solution générale de (E) est $y(x) = [\alpha\cos(x) + \beta\sin(x)]e^x$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$
B La solution générale de (E) est $y(x) = \left[\alpha\cos(\sqrt{3}x) + \beta\sin(\sqrt{3}x)\right]e^{-x}$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$
C L'équation différentielle (E) n'admet pas de solutions
D La solution générale de (E) est $y(x) = \left[\alpha e^{x\sqrt{5}} + \beta e^{-x\sqrt{5}}\right]e^{-x}$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

Q11 Soit f une fonction définie sur l'ensemble des réels, dont la courbe représentative dans un repère orthonormé est symétrique par rapport au point $\Omega\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$. Alors :

A $f(0) = 0$ et $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{3}{2}$
B La courbe de $f \circ f$ est symétrique par rapport au point $\Omega\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$
C $f(x) = 3 - f(1-x)$ pour $x \in \mathbb{R}$
D La courbe de $f \circ f$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \dfrac{1}{2}$

Q12 Soit h une fonction définie sur l'ensemble des réels, dont la courbe représentative dans un repère orthonormé est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \dfrac{1}{2}$. Alors :

A La courbe de $h \circ h$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = 1$
B $h\left(x - \dfrac{1}{2}\right) = h\left(\dfrac{1}{2} - x\right)$ pour $x \in \mathbb{R}$
C $h(x) = h(1-x)$ pour $x \in \mathbb{R}$
D $h\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$

Q13 Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$

A F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $F'(x) = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$
B Pour tout réel x, $F(x) \geq 0$
C Pour tout réel x, $|F(x)| \leq \pi$
D $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \pi$

ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES DE KHOURIBGA · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'entrée en 1re année · ENSA Khouribga

Année 2008–2009

2008 — Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13
B	C	C	C	B	B	A	B	B	B	C	C	C

Q1 ✔ Réponse B

C'est la dérivée en 0 de $\sin\left(\pi\sqrt{1+x}\right)$: $\cos(\pi)\cdot\dfrac{\pi}{2}=-\dfrac{\pi}{2}$.

Q2 ✔ Réponse C

Si $v_n\to\ell$ et f est continue, $v_{n+1}=f(v_n)\to f(\ell)$, donc $\ell=f(\ell)$. Les autres affirmations sont fausses en général.

Q3 ✔ Réponse C

La suite est croissante, majorée par 2 ; sa limite vérifie $\ell=\sqrt{1+\ell}$, $\ell^2-\ell-1=0$, $\ell=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Q4 ✔ Réponse C

$z=1$ est racine : $i-2+2-i=0$. Le produit des racines vaut $\dfrac{2-i}{i}=-1-2i$, donc l'autre racine est $-(1+2i)$: $S=\{1,-(1+2i)\}$.

Q5 ✔ Réponse B

$f'(x)=\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x-3}=\dfrac{-5}{(x+2)(x-3)}=\dfrac{5}{6+x-x^2}$. (A est faux pour $x<-2$; f décroît sur $]3,+\infty[$ et $f>0$ y.)

Q6 ✔ Réponse B

À droite : $f(0)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. À gauche : $\cos x-\sqrt{1+\sin ax}\sim-\dfrac{ax}{2}$, d'où la limite $-\dfrac{a}{2}$. Continuité : $a=\sqrt{2}$.

Q7 ✔ Réponse A

$h\circ h(x)=\sqrt[3]{8-(8-x^3)}=x$, donc $h^{-1}=h$. (h n'est pas dérivable en $x=2$, tangente verticale ; h est définie sur $\mathbb{R}$.)

Q8 ✔ Réponse B

$g(x)=2\iff x^2-4x+1=0$, $x=2+\sqrt{3}\geq 1$. (g est croissante ; $g(x)=x-2+\frac{1}{x}$, primitive $\frac{x^2}{2}-2x+\ln x$, asymptote $y=x-2$.)

Q9 ✔ Réponse B

$3e^{2x}+4e^x+1>0$: pas de solution. ($e^{2x}-2e^x-3=0$ donne seulement $e^x=3$, $S=\{\ln 3\}$.)

Q10 ✔ Réponse B

$r^2+2r+4=0$: $r=-1\pm i\sqrt{3}$,
$y=e^{-x}\left(\alpha\cos\sqrt{3}x+\beta\sin\sqrt{3}x\right)$.

Q11 ✔ Réponse C

Symétrie de centre Ω : $f(1-x)+f(x)=2\cdot\dfrac{3}{2}=3$. (On a $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}$, mais $f(0)$ n'est pas connu.)

Q12 ✔ Réponse C

Symétrie par rapport à $x=\frac{1}{2}$: $h(x)=h(1-x)$. (B est la parité de h, qui n'est pas acquise.)

Q13 ✔ Réponse C

$F(x)=\arctan x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$: $|F(x)|\leq\pi$. ($F'(x)=\frac{1}{1+x^2}$; $F<0$ pour $x<0$; $F\to\frac{\pi}{2}$.)

ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES DE OUJDA · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année · ENSA Oujda

Session du mercredi 1er août 2012

2012

Énoncé

Q1 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \ln(e^x + x) - x$ la dérivée de f est :

A $f'(x) = \dfrac{1}{e^x + x}$

B $f'(x) = \dfrac{e^x}{e^x + x}$

C $f'(x) = \dfrac{1 - x}{e^x + x}$

D $f'(x) = \dfrac{e^x}{\ln(e^x + x)} - 1$

Q2 On considère l'équation différentielle $(E) : y'' - 5y' + 4y = 0$, alors la solution de (E) s'écrit sous la forme :

A $y = \lambda e^t + \mu e^{4t}$.

B $y = \lambda e^{-t} + \mu e^{2t}$.

C $y = e^t(\lambda \cos(4t) + \mu \sin(4t))$.

D $y = (\lambda t + \mu)e^{4t}$.

Q3 L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.
Pour tout réel t de l'intervalle $[-\pi, \pi[$, l'ensemble Γ_t des point $M(x, y, z)$ vérifiant l'équation :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2tx - 2y\sin t + 2z + t^2 + \sin^2 t - 1 = 0$$

A Est une sphère de centre $\Omega(t, t, 1)$ et de rayon $R = 2$.

B Est une sphère de centre $\Omega(0, 0, -1)$ et de rayon $R = \sqrt{2}$.

C Est un cercle de centre $\Omega(t, t, 1)$ et de rayon $R = 2$.

D Est une sphère de centre $\Omega(t, \sin t, -1)$ et de rayon $R = \sqrt{2}$.

Q4 L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.
Soient (P) et (P') les plans d'équations respectives $x + 2y - z + 1 = 0$ et $-x + y + z = 0$.
Les plans (P) et (P') sont :

A Sécants mais ils ne sont pas perpendiculaires.

B Perpendiculaires.

C Strictement parallèles.

D Confondus.

Q5 Soit n un entier naturel :

A $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k = 0$

B $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k = -1$

C $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k = 1$

D $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k = -2$

Q6 Dans l'espace $\mathcal{E}$ on donne un tétraèdre $OABC$. Soit G le barycentre du système de points pondérés
$S = \{(O, 3), (A, 1), (B, 1), (C, 1)\}$
L'ensemble Γ des points M tels que :
$\|3\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 5$ est :

A Le triangle ABC

B Un cercle de centre G et de rayon 5

C Cube de côté $\dfrac{5}{6}$

D Sphère de centre G et de rayon $\dfrac{5}{6}$.

Q7 Soit $p(x)$ un polynôme du troisième degré tel que 2 et -3 sont ses racines.
$p(x)$ peut se mettre sous la forme :

A $(x + 2)(x - 3)(ax + b)$.

B $(x + 2)(x - 3)(ax^2 + bx + c)$.

C $(x - 2)(x + 3)(ax + b)$.

D $(x - 2)(x + 3)(ax^2 + bx + c)$.

Q8 Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ avec : $a > b > 0$.
La limite en $+\infty$ de la fonction $\left(\dfrac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ est égale à :

A $\dfrac{1}{2}$ B $\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)$ C a D $+\infty$

Q9 Soient x et y deux réels strictement positifs.
On pose $a = \dfrac{x + y}{2}$; $b = \sqrt{xy}$;
$c = \sqrt{\dfrac{1}{2}(x^2 + y^2)}$ alors

A $a \leq b \leq c$ B $b \leq a \leq c$
C $a \leq c \leq b$ D $c \leq a \leq b$

Q10 La limite $\displaystyle\lim_{x \to \frac{\pi}{2}+} \frac{1 + \cos(x)}{x \sin(x)}$ vaut

A 0 B -2 C $\dfrac{1}{2}$ D $+\infty$

Q11 La limite de la suite $\dfrac{1 + 2 + 3 + \cdots + n}{n^2}$ est :

A 0 B $\dfrac{1}{2}$ C 2 D $+\infty$

Q12 Pour tout $a, b > 0$, on a :

A $\dfrac{1}{2}(\ln a + \ln b) = \ln\dfrac{a + b}{2}$

B $\dfrac{1}{2}(\ln a + \ln b) > \ln\dfrac{a + b}{2}$

C $\dfrac{1}{2}(\ln a + \ln b) \leq \ln\dfrac{a + b}{2}$

D $\dfrac{1}{2}(\ln a + \ln b) \geq \ln\dfrac{a + b}{2}$

Q13 Soit $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \cos(x) \cdot e^{-x}\, dx$

A $I = 0$ B $I = -1$
C $I = e^{-\pi} + 1$ D $I = \dfrac{e^{-\pi} + 1}{2}$

Q14 Un sac contient 3 boules blanches, 4 boules noires et 1 boule rouge, indiscernables au toucher. On tire, au hasard, successivement, trois boules du sac, en remettant chaque boule tirée dans le sac avant le tirage suivant. La probabilité de tirer trois boules noires est :

A $\dfrac{C_3^4}{C_3^8}$ B $\dfrac{9}{8}$ C $\left(\dfrac{1}{2}\right)^3$ D $\dfrac{4 \times 3 \times 2}{8 \times 7 \times 6}$

Q15 Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on désigne par A et B les deux points d'affixes respectives -1 et $-i$.
L'ensemble des points M d'affixe z telle que $\dfrac{z + i}{z + 1}$ soit un imaginaire pur est :

A La droite (AB) privée du point A.

B Le cercle de diamètre $[AB]$ privé du point A.

C Le segment $[AB]$ privé du point A.

D La médiatrice du segment $[AB]$.

Q16 Soient A et B deux évènements tels que : $p(A \cup B) = 0{,}8$, $p(A) = 0{,}6$ et $p(B) = 0{,}3$:

A $p_A(B) = \dfrac{1}{6}$

B $p_B(A) = \dfrac{1}{6}$

C $p(A \cap B) = \dfrac{1}{6}$

D A et B sont indépendants

Q17 On considère les nombres complexes : $z_1 = 1 - 2i$, $z_2 = 2 + i$ et $z_3 = \dfrac{1}{z_1} + \dfrac{1}{z_2}$, la forme algébrique du nombre complexe z_3 est :

A $z_3 = \dfrac{3}{5} - \dfrac{1}{5}i$ B $z_3 = \dfrac{3}{5} + \dfrac{1}{5}i$
C $z_3 = \dfrac{1}{5} - \dfrac{3}{5}i$ D $z_3 = \dfrac{1}{5} + \dfrac{3}{5}i$

Q18 La courbe de la fonction définie sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$ par : $f(x) = 2x - \dfrac{\ln(\sqrt{x}) - 1}{\ln(\sqrt{x})}$ admet pour asymptote la droite d'équation :

A $y = 2x + 1$ B $x = 2$
C $y = 2$ D $y = 2x - 1$

Q19 La négation de l'assertion :
$\forall x \in I,\ \forall y \in I,\ f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y$ est :

A $\exists x \in I,\ \exists y \in I,\ f(x) = f(y)$ et $x \neq y$.

B $\exists x \notin I,\ \exists y \notin I,\ f(x) \neq f(y) \Longrightarrow x = y$.

C $\exists x \in I,\ \exists y \in I,\ f(x) = f(y)$ ou $x \neq y$.

D $\exists x \in I,\ \exists y \in I,\ f(x) \neq f(y)$ et $x \neq y$.

Q20 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{2x} - (x + 1)e^x$ alors :

A $\displaystyle\int_{-4}^{0} f(x)\, dx = e^{-8} + 3e^{-4}$.

B $\displaystyle\int_{-4}^{0} f(x)\, dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-8} - 4e^{-4}$.

C $\displaystyle\int_{-4}^{0} f(x)\, dx = 5e^{-4} - 1$.

D $\displaystyle\int_{-4}^{0} f(x)\, dx = 1 + e^{-8} + 2e^{-4}$.

ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES DE OUJDA · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année · ENSA Oujda

Session du mercredi 1er août 2012

2012 — Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14
C	A	D	B	A	D	C	C	B	–	B	C	D	C

Q15	Q16	Q17	Q18	Q19	Q20
B	A	B	D	A	B

Q1 — Réponse C

$$f'(x) = \frac{e^x+1}{e^x+x} - 1 = \frac{e^x+1-e^x-x}{e^x+x} = \frac{1-x}{e^x+x}.$$

Q2 — Réponse A

Équation caractéristique : $r^2-5r+4=0$, soit $(r-1)(r-4)=0$. Deux racines réelles distinctes 1 et 4 : $y=\lambda e^t+\mu e^{4t}$.

Q3 — Réponse D

On complète les carrés :

$$(x-t)^2-t^2+(y-\sin t)^2-\sin^2 t+(z+1)^2-1+t^2+\sin^2 t-1=0,$$

soit $(x-t)^2+(y-\sin t)^2+(z+1)^2=2$: sphère de centre $\Omega(t,\sin t,-1)$ et de rayon $\sqrt{2}$.

Q4 — Réponse B

Vecteurs normaux : $\vec{n}(1,2,-1)$ et $\vec{n}'(-1,1,1)$. Ils ne sont pas colinéaires (plans sécants) et $\vec{n}\cdot\vec{n}'=-1+2-1=0$: les plans sont perpendiculaires.

Q5 — Réponse A

Formule du binôme : $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k = (1-1)^n = 0$ pour $n \geq 1$.

Remarque : pour $n=0$, la somme se réduit à $C_0^0=1$.

Remarque : L'énoncé dit « n un entier naturel » : pour n = 0 la somme vaut 1 (proposition C), pour n ≥ 1 elle vaut 0 (proposition A, réponse visée). À trancher par le professeur (valider A ou retirer la question).

Q6 — Réponse D

Soit G le barycentre de S (somme des poids $3+1+1+1=6$). Pour tout point M : $3\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=6\overrightarrow{MG}$. La condition devient $6MG=5$, soit $MG=\frac{5}{6}$: sphère de centre G et de rayon $\frac{5}{6}$.

Q7 — Réponse C

2 racine donne le facteur $(x-2)$, -3 racine donne $(x+3)$. Le quotient de p (degré 3) par $(x-2)(x+3)$ (degré 2) est de degré 1 : $p(x)=(x-2)(x+3)(ax+b)$ avec $a\neq 0$. D serait de degré 4.

Q8 — Réponse C

On factorise a^x :

$$\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = a\left(\frac{1+(b/a)^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

Comme $0<\frac{b}{a}<1$, $\frac{1+(b/a)^x}{2}\to\frac{1}{2}$, et $\frac{1}{x}\ln\frac{1+(b/a)^x}{2}\to 0$. La limite est $a\cdot e^0=a$.

Q9 — Réponse B

- $a-b=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{2}\geq 0$, donc $b\leq a$.
- $c^2-a^2=\frac{x^2+y^2}{2}-\frac{(x+y)^2}{4}=\frac{(x-y)^2}{4}\geq 0$, et $a,c>0$, donc $a\leq c$.

D'où $b\leq a\leq c$ (moyennes géométrique, arithmétique et quadratique).

Q10 — Réponse –

Quand $x\to\frac{\pi}{2}^+$: $1+\cos x\to 1$ et $x\sin x\to\frac{\pi}{2}$, donc la limite vaut $\frac{2}{\pi}$.

Aucune proposition n'est juste (erreur du sujet).

Q11 — Réponse B

$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$, donc la suite vaut $\frac{n+1}{2n}\to\frac{1}{2}$.

Q12 — Réponse C

$\frac{1}{2}(\ln a+\ln b)=\ln\sqrt{ab}$ et $\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}$ (car $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geq 0$). La fonction ln étant croissante, $\ln\sqrt{ab}\leq\ln\frac{a+b}{2}$, avec égalité seulement si $a=b$: A et D sont fausses en général, B est toujours fausse.

Q13 — Réponse D

Une primitive de $e^{-x}\cos x$ est $F(x)=\frac{e^{-x}(\sin x-\cos x)}{2}$ (on vérifie $F'(x)=e^{-x}\cos x$, ou on fait deux intégrations par parties). Donc

$$I=F(\pi)-F(0)=\frac{e^{-\pi}}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{e^{-\pi}+1}{2}.$$

Q14 — Réponse C

Les tirages sont indépendants (avec remise) et à chaque tirage $P(\text{noire})=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$. Donc $P=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$. (D correspondrait à des tirages sans remise ; B est supérieur à 1.)

Q15 — Réponse B

$\frac{z+i}{z+1}=\frac{z-z_B}{z-z_A}$ (défini pour $M\neq A$). Il vaut 0 en $M=B$; pour $M\neq A,B$ il est imaginaire pur si et seulement si $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})=\pm\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire si M voit $[AB]$ sous un angle droit.

L'ensemble est le cercle de diamètre $[AB]$ privé de A.

Q16 — Réponse A

$p(A\cap B)=p(A)+p(B)-p(A\cup B)=0{,}6+0{,}3-0{,}8=0{,}1$.

- $p_A(B)=\frac{0{,}1}{0{,}6}=\frac{1}{6}$: A est vraie.
- $p_B(A)=\frac{0{,}1}{0{,}3}=\frac{1}{3}$; $p(A\cap B)=\frac{1}{10}$.
- $p(A)\,p(B)=0{,}18\neq 0{,}1$: pas indépendants.

Q17 — Réponse B

$\frac{1}{1-2i}=\frac{1+2i}{5}$ et $\frac{1}{2+i}=\frac{2-i}{5}$. Donc $z_3=\frac{3+i}{5}=\frac{3}{5}+\frac{1}{5}i$.

Q18 — Réponse D

$f(x)=2x-1+\frac{1}{\ln\sqrt{x}}$ et $\frac{1}{\ln\sqrt{x}}\to 0$ quand $x\to+\infty$: la droite $y=2x-1$ est asymptote oblique.

(La courbe a aussi l'asymptote verticale $x=1$, mais pas $x=2$, où f est définie.)

Q19 ✔ Réponse **A**

Les quantificateurs $\forall$ deviennent $\exists$ (sur le même ensemble I), et la négation de « $P \Longrightarrow Q$ » est « P et non Q ». On obtient : $\exists x \in I,\ \exists y \in I,\ f(x) = f(y)$ et $x \neq y$.

Q20 ✔ Réponse **B**

Une primitive de e^{2x} est $\frac{1}{2}e^{2x}$; une primitive de $(x+1)e^x$ est xe^x (dériver : $e^x + xe^x$). Donc $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - xe^x$ et

$$\begin{aligned}\int_{-4}^{0} f(x)\,dx &= F(0) - F(-4)\\ &= \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}e^{-8} + 4e^{-4}\right)\\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-8} - 4e^{-4}.\end{aligned}$$

ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES D'OUJDA · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année · ENSA Oujda

Session du 24 juillet 2009

2009

Énoncé

Q1 Les nombres a et b sont des réels non nuls. Alors :

- **A** $\forall a \in]0;+\infty[,\ \sqrt{a} < a < a^2$
- **B** Si $0 < a < b \leq 1$ alors $\sqrt{b} - \sqrt{a} < b - a$
- **C** Si $1 \leq a < b$ alors $\sqrt{b} - \sqrt{a} < b - a$

Q2 Les fonctions f et g sont définies par $f(x) = xe^{1-x^2}$ et $g(x) = ax^2 + bx$ admettent respectivement (C) et (Γ) pour courbes représentatives. On recherche tous les couples (a, b) de réels tels que (C) et (Γ) aient la même tangente au point d'abscisse 1.

- **A** Si (a, b) est une solution alors $a + b = 1$
- **B** Tout couple (a, b) tel que $2a + b = -1$ est solution
- **C** Le couple $(1, 0)$ est solution

Q3 Soit $f(x) = 2\cos^2 x - \sin x - 1$. On désigne par (E) l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) < 0$.

- **A** $f(x) < 0 \iff \sin x > \dfrac{1}{2}$
- **B** $E = \left]\dfrac{\pi}{6}, +\infty\right[$
- **C** Si $x \in \left]\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}\right[$ alors $f(x) \geq 0$

Q4 Le plan (P) est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative (C) est symétrique par rapport au point $A(1, 0)$. Alors :

- **A** $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(2 - x)$
- **B** $\forall x \in \mathbb{R},\ f(1 + x) + f(1 - x) = 0$
- **C** $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(1 + x) + f'(1 - x) = 0$

Q5 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{e^{2x+1} - e}{x}$, (C) sa courbe représentative et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{2x+1}$.

- **A** La limite en 0 de f est égale à e
- **B** L'axe des abscisses est asymptote à (C)
- **C** $\forall x \neq 0,\ f'(x) = \dfrac{e}{x^2}\left[(x-1)e^{2x} + 1\right]$

Q6 Soit l'équation (E), d'inconnue z, définie par $z^3 = \overline{z}$.

- **A** Si $|\alpha| = 1$ alors α est solution de (E).
- **B** Si $\theta = k\dfrac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, alors $\cos\theta - i\sin\theta$ est solution de (E)
- **C** Les solutions de (E) sont les nombres α tels que $\alpha = 1$ ou $\alpha^4 = 1$

Q7 Soit f l'application qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{2z + 1}{z - 1}$

- **A** L'ensemble des points M tels que z' est réel est l'axe des réels
- **B** L'ensemble des points M tels que z' est imaginaire pur est contenu dans un cercle
- **C** L'ensemble des points M tels que $|z'| = 2$ est un cercle

Q8 On considère l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^e \frac{\ln t}{t^2}\,dt$.

- **A** $I \leq \dfrac{1}{e^2}\displaystyle\int_1^e \ln t\,dt$
- **B** $I = 1 - \dfrac{2}{e^3}$
- **C** $I = -\dfrac{1}{e} + \displaystyle\int_1^e \frac{dt}{t^2}$

Q9 Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3\sqrt{u_n}$

- **A** La suite (u_n) est décroissante
- **B** La suite (v_n) définie par $v_n = \ln u_n - \ln 9$ est une suite arithmétique
- **C** La limite en $+\infty$ de (u_n) est 9

Q10 Quatre points M, N, P et Q distincts forment un parallélogramme $MNPQ$ dont les diagonales se coupent en O. Alors :

- **A** $2\left(MN^2 + MQ^2\right) = NQ^2 + MP^2$
- **B** N est le barycentre de $\{(M, 1), (P, 1), (Q, -2)\}$
- **C** $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{MN} = \vec{0}$

ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES D'OUJDA · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année · ENSA Oujda

Session du 24 juillet 2009

2009 — Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10
C	A	A	B	B	B	AB	C	C	A

Q1 ✔ Réponse C

$\sqrt{b}-\sqrt{a}=\dfrac{b-a}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}$. Si $1\le a<b$, $\sqrt{a}+\sqrt{b}>1$: C vraie. Pour a,b petits ($a=0{,}01$, $b=0{,}04$) : $0{,}1>0{,}03$, B fausse. A est fausse pour $a<1$.

Q2 ✔ Réponse A

$f(1)=1$ et $f'(x)=(1-2x^2)e^{1-x^2}$, $f'(1)=-1$. Il faut $a+b=1$ et $2a+b=-1$: seule solution $(a,b)=(-2,3)$.

Q3 ✔ Réponse A

Avec $s=\sin x$: $f(x)=1-s-2s^2=-(2s-1)(s+1)$. Comme $s+1\ge 0$ (et $f=0$ si $s=-1$) : $f(x)<0 \iff \sin x>\dfrac{1}{2}$.

Q4 ✔ Réponse B

Symétrie par rapport à $A(1,0)$: $f(2-x)=-f(x)$, soit $f(1+x)+f(1-x)=0$. En dérivant : $f'(1+x)-f'(1-x)=0$ (C fausse).

Q5 ✔ Réponse B

En $-\infty$, $f(x)\sim -\dfrac{e}{x}\to 0$: l'axe des abscisses est asymptote. En 0, $f\to 2e$; et

$$f'(x)=\frac{e\left[(2x-1)e^{2x}+1\right]}{x^2}.$$

Q6 ✔ Réponse B

$|z|^3=|z|$: $z=0$ ou $|z|=1$; dans ce cas $\overline{z}=\frac{1}{z}$ et $z^4=1$. Les solutions sont $0,1,i,-1,-i$. $\cos\theta-i\sin\theta=e^{-ik\pi/2}$ en fait partie. (A et C oublient des conditions ou la solution 0.)

Q7 ✔ Réponse AB

z' réel $\iff$ z réel ($z\neq 1$) : l'axe des réels privé du point 1. z' imaginaire pur décrit un cercle (privé d'un point) : B vraie. $|z'|=2 \iff |z+\frac{1}{2}|=|z-1|$: c'est une droite (médiatrice), C fausse.

Q8 ✔ Réponse C

Par parties : $I=\left[-\dfrac{\ln t}{t}\right]_1^e+\displaystyle\int_1^e\frac{dt}{t^2}=-\frac{1}{e}+\int_1^e\frac{dt}{t^2}$, d'où $I=1-\dfrac{2}{e}$ (B fausse).

Q9 ✔ Réponse C

$v_{n+1}=\ln 3+\frac{1}{2}\ln u_n-\ln 9=\frac{1}{2}v_n$: géométrique (pas arithmétique), $v_n\to 0$, donc $u_n\to 9$ (en croissant).

Q10 ✔ Réponse A

Identité du parallélogramme : la somme des carrés des quatre côtés égale celle des diagonales. Le système de B a une somme de poids nulle ; C donne $\overrightarrow{QN}\neq\vec{0}$.

ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES DE SAFI · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année · ENSA Safi

Session du mercredi 1er août 2012

2012

Énoncé

Q1 La fonction y solution de l'équation différentielle $y'(x) + 2y(x) = 6$ avec la condition initiale $y(0) = 1$ est définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

A $y(x) = -2e^{-2x} + 3$
B $y(x) = -2e^{2x} + 3$
C $y(x) = -2e^{-2x} - 3$

Q2 Soit (E) l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $z = 1 - 2i + e^{i\theta}$, θ étant un nombre réel.

A (E) est une droite passant par le point d'affixe $2 - 2i$.
B (E) est le cercle de centre d'affixe $-1 + 2i$ et de rayon 1.
C (E) est le cercle de centre d'affixe $1 - 2i$ et de rayon 1.

Q3 On pose $z = e^{i\theta}$. La valeur de $1 + z$ est :

A $2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$
B $2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$
C $3\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$

Q4 On pose $z = e^{i\theta}$. La valeur de $1 + z + z^2$ est :

A $\frac{\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} e^{i\theta}$
B $\frac{\cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} e^{i\theta}$
C $\frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)} e^{i\theta}$

Q5 La valeur de l'intégrale $I_n = \int_1^n \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx$ est donnée par :

A $I_n = 1 - \frac{\ln(n)}{n}$
B $I_n = 1 - \frac{\ln(n)}{n} - \frac{1}{n}$
C $I_n = 1 - \frac{\ln(n)}{n^2} - \frac{1}{n^2}$

Q6 La valeur de l'intégrale $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\cos(x) + \sin(x)}\,dx$ est donnée par :

A $J = 1$
B $J = \frac{\pi}{4}$
C $J = \frac{\pi}{2}$
D $J = 2$

Q7 La limite l de la suite $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ est :

A $l = 1$
B $l = \frac{e}{2}$
C $l = e^2$
D $l = e$

Q8 La limite de l de la suite $u_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} k^2}{n^3}$ est :

A $l = 1$
B $l = \frac{1}{3}$
C $l = \frac{1}{6}$
D $l = e$

Q9 Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher : 7 blanches et 3 noires. On tire simultanément 3 boules de l'urne. La probabilité de tirer 2 boules blanches et une boule noire est égale à :

A $\frac{21}{40}$
B $\frac{42}{60}$
C $\frac{21}{60}$
D $\frac{45}{56}$

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x}\ln\left(1 + \sin^2(x)\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

Q10.1 La limite de f au point 0 vaut :

A 1
B $\frac{\pi}{2}$
C 0
D $\frac{\pi}{4}$

Q10.2 Choisissez l'un des réponses suivantes :

A f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.
B f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$.
C f n'est pas dérivable en 0.

Q10.3 f est périodique de période :

A π
B 2π
C f n'as pas de période

Q11 Choisissez l'une des réponses suivantes pour la linéarisation de $\sin^4(x)$:

A $\frac{1}{8}\cos(4x) - \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{3}{8}$
B $\frac{1}{8}\cos(4x) + \frac{1}{2}\cos(2x) + 5$
C $\frac{1}{8}\cos(-4x) - \frac{1}{2}\cos(-2x) + \frac{3}{8}$

Q12 La valeur de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4(x)\,dx$ est

A $\frac{\pi}{16}$
B $\frac{5\pi}{16}$
C $\frac{3\pi}{8}$
D $\frac{3\pi}{16}$

Q13 La valeur de l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \cos(x)}\,dx$ est :

A 4
B 3
C 1
D 0

Q14 Quatre points M, N, P et Q distincts forment un parallélogramme $MNPQ$ dont les diagonales se coupent en O. Alors :

A N est le barycentre de $\{(M,1),(P,1),(Q,-2)\}$.
B $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{MN} = \vec{0}$.
C $MQ^2 - PQ^2 = 2\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{MQ}$.
D $2(MN^2 + MQ^2) = NQ^2 + MP^2$.

ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES DE SAFI · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année · ENSA Safi

Session du mercredi 1er août 2012

2012 — Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10.1	Q10.2	Q10.3	Q11	Q12
A	C	B	A	B	B	D	B	A	C	B	C	A	D

Q13	Q14
C	D

Q1 ✔ Réponse A

Les solutions de $y' + 2y = 6$ sont $y(x) = Ce^{-2x} + 3$ (solution constante 3 plus solution de l'équation homogène). $y(0) = C + 3 = 1$ donne $C = -2$: $y(x) = -2e^{-2x} + 3$.

Q2 ✔ Réponse C

$z - (1 - 2i) = e^{i\theta}$, donc $|z - (1 - 2i)| = 1$; quand θ décrit $\mathbb{R}$, $e^{i\theta}$ décrit tout le cercle unité. (E) est le cercle de centre d'affixe $1 - 2i$ et de rayon 1.

Q3 ✔ Réponse B

Factorisation par l'angle moitié :

$$1 + e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}\right) = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}.$$

Q4 ✔ Réponse A

Pour $z \neq 1$ (c'est-à-dire $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$) : $1 + z + z^2 = \dfrac{z^3 - 1}{z - 1} = \dfrac{e^{3i\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1}$. Avec $e^{ia} - 1 = 2i\sin\left(\frac{a}{2}\right)e^{i\frac{a}{2}}$:

$$1 + z + z^2 = \frac{2i\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)e^{i\frac{3\theta}{2}}}{2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}} = \frac{\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}e^{i\theta}.$$

Q5 ✔ Réponse B

Intégration par parties avec $u = \ln x$, $v' = \dfrac{1}{x^2}$ $\left(v = -\dfrac{1}{x}\right)$:

$$I_n = \left[-\frac{\ln x}{x}\right]_1^n + \int_1^n \frac{dx}{x^2} = -\frac{\ln n}{n} + \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{\ln n}{n} - \frac{1}{n}.$$

Q6 ✔ Réponse B

Soit $K = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x}\,dx$. Le changement $x = \frac{\pi}{2} - t$ échange sin et cos, donc $J = K$. Et $J + K = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dx = \frac{\pi}{2}$. Donc $J = \dfrac{\pi}{4}$.

Q7 ✔ Réponse D

$u_n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$ et $n\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \dfrac{\ln(1+h)}{h} \to 1$ avec $h = \frac{1}{n} \to 0$. Donc $l = e^1 = e$.

Q8 ✔ Réponse B

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, donc $u_n = \dfrac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} \to \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$.

Q9 ✔ Réponse A

Nombre de tirages : $\binom{10}{3} = 120$. Tirages favorables : $\binom{7}{2} \times \binom{3}{1} = 21 \times 3 = 63$. Probabilité : $\dfrac{63}{120} = \dfrac{21}{40}$.

Q10.1 ✔ Réponse C

Quand $x \to 0$: $\sin^2 x \to 0$ et $\ln(1 + u) \sim u$, donc $\ln(1 + \sin^2 x) \sim \sin^2 x \sim x^2$. Ainsi $f(x) \sim \dfrac{x^2}{x} = x \to 0$. (La limite est égale à $f(0)$: f est continue en 0.)

Q10.2 ✔ Réponse B

Taux d'accroissement en 0 :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{\ln(1 + \sin^2 x)}{x^2} \sim \frac{\sin^2 x}{x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} 1.$$

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$.

Q10.3 ✔ Réponse C

$x \mapsto \ln(1 + \sin^2 x)$ est π-périodique, mais le facteur $\dfrac{1}{x}$ ne l'est pas : par exemple $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \dfrac{2\ln 2}{\pi}$ alors que $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \dfrac{2\ln 2}{3\pi}$. Plus généralement, $|f(x)| \leq \dfrac{\ln 2}{|x|} \to 0$ en $+\infty$: une fonction périodique qui tend vers 0 serait identiquement nulle, ce qui n'est pas le cas. f n'a pas de période.

Q11 ✔ Réponse A

$\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$, donc

$$\sin^4 x = \frac{1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x}{4} = \frac{1 - 2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}}{4} = \frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}.$$

Remarque : comme cos est paire, la proposition C est exactement la même expression que A.

Remarque : Les propositions A et C sont égales (cos(−4x) = cos 4x et cos(−2x) = cos 2x) : les deux sont justes, alors que le QCM n'accepte qu'une réponse. À trancher par le professeur (garder A comme réponse attendue ou retirer la question).

Q12 ✔ Réponse D

Avec la linéarisation $\sin^4 x = \dfrac{1}{8}\cos 4x - \dfrac{1}{2}\cos 2x + \dfrac{3}{8}$: les intégrales de $\cos 4x$ et de $\cos 2x$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ sont nulles ($\left[\frac{\sin 4x}{4}\right]$ et $\left[\frac{\sin 2x}{2}\right]$ valent 0 aux bornes). Il reste $\dfrac{3}{8} \times \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{3\pi}{16}$.

Q13 ✔ Réponse C

$1 + \cos x = 2\cos^2\dfrac{x}{2}$, donc $\dfrac{1}{1 + \cos x} = \dfrac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}$, dont une primitive est $\tan\dfrac{x}{2}$. L'intégrale vaut $\tan\dfrac{\pi}{4} - \tan 0 = 1$.

Q14 ✔ Réponse D

Les diagonales sont $[MP]$ et $[NQ]$. Avec $\vec{a} = \overrightarrow{MN}$ et $\vec{b} = \overrightarrow{MQ}$: $\overrightarrow{MP} = \vec{a} + \vec{b}$ et $\overrightarrow{QN} = \vec{a} - \vec{b}$, donc

$$MP^2 + NQ^2 = \|\vec{a} + \vec{b}\|^2 + \|\vec{a} - \vec{b}\|^2 = 2\left(\|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2\right) = 2(MN^2 + MQ^2).$$

D est vraie (identité du parallélogramme). A : la somme des poids est nulle, il n'y a pas de barycentre. B : $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QM} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QN} \neq \vec{0}$. C : $MQ^2 - PQ^2 = 4\,\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$, différent de $2\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{MQ}$ en général.

ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES DE SAFI · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année · ENSA Safi

Date : 23/07/2010

2010

Énoncé

Q1 La valeur de $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2^x}{\ln(x^2+1)}$ vaut :

A $+\infty$ B $-\infty$ C 1 D -1

Q2 La limite en $+\infty$ de la fonction f définie sur l'intervalle $\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ par $f(x)=\dfrac{-2x^3+3x}{(2x-1)^3}$ est :

A $+\infty$ B $-\infty$ C -1 D $-\dfrac{1}{4}$

Soit la fonction $f(x)=\dfrac{\cos 3x-\sin 3x}{\cos 3x+\sin 3x}$.

Q3.1 La période de $f(x)$ vaut :

A $\dfrac{2\pi}{3}$ B $\dfrac{\pi}{3}$ C $\dfrac{4\pi}{3}$ D π

Q3.2 La valeur de $f\left(x+\dfrac{\pi}{12}\right)$ est :

A $\tan 3x$ B $\operatorname{cotan} 6x$
C $-\tan 3x$ D $\tan 6x$

Q3.3 La dérivée de $f(x)$ est :

A $-\dfrac{6}{(\cos 3x+\sin 3x)^2}$
B $-\dfrac{6}{(\cos 3x)^2}$
C $\dfrac{-\tan 3x}{(\cos 3x+\sin 3x)^2}$
D $\dfrac{3}{(\cos 3x+\sin 3x)^2}$

Q4 L'équation $e^{2x}-2e^x-3=0$, $x\in\mathbb{R}$, admet pour ensemble solution :

A $S=\{\ln 3,\ln 2\}$ B $S=\{\ln 1,0\}$
C $S=\{\ln 3,2\}$ D $S=\{\ln 3\}$

Q5 L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $(e^x-1)(1-x)\geq 0$ est l'intervalle :

A $]0;+\infty[$ B $[1;2]$
C $]-\infty;1]$ D $[0;1]$

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$u_n=\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}\,dx.$

Q6.1 u_0+u_1 égale à :

A 1 B 0 C -1 D 2

Q6.2 Pour tout entier naturel n non nul u_n+u_{n+1} égale à :

A $\dfrac{1-e^{-n}}{n}$ B $\dfrac{1-e^{-2n}}{2n}$
C $\dfrac{2+e^{-n}}{n}$ D $\dfrac{1-e^{-n}}{2n}$

Q6.3 La valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

A $+\infty$ B 1 C 2 D 0

Q7 La valeur de $\displaystyle\int_0^2 (x+2)e^{-x}\,dx$ est :

A $5e^{-2}-3$ B $-5e^{-2}+1$
C $-5e^{-2}$ D $-5e^{-2}+3$

Q8 Soit f la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x)=3\ln x-2x+5$.
Dans le plan muni d'un repère, la tangente à la courbe représentative de la fonction f en son point d'abscisse 1 admet pour équation :

A $y=x+2$ B $y=-x+4$
C $y=3x+1$ D $y=x+3$

Q9 La valeur du déterminant $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \end{vmatrix}$ vaut :

A $(a+b+c)(2a-b)$
B $(a+b+c)^2$
C $(a+b+c)(2a-c)$
D $(a+b+c)^3$

Q10 Le nombre -3 est solution de l'équation :

A $\ln x=-\ln 3$ B $\ln(e^x)=-3$
C $e^{\ln x}=-3$ D $e^x=-3$

Q11 A et B sont deux événements indépendants et on sait que $p(A)=0{,}5$ et $p(B)=0{,}2$. La probabilité de l'événement $A\cup B$ est égale à :

A $0{,}1$
B $0{,}7$
C $0{,}6$
D on ne peut pas savoir

Q12 Dans un magasin, un bac contient des cahiers soldés. On sait que 50% des cahiers ont une reliure spirale et que 75% des cahiers sont à grands carreaux. Parmi les cahiers à grands carreaux, 40% ont une reliure spirale. Saïd choisit au hasard un cahier à reliure spirale. La probabilité qu'il soit à grands carreaux est égale à :

A $0{,}3$ B $0{,}6$ C $0{,}5$ D $0{,}75$

Q13 On note X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ (λ étant un nombre réel strictement positif). La probabilité de l'événement $[1\leq X\leq 3]$ est égale à :

A $e^{-\lambda}-e^{-3\lambda}$ B $e^{-3\lambda}-e^{-\lambda}$
C $\dfrac{e^{-\lambda}}{e^{-3\lambda}}$ D $\dfrac{e^{-3\lambda}}{e^{-\lambda}}$

Q14 L'équation différentielle $y'+y=e^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$, admet pour solution la fonction u définie par :

A $u(x)=(x-1)e^{-x}$
B $u(x)=xe^{-x}+1$
C $u(x)=e^{-x}$
D $u(x)=xe^{-x}$

Q15 Soit l'équation différentielle $y''-25y=0$, où y est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels. La fonction f, solution de l'équation différentielle précédente, qui vérifie les conditions $f(\pi)=-\sqrt{3}$ et $f'(\pi)=5$, est définie par :

A $\sqrt{3}\cos 5x-\sin 5x$
B $\cos 15x-\sin 5x$
C $\cos 5x+\sqrt{3}\sin 5x$
D $\sqrt{3}\cos 10x-\sin 10x$

Q16 La fonction f_k définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par $f_k=(x+k)e^{-x}$ où k est un nombre réel donné. La fonction f_k admet un maximum en :

A $x=1-k$ B $x=1+k$
C $x=1-2k$ D $x=-2k$

ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES DE SAFI · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année · ENSA Safi

Date : 23/07/2010

2010

Correction

Q1	Q2	Q3.1	Q3.2	Q3.3	Q4	Q5	Q6.1	Q6.2	Q6.3	Q7	Q8	Q9	Q10
A	D	B	C	A	D	D	A	A	D	D	A	D	B

Q11	Q12	Q13	Q14	Q15	Q16
C	B	A	AD	A	A

Q1 ✔ Réponse A

$2^x = e^{x\ln 2}$ l'emporte sur $\ln(x^2+1) \sim 2\ln x$: la limite est $+\infty$.

Q2 ✔ Réponse D

$$f(x) \sim \frac{-2x^3}{8x^3} = -\frac{1}{4}.$$

Q3.1 ✔ Réponse B

En divisant par $\cos 3x$: $f(x) = \dfrac{1-\tan 3x}{1+\tan 3x} = \tan\left(\dfrac{\pi}{4} - 3x\right)$, de période $\dfrac{\pi}{3}$.

Q3.2 ✔ Réponse C

$f\left(x+\frac{\pi}{12}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4} - 3x - \frac{\pi}{4}\right) = \tan(-3x) = -\tan 3x.$

Q3.3 ✔ Réponse A

Avec $c = \cos 3x$, $s = \sin 3x$:

$$f'(x) = \frac{-3(s+c)(c+s) - 3(c-s)(c-s)}{(c+s)^2} = \frac{-3\cdot 2}{(c+s)^2} = -\frac{6}{(\cos 3x + \sin 3x)^2}.$$

Q4 ✔ Réponse D

$(e^x-3)(e^x+1) = 0$ et $e^x > 0$: $e^x = 3$, $x = \ln 3$.

Q5 ✔ Réponse D

$e^x - 1$ a le signe de x, $1-x$ celui de $1-x$: le produit est ≥ 0 sur $[0;1]$.

Q6.1 ✔ Réponse A

$$u_0 + u_1 = \int_0^1 \frac{1+e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx = 1.$$

Q6.2 ✔ Réponse A

$$u_n + u_{n+1} = \int_0^1 \frac{e^{-nx}(1+e^{-x})}{1+e^{-x}}\,dx = \int_0^1 e^{-nx}\,dx = \frac{1-e^{-n}}{n}.$$

Q6.3 ✔ Réponse D

$$0 \leq u_n \leq \int_0^1 e^{-nx}\,dx = \frac{1-e^{-n}}{n} \to 0.$$

Q7 ✔ Réponse D

Une primitive de $(x+2)e^{-x}$ est $-(x+3)e^{-x}$:

$$\left[-(x+3)e^{-x}\right]_0^2 = -5e^{-2} + 3.$$

Q8 ✔ Réponse A

$f(1) = 3$ et $f'(x) = \dfrac{3}{x} - 2$, $f'(1) = 1$: $y = (x-1) + 3 = x + 2$.

Q9 ✔ Réponse D

Avec $s = a+b+c$ et $C_1 \leftarrow C_1 - C_3$, $C_2 \leftarrow C_2 - C_3$:

$$\begin{vmatrix} -s & 0 & 2a \\ 0 & -s & 2b \\ 0 & 0 & s \end{vmatrix} = (-s)(-s)(s) = s^3.$$

Q10 ✔ Réponse B

$\ln(e^x) = x$, donc $x = -3$. (A, C demandent $x > 0$; $e^x > 0$.)

Q11 ✔ Réponse C

$p(A \cup B) = 0{,}5 + 0{,}2 - 0{,}5 \times 0{,}2 = 0{,}6.$

Q12 ✔ Réponse B

$p(S \cap G) = 0{,}75 \times 0{,}4 = 0{,}3$ et $p_S(G) = \dfrac{0{,}3}{0{,}5} = 0{,}6.$

Q13 ✔ Réponse A

$$p(1 \leq X \leq 3) = \int_1^3 \lambda e^{-\lambda t}\,dt = e^{-\lambda} - e^{-3\lambda}.$$

Q14 ✔ Réponse AD

Les solutions sont $u(x) = (x+C)e^{-x}$: xe^{-x} ($C=0$) et $(x-1)e^{-x}$ ($C=-1$) conviennent toutes les deux.

Q15 ✔ Réponse A

Telle qu'imprimée, $y'' - 25y = 0$ a des solutions exponentielles $ae^{5x} + be^{-5x}$, et aucune proposition ne convient. Les propositions correspondent à $y'' + 25y = 0$ (coquille probable) : $f = a\cos 5x + b\sin 5x$, $f(\pi) = -a = -\sqrt{3}$ et $f'(\pi) = -5b = 5$, d'où $f(x) = \sqrt{3}\cos 5x - \sin 5x$.

Q16 ✔ Réponse A

$f_k'(x) = (1-x-k)e^{-x}$: positive puis négative, f_k admet un maximum en $x = 1-k$.

ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES DE MARRAKECH · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année · ENSA Marrakech

Session du 8 août 2011

2011 Énoncé

Q1 Une seule des égalités suivantes est exacte :

A $\displaystyle\int_k^2 \ln\left(\frac{x-1}{x}\right)dx = -2\ln 2 + \ln(k-1)$ où $k \in]1;2[$

B $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^3 x\,dx = \frac{3\sqrt{3}}{11}$

C $\displaystyle\int_{-2}^{0}\left(|x+1| + \frac{4}{x-1}\right)dx = 1 - 4\ln 3$

D $\displaystyle\int_0^2 (x-2)e^{2x+1}\,dx = \frac{5}{4}e - \frac{13}{7}e^5$

Q2 Pour tout réel x, on pose $G(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$

A G est une fonction paire

B G est croissante sur $\left[0;\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$

C G est croissante sur $\left[\frac{1}{\sqrt{2}};+\infty\right[$

D $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = 1$

Q3 Une grandeur y décroît au cours du temps t selon la loi $y(t) = y_0 2^{-t}$, où y_0 désigne la valeur initiale en $t = 0$.
La valeur moyenne de y entre les instants 0 et T.

A $(1 - 2^{-T})$

B $T\ln 2$

C $\frac{y_0}{\ln 2}(1 - 2^{-T})$

D $\frac{y_0}{T\ln 2}(1 - 2^{-T})$

Q4 Soit la fonction $f(x) = \ln|e^x - e^{2x}|$

A La fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$

B La fonction f est strictement croissante sur $\left]0;\frac{1}{2}\right[$

C $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

D La droite d'équation $y = 3x$ est asymptote à la courbe C représentative de f quand $x \to +\infty$

Q5 En quel(s) points(s) la courbe $y = \sqrt{2x} + \sqrt{\frac{2}{x}}$ admet-elle une tangente parallèle à l'axe des abscisses ?

A aucun B $(2;3)$ C $(1;2\sqrt{2})$ D $(8;6)$

Q6 Soit la fonction $f(x) = \frac{x^2}{x-1}e^{\frac{1}{x}}$

A La droite d'équation $y = x + 2$ est asymptote oblique à la courbe C représentative de f quand $x \to +\infty$

B La fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$.

C f est impaire

D La fonction f est strictement croissante sur $]1;+\infty[$.

Q7 La contraposée de la proposition suivante :
$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x > y \Longrightarrow f(x) = f(y)$

A $\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ f(x) = f(y)$ *ou* $x \le y$

B $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ f(x) \neq f(y) \Longrightarrow x \le y$

C $\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ f(x) = f(y)$ *et* $x \le y$

D $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x > y \Longrightarrow f(x) \neq f(y)$

Q8 La négation de la proposition suivante :
$\forall a \in \mathbb{R},\ \forall b \in \mathbb{R},\ a \le b \Longrightarrow f(a) \ge f(b)$

A $\forall a \in \mathbb{R},\ \forall b \in \mathbb{R}/(a \le b \Longrightarrow f(a) \ge f(b)$

B $\exists a \in \mathbb{R},\ \exists b \in \mathbb{R}/(a \le b$ *ou* $f(a) < f(b)$

C $\exists a \in \mathbb{R},\ \exists b \in \mathbb{R}/(a \le b$ *et* $f(a) < f(b)$

D $\exists a \in \mathbb{R},\ \exists b \in \mathbb{R}/(a > b$ *et* $f(a) < f(b)$

Q9 On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(1+u_n) \end{cases}$

A $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \le 0$

B la suite (u_n) est strictement croissante

C la suite (u_n) est décroissante

D $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 1$

Q10 L'ensemble S des solutions réelles du système suivant : $\begin{cases} 2^{\frac{1}{x}}2^{\frac{1}{y}} = 32 \\ 2^x 2^y = \sqrt[6]{32} \end{cases}$

A $S = \left\{\left(\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right);\left(\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right)\right\}$

B $S = \left\{\left(\frac{1}{5};\frac{1}{3}\right)\right\}$

C $S = \left\{\left(\frac{1}{5};\frac{2}{3}\right);\left(\frac{3}{4};\frac{1}{2}\right)\right\}$

D $S = \left\{\left(\frac{2}{3};\frac{1}{2}\right);\left(\frac{1}{4};\frac{3}{5}\right)\right\}$

Q11 En effectuant une division, déterminer les paramètres a et b pour que le polynôme $A = x^3 + ax + b$ soit divisible par $B = x^2 - 3x + 2$

A $a = 4$ et $b = 2$

B $a = 7$ et $b = 2$

C $a = 6$ et $b = -3$

D $a = -7$ et $b = 6$

Q12 Deux tireurs A et B font feu simultanément sur une cible. La probabilité pour A de toucher la cible est estimée à $\frac{4}{5}$; la probabilité pour B est de $\frac{3}{4}$.
La probabilité que la cible soit atteinte est :

A $\frac{7}{20}$ B $\frac{19}{20}$ C $\frac{12}{20}$ D $\frac{1}{20}$

Q13 Une urne contient y boules dont 3 sont blanches, les autres étant rouges. A l'occasion du tirage, sans remise, de deux boules, la probabilité d'obtenir une boule blanche puis une boule rouge est égale à $\frac{1}{4}$. Calculer y :

A $y = 8$

B $y = 12$

C $y = 4$ ou $y = 9$

D $y = 12$ ou $y = 8$

Q14 De combien de manières différentes un professeur peut-il choisir un ou plusieurs élèves parmi 6 ?

A 55 B 6 C 63 D 48

Q15 Le prix d'un article a subi trois baisses successives de 20%. De quel pourcentage ce prix a-t-il diminué au total ?

A 60% B 48,8% C 44,6% D 52,5%

ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES DE MARRAKECH · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'accès en 1re année · ENSA Marrakech

Session du 8 août 2011

2011 Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14	Q15
C	B	D	B	C	A	B	C	C	A	D	B	C	C	B

Q1 ✔ Réponse C

- C : $\int_{-2}^{0} |x+1|\,dx = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$ (deux triangles) et $\int_{-2}^{0} \frac{4}{x-1}\,dx = 4\left[\ln|x-1|\right]_{-2}^{0} = 4(0-\ln 3)$. Total : $1-4\ln 3$. **Vraie.**
- B : $\cos^3 x = \cos x(1-\sin^2 x)$, primitive $\sin x - \frac{\sin^3 x}{3}$; l'intégrale vaut $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{8} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$, pas $\frac{3\sqrt{3}}{11}$.
- D : une primitive est $\frac{(2x-5)e^{2x+1}}{4}$, d'où $\frac{5}{4}e - \frac{1}{4}e^5$.
- A : une primitive est $(x-1)\ln(x-1) - x\ln x + 1$, d'où $-2\ln 2 + k\ln k - (k-1)\ln(k-1)$, différent de $-2\ln 2 + \ln(k-1)$ (par exemple pour $k=\frac{3}{2}$).

Q2 ✔ Réponse B

Avec $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$:
$G'(x) = 2f(2x) - f(x) = \frac{2}{\sqrt{16x^4+4x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$.
$G'(x) \geq 0 \iff 4(x^4+x^2+1) \geq 16x^4 + 4x^2 + 1 \iff 3 \geq 12x^4 \iff |x| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$.
Donc G est croissante sur $\left[0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ (B) et décroissante ensuite (C fausse).
A : f est paire, donc G est impaire (et non nulle). D : pour $t \geq x > 0$, $f(t) \leq \frac{1}{t^2}$, donc $0 \leq G(x) \leq \int_x^{2x} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{2x} \to 0$.

Q3 ✔ Réponse D

$2^{-t} = e^{-t\ln 2}$ a pour primitive $-\frac{2^{-t}}{\ln 2}$.
Valeur moyenne :

$$\frac{1}{T}\int_0^T y_0 2^{-t}\,dt = \frac{y_0}{T}\cdot\frac{1-2^{-T}}{\ln 2} = \frac{y_0}{T\ln 2}\left(1-2^{-T}\right).$$

C est l'intégrale elle-même, sans la division par T.

Q4 ✔ Réponse B

f est définie pour $x \neq 0$ et $f(x) = x + \ln|1-e^x|$.
- Sur $]0;+\infty[$: $f(x) = x + \ln(e^x - 1)$, $f'(x) = 1 + \frac{e^x}{e^x-1} > 0$: B est vraie.
- Sur $]-\infty;0[$: $f'(x) = 1 - \frac{e^x}{1-e^x} = \frac{1-2e^x}{1-e^x}$, positive pour $x < -\ln 2$: A est fausse.
- C : $f(x) = x + \ln(1-e^x) \to -\infty$.
- D : $f(x) = 2x + \ln(1-e^{-x})$, l'asymptote est $y = 2x$.

Q5 ✔ Réponse C

Pour $x > 0$: $y = \sqrt{2}\left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right)$, donc

$$y' = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x\sqrt{x}}\right) = \frac{\sqrt{2}\,(x-1)}{2x\sqrt{x}}.$$

$y' = 0 \iff x = 1$, et
$y(1) = \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$: point $(1; 2\sqrt{2})$.

Q6 ✔ Réponse A

- A : $\frac{x^2}{x-1} = x+1+\frac{1}{x-1}$ et $e^{\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$. Le produit vaut $x+1+1+o(1) = x+2+o(1)$: $y = x+2$ est asymptote. **Vraie.**
- Dérivée : $f'(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}\left(x^2-3x+1\right)}{(x-1)^2}$.
  Sur $]-\infty;0[$, $x^2-3x+1 > 0$: f est croissante (B fausse). Sur $\left]1; \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right[$, $x^2-3x+1 < 0$: f décroît (D fausse).
- C : f n'est pas définie en 1 mais l'est en -1 : elle ne peut pas être impaire.

Q7 ✔ Réponse B

La contraposée de « $P \Longrightarrow Q$ » est « non $Q \Longrightarrow$ non P » ; les quantificateurs ne changent pas. Ici :
$\forall x,\ \forall y,\ f(x) \neq f(y) \Longrightarrow x \leq y$.

Q8 ✔ Réponse C

Les $\forall$ deviennent $\exists$, et la négation de « $P \Longrightarrow Q$ » est « P et non Q ». La négation de $f(a) \geq f(b)$ est $f(a) < f(b)$.
On obtient : $\exists a,\ \exists b,\ a \leq b$ et $f(a) < f(b)$.

Q9 ✔ Réponse C

Par récurrence, $u_n > 0$ pour tout n (si $u_n > 0$, alors $1+u_n > 1$ et $\ln(1+u_n) > 0$).
Pour $u > 0$, $\ln(1+u) < u$ (la fonction $u \mapsto u - \ln(1+u)$ est nulle en 0 et croissante). Donc $u_{n+1} < u_n$: la suite est (strictement) décroissante. A est fausse ($u_0 = 1$), D aussi ($u_1 = \ln 2 < 1$).

Q10 ✔ Réponse A

$32 = 2^5$ et $\sqrt[6]{32} = 2^{\frac{5}{6}}$. Le système équivaut à $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} = 5$ et $x+y = \frac{5}{6}$.
$\frac{1}{x}+\frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy}$, donc $xy = \frac{5/6}{5} = \frac{1}{6}$. x et y sont les racines de $t^2 - \frac{5}{6}t + \frac{1}{6} = 0$, soit $6t^2 - 5t + 1 = 0$: $t = \frac{1}{2}$ ou $t = \frac{1}{3}$.
$S = \left\{\left(\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right);\left(\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right)\right\}$.

Q11 ✔ Réponse D

$B = (x-1)(x-2)$: A est divisible par B si et seulement si $A(1) = 0$ et $A(2) = 0$, soit $1+a+b = 0$ et $8+2a+b = 0$. Par différence $7+a = 0$: $a = -7$, puis $b = 6$.
Vérification : $x^3 - 7x + 6 = (x-1)(x-2)(x+3)$.

Q12 ✔ Réponse B

Les deux tirs sont indépendants. La cible n'est pas atteinte si les deux tireurs la manquent : $\frac{1}{5}\times\frac{1}{4} = \frac{1}{20}$. Donc $P(\text{cible atteinte}) = 1 - \frac{1}{20} = \frac{19}{20}$.

Q13 ✔ Réponse C

$P(\text{blanche puis rouge}) = \frac{3}{y}\times\frac{y-3}{y-1} = \frac{1}{4} \iff 12(y-3) = y(y-1) \iff y^2 - 13y + 36 = 0 \iff (y-4)(y-9) = 0$.
Vérification : $y = 4$ donne $\frac{3}{4}\times\frac{1}{3} = \frac{1}{4}$; $y = 9$ donne $\frac{3}{9}\times\frac{6}{8} = \frac{1}{4}$.

Q14 ✔ Réponse C

Un ensemble de 6 élèves a $2^6 = 64$ sous-ensembles ; on retire l'ensemble vide (au moins un élève) : $64 - 1 = 63$.

Q15 ✔ Réponse **B**

Chaque baisse multiplie le prix par $0{,}8$: au total $0{,}8^3 = 0{,}512$. Le prix a diminué de $1 - 0{,}512 = 0{,}488$, soit $48{,}8\ \%$.

ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES DE MARRAKECH · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'entrée en 1re année du cycle préparatoire · ENSA Marrakech

Année 2010–2011

2010 Énoncé

Q1 Soit f la fonction définie, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, par : $f(x) = \dfrac{x \sin x}{1 - \cos x}$. Alors :

- A $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$
- B $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$
- C $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 2$
- D $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -1$

Q2 Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \arctan\left(\dfrac{1}{2x^2}\right) - \arctan\left(\dfrac{x}{x+1}\right) + \arctan\left(\dfrac{x-1}{x}\right)$

- A f est constante égale à 1.
- B f est constante égale à 0.
- C f n'est pas constante.
- D $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{\pi}{4}$

Q3 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n}$, on a alors :

- A $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$
- B $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ln(2)$
- C $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
- D $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$

Q4 Soit $(u_n)_n$ la suite définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1 + u_n^2}$

- A La suite $(u_n)_n$ est croissante et tend vers $+\infty$.
- B La suite $(u_n)_n$ est décroissante et tend vers 0.
- C La suite $(u_n)_n$ est convergente vers 1.
- D $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq \dfrac{1}{2}$.

Q5 On considère l'équation différentielle $(E) : y'' - (1+m)y' + my = 0$.

- A Si $m = 1$ les solutions de (E) sont de la forme $y(t) = \alpha e^t + \beta e^{-t}$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.
- B Si $m \neq 1$ les solutions de (E) sont de la forme $y(t) = \alpha \cos t + \beta \sin(mt)$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.
- C Si $m = 1$ les solutions de (E) sont de la forme $y(t) = (\alpha t + \beta)e^t$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.
- D Si $m = 0$ les solutions de (E) sont de la forme $y(t) = (\alpha t + \beta)e^t$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

Q6 Soit $z = \left(1 + i\sqrt{3}\right)^5 + \left(1 - i\sqrt{3}\right)^5$ alors

- A $z = -32$
- B $z = 16e^{i\frac{5\pi}{3}}$
- C $z = 32$
- D $z = 64e^{i\frac{5\pi}{6}}$

Q7 On note $z_1, \ldots, z_n$ les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $z^n = 1$. On pose $S = z_1 + z_2 + \cdots + z_n$ et $P = z_1 z_2 \ldots z_n$, alors :

- A $S = 0$ et $P = (-1)^{n+1}$
- B $S = 0$ et $P = 1$
- C $S = 1$ et $P = (-1)^n$
- D $S = 1$ et $P = 0$

Q8 Pour $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, on pose $I_{n,m} = \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(nt)\cos(mt)\, dt$.

- A Si $m = n$, $I_{n,m} = \pi$.
- B Si $m \neq n$, $I_{n,m} = 2\pi$.
- C Si $m \neq n$, $I_{n,m} = 0$.
- D Si $m = n$, $I_{n,m} = 2\pi$.

Q9 Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $[a, b]$. Alors :

- A $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\, dt = b - a.$
- B $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\, dt = +\infty.$
- C $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\, dt = 0.$
- D La suite de terme général $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\, dt$ n'a pas de limite lorsque $n \to +\infty$.

Q10 Parmi les ensembles suivants lequel est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

- A $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 - y^2 = 0\}$
- B $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x \geq 0\}$
- C $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x - y + z = 1\}$
- D $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x - y + z = 0\}$

Q11 Soit a, b et c des réels et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors :

- A $A^n = \begin{pmatrix} a^n & b^n \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$
- B $A^n = \begin{pmatrix} a^n & nb^n \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$
- C $A^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$
- D $A^n = \begin{pmatrix} a^n & a^n b^n \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$

Q12 Deux augmentations successives de 10% du prix d'un produit donnent une augmentation de :

- A 20%
- B 12,1%
- C 21%
- D 10%

Q13 Une augmentation de 10% puis une baisse du prix d'un produit de 10% donne :

- A Un prix inchangé.
- B Une baisse de 1%.
- C Une augmentation de 1%.
- D Une variation de 10%.

Q14 Soit $A(2, 1)$, $B(-1, 2)$ et $M(3, 4)$ des points du plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Alors la distance d de M à la droite (AB) vaut :

- A $d = \sqrt{10}$
- B $d = 5$
- C $d = 10$
- D $d = \sqrt{5}$

Q15 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = \left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les points $A(1, 1, 0)$, $B(1, 2, 1)$, $C(3, -1, 2)$ alors :

- A A, B et C sont alignés
- B les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.
- C L'équation du plan contenant les points A, B et C est : $2x + y - z - 3 = 0$
- D Les droites (OA) et (BC) sont parallèles

ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES DE MARRAKECH · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'entrée en 1re année du cycle préparatoire · ENSA Marrakech

Année 2010–2011

2010 — Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14	Q15
C	B	B	B	C	C	A	AC	C	D	C	C	B	A	BC

Q1 ✔ Réponse C

$x \sin x \sim x^2$ et $1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$: la limite vaut 2.

Q2 ✔ Réponse B

Pour $x > 0$:
$\arctan \dfrac{x}{x+1} - \arctan \dfrac{x-1}{x} = \arctan \dfrac{\frac{x}{x+1} - \frac{x-1}{x}}{1 + \frac{x-1}{x+1}} = \arctan \dfrac{1}{2x^2}$,
donc $f = 0$. (En $+\infty$: $0 - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 0$.)

Q3 ✔ Réponse B

$u_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{1 + k/n} \to \int_0^1 \dfrac{dx}{1+x} = \ln 2$ (somme de Riemann).

Q4 ✔ Réponse B

$u_n > 0$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{1+u_n^2} < 1$: décroissante minorée, de limite $\ell = \dfrac{\ell}{1+\ell^2}$, soit $\ell = 0$. ($u_2 = 0{,}4 < \frac{1}{2}$.)

Q5 ✔ Réponse C

Équation caractéristique $r^2 - (1+m)r + m = (r-1)(r-m)$.
Pour $m = 1$, racine double 1 : $y = (\alpha t + \beta)e^t$. (Pour $m = 0$: $y = \alpha e^t + \beta$.)

Q6 ✔ Réponse C

$1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\pi/3}$, donc $z = 2\ \mathrm{Re}\left(32e^{5i\pi/3}\right) = 64 \cos \dfrac{5\pi}{3} = 32$.

Q7 ✔ Réponse A

Pour $n \geq 2$, les racines de $z^n - 1$ ont pour somme 0 (coefficient de z^{n-1} nul) et pour produit $(-1)^n \times (-1) = (-1)^{n+1}$.

Q8 ✔ Réponse AC

$\cos(nt)\cos(mt) = \frac{1}{2}\left[\cos((n+m)t) + \cos((n-m)t)\right]$. Si $m \neq n$: $I = 0$. Si $m = n \neq 0$: $I = \pi$ (2π seulement si $m = n = 0$).

Q9 ✔ Réponse C

Par parties,
$\displaystyle\int f(t)\cos(nt)\,dt = \left[\frac{f(t)\sin(nt)}{n}\right] - \frac{1}{n}\int f'(t)\sin(nt)\,dt$, qui est majoré par $\dfrac{K}{n} \to 0$ (f de classe C^1). (Les bornes 0, 2π du sujet sont à lire a, b.)

Q10 ✔ Réponse D

$2x - y + z = 0$ est un plan vectoriel. (A n'est pas stable par somme, B pas par $\lambda < 0$, C ne contient pas 0.)

Q11 ✔ Réponse C

$A = aI + bN$ avec $N^2 = 0$ et $IN = NI$: binôme, $A^n = a^n I + n a^{n-1} b N$.

Q12 ✔ Réponse C

$1{,}1^2 = 1{,}21$: augmentation de 21%.

Q13 ✔ Réponse B

$1{,}1 \times 0{,}9 = 0{,}99$: baisse de 1%.

Q14 ✔ Réponse A

$(AB) : x + 3y - 5 = 0$. $d = \dfrac{|3 + 12 - 5|}{\sqrt{10}} = \dfrac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$.

Q15 ✔ Réponse BC

$\overrightarrow{AB}(0,1,1)$, $\overrightarrow{AC}(2,-2,2)$: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, droites perpendiculaires. Le plan $2x + y - z - 3 = 0$ contient A, B et C (vérification directe) : C est vraie aussi.

ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES DE MARRAKECH · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'entrée en 1re année du cycle préparatoire · ENSA Marrakech

Session du 24 juillet 2009

2009 — Énoncé

Q1

A $\forall n \in \mathbb{N}^* : n(n+1)(n+2)(n+3)$ est divisible par 22

B $\forall n \in \mathbb{N}^* : n(n+1)(n+2)(n+3)$ n'est pas divisible par 48

C $\forall n \in \mathbb{N}^* : n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$ est divisible par 120

D $\forall n \in \mathbb{N}^* : n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$ n'est pas divisible par 120

Q2 Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = e^{-x}\ln(1+e^x)$

A h est solution de l'équation différentielle $E : y' - y = \dfrac{1}{1+e^x}$

B Si $f - h$ est solution de E alors f est solution de E

C La solution générale de $y' + y = 0$ est $y = ke^x$, $k \in \mathbb{R}$

D La fonction f définie par $f(x) = e^{-x}\ln(1+e^x) + 2e^{-x}$ est solution de E

Q3 Dans une classe, les garçons représentent le quart de l'effectif. Une fille sur trois a eu son permis du premier coup, alors que seulement un garçon sur dix l'a eu du premier coup. On interroge un élève (garçon ou fille) au hasard. La probabilité qu'il ait eu son permis du premier coup est égale à : (résultats arrondis à 10^{-3} près)

A 0,043 B 0,275 C 0,217 D 0,033

Q4 Soit le complexe

$$\omega = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} + i\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

A ω est racine carrée de $\dfrac{1}{\sqrt{2}}(i-1)$

B $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

C ω^2 est solution de l'équation $z^2 - \sqrt{2}z + 1 = 0$

D $\omega^4 = i$

Q5 Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct, on considère les points A, B, C, D d'affixes respectives $z_A = 1+2i$, $z_B = 1+\sqrt{3}+i$, $z_C = 1+\sqrt{3}-i$, $z_D = 1-2i$

A $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{DC}$

B Le triangle ABD est rectangle

C Le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme

D Les points A, B, C, D ne sont pas sur un même cercle

Q6 La limite de la fonction $g(x) = \dfrac{\sin^9 x + \cos^6 x + 1}{e^{-x}+1}$ quand x tend vers $+\infty$ vaut :

A 0 B $+\infty$ C n'existe pas D 1

Q7 Soit la fonction f de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \cos(x)e^{\sin(x)}$

A La fonction f n'est pas périodique

B On a $f'(x) = \left(\cos^2(x) + \sin(x)\right)e^{\sin(x)}$

C Une primitive de f est $F(x) = \sin(x)e^{\sin(x)} - 1$

D L'aire du domaine plan délimité par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2}$ est différente de $e+1$ unités d'aire.

Q8 Indiquer la phrase qui vous semble correcte parmi les phrases suivantes :

A Le produit d'un rationnel et d'un irrationnel est un irrationnel

B La somme de deux nombres irrationnels est irrationnelle

C Le produit de deux nombres irrationnels est irrationnel

D La somme d'un nombre rationnel et d'un irrationnel est irrationnelle

L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$. On considère les points : $A(2;1;-1)$, $B(-1;2;4)$, $C(0;-2;3)$, $D(1;1;-2)$ et le plan P d'équation $x - 2y + z + 1 = 0$.

Q9

A Les points A, B et C définissent un plan

B La droite (AC) est incluse dans le plan P

C Une équation cartésienne du plan (ABD) est : $x + 8y + z - 11 = 0$

D Une représentation paramétrique de la droite (AC) est : $\begin{cases} x = 2k \\ y = 2 + 3k \\ z = 3 - 4k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$

Q10

A Les droites (AB) et (CD) sont orthogonales

B La distance du point C au plan P est égale à $4\sqrt{6}$

C La sphère de centre D et de rayon $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ n'est pas tangente au plan P.

D Le point $E\left(-\dfrac{4}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{5}{3}\right)$ est le projeté orthogonal du point C sur le plan P

Q11 On considère les suites (x_n) et (y_n) définies pour tout entier naturel n non nul par :

$$x_n = \int_0^1 t^n\cos(t)\,dt \text{ et } y_n = \int_0^1 t^n\sin(t)\,dt$$

A La suite (x_n) converge vers $\ell > 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$

B Pour tout entier naturel n non nul, $x_{n+1} = (n+1)y_n + \sin(1)$

C Si on admet que, pour tout entier naturel n non nul, $y_{n+1} = (n+1)x_n - \cos(1)$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} nx_n = \cos(1)$

D Si on admet que, pour tout entier naturel n non nul, $y_{n+1} = (n+1)x_n - \cos(1)$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} ny_n = \cos(1)$

Q12 Soient les deux intégrales définies par : $I = \int_0^\pi e^x\sin(x)\,dx$ et $J = \int_0^\pi e^x\cos(x)\,dx$

A On a $I = -2J$

B On a $I = J + e^\pi + 1$

C On a $I = -\dfrac{1}{2}(1+e^\pi)$

D On a $J = 1 + e^\pi$

Q13

A Si $x = \left[\ln\left(e^{\sqrt{2}}\right)\right]^2 e^{-\ln\left(\frac{1}{2}\right)}$ alors $x = 4$

B Si $x = \ln\left(\dfrac{3^2}{2^3}\right) - 4\ln\left(\sqrt{3}\right)$ alors $x = \ln 8$

C Si $x = \dfrac{\left(\sqrt[4]{4}\right)^2}{\left(\sqrt[4]{3\sqrt{3}}\right)^2\sqrt{\sqrt{3}}}$ alors $x = \dfrac{2}{5}$

D Si $\ln(2x-1) = \ln(x-1)$ alors $x = 0$

Q14 Soit f la fonction définie sur $[0,3]$ par

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \\ -2 & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 4 & \text{si } 2 < x \leq 3 \end{cases} \quad \text{et}$$

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

A $\int_0^3 f(t)\,dt = 4$

B $F(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 3 - 2x & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 9 + 4x & \text{si } 2 < x \leq 3 \end{cases}$

C F est continue sur $[0,3]$.

D F est dérivable sur $[0,3]$.

Q15 Soient les suites numériques (u_n) et (v_n) définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $u_0 = 1$, $u_{n+1} = \dfrac{5u_n + 3}{u_n + 3}$ et $v_n = \dfrac{u_n - 3}{u_n + 1}$

A La suite (u_n) n'est pas bornée

B La suite (v_n) est décroissante

C Pour tout entier $n > 0$, $u_n = \dfrac{3 - 3^n}{1 - 3^n}$

D La suite (u_n) est convergente.

Q16 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = x\sin\left(\dfrac{2}{x}\right)$

A On a $f(x) = 0$ si et seulement s'il existe un entier relatif non nul k tel que $x = \dfrac{1}{k\pi}$

B On a $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$

C On a $f\left(\dfrac{4}{\pi}\right) = \dfrac{4}{\pi}$

D On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$

ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES DE MARRAKECH · ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'entrée en 1re année du cycle préparatoire · ENSA Marrakech

Session du 24 juillet 2009

2009 — Correction

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14
C	AD	B	A	AB	C	D	D	A	D	C	B	A	C

Q15	Q16
D	CD

Q1 ✔ Réponse C

Un produit de 5 entiers consécutifs est divisible par $5! = 120$. (A : $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$; B : $5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 1680 = 48 \times 35$.)

Q2 ✔ Réponse AD

$h'(x) = -h(x) + \dfrac{1}{1+e^x}$: h vérifie $y' + y = \dfrac{1}{1+e^x}$. L'énoncé écrit $y' - y$ (coquille probable). Avec $y' + y$: h est solution (A) et $f = h + 2e^{-x}$ aussi, car $2e^{-x}$ est solution de $y' + y = 0$ (D). La solution générale de $y' + y = 0$ est ke^{-x} (C faux).

Q3 ✔ Réponse B

$P = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{10} + \dfrac{3}{4} \times \dfrac{1}{3} = 0{,}025 + 0{,}25 = 0{,}275.$

Q4 ✔ Réponse A

$\omega = \cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8} = e^{3i\pi/8}$, donc $\omega^2 = e^{3i\pi/4} = \dfrac{i-1}{\sqrt{2}}$.

($\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$; $\omega^4 = -i$; les racines de $z^2 - \sqrt{2}z + 1$ sont $e^{\pm i\pi/4}$.)

Q5 ✔ Réponse AB

$\overrightarrow{AB}(\sqrt{3}, -1)$ et $\overrightarrow{DC}(\sqrt{3}, 1)$: A vraie, C fausse.
$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} = (-\sqrt{3})(-\sqrt{3}) + 1 \times (-3) = 0$: rectangle en B. Les quatre points sont à distance 2 de $\Omega(1, 0)$: D fausse.

Q6 ✔ Réponse C

Le dénominateur tend vers 1 mais $\sin^9 x + \cos^6 x$ oscille : pas de limite.

Q7 ✔ Réponse D

f est 2π-périodique. $f'(x) = (\cos^2 x - \sin x)e^{\sin x}$; une primitive est $e^{\sin x}$. Sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f \geq 0$ et l'aire vaut $e - 1 \neq e + 1$.

Q8 ✔ Réponse D

Si $r + x = q$ rationnel, alors $x = q - r$ serait rationnel. (A : $0 \times \sqrt{2} = 0$; B : $\sqrt{2} + (-\sqrt{2})$; C : $\sqrt{2} \times \sqrt{2}$.)

Q9 ✔ Réponse A

$\overrightarrow{AB}(-3, 1, 5)$ et $\overrightarrow{AC}(-2, -3, 4)$ ne sont pas colinéaires. $C \notin P$ ($0 + 4 + 3 + 1 \neq 0$), A ne vérifie pas l'équation de C, et $(0, 2, 3)$ n'est pas C (D fausse).

Q10 ✔ Réponse D

$d(C, P) = \dfrac{8}{\sqrt{6}} = \dfrac{4\sqrt{6}}{3}$; le projeté est $C - \frac{4}{3}(1, -2, 1) = \left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right)$. $d(D, P) = \dfrac{2}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$: la sphère est tangente (C fausse). $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -25 \neq 0$.

Q11 ✔ Réponse C

$0 \leq x_n \leq \frac{1}{n+1}$: $x_n \to 0$ (A faux). Par parties $x_{n+1} = \sin 1 - (n+1)y_n$ (B faux de signe). Avec la relation donnée : $nx_n = \dfrac{n}{n+1}(y_{n+1} + \cos 1) \to \cos 1$, car $y_n \to 0$. ($ny_n \to \sin 1$.)

Q12 ✔ Réponse B

$J + iI = \displaystyle\int_0^\pi e^{(1+i)x}dx = \frac{-e^\pi - 1}{1+i}$, d'où $I = \dfrac{1+e^\pi}{2}$ et $J = -\dfrac{1+e^\pi}{2}$. Donc $I = J + e^\pi + 1$.

Q13 ✔ Réponse A

$\left(\sqrt{2}\right)^2 \times 2 = 4$. (B donne $-\ln 8$; C donne $\frac{2}{3}$; D n'a pas de solution car il faut $x > 1$.)

Q14 ✔ Réponse C

$\displaystyle\int_0^3 f = 1 - 2 + 4 = 3$. $F(x) = 4x - 9$ sur $]2, 3]$ (B faux). F est continue mais pas dérivable en 1 et 2.

Q15 ✔ Réponse D

$v_{n+1} = \dfrac{1}{3}v_n$, $v_0 = -1$: $v_n = -3^{-n}$ croissante,

$u_n = \dfrac{3 + v_n}{1 - v_n} = \dfrac{3^{n+1} - 1}{3^n + 1} \to 3.$

Q16 ✔ Réponse CD

$f\left(\frac{4}{\pi}\right) = \frac{4}{\pi}\sin\frac{\pi}{2} = \frac{4}{\pi}$. En $+\infty$, $\sin\frac{2}{x} \sim \frac{2}{x}$: $f \to 2$.
$f = 0 \iff x = \frac{2}{k\pi}$ (A faux) et $f \to 0$ en 0 (B faux).