Exercice 1 : (8 points)

Dans cet exercice, on pose $I=[0,+\infty[$ et $J=]0,1[$. Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et f_n la fonction numérique de la variable réelle x définie sur l'intervalle I par : $f_n(x)=\dfrac{x^n-1}{\ln x}$ avec $f_n(0)=0$ et $f_n(1)=n$.

Partie I

0.5 1- a) Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f_n(x)$ et $\lim\limits_{x\to 1} f_n(x)$.

0.25 b) En déduire que f_n est continue sur I.

0.5 2- a) Donner, à l'ordre 2, le développement limité au voisinage de 0 pour chacune des deux fonctions suivantes : $t\mapsto \ln(1+t)$ et $t\mapsto (1+t)^n$.

0.5 b) Montrer qu'à l'ordre 2 et au voisinage de 1, on a :

$$x^n-1-n\ln x=\frac{n^2}{2}(x-1)^2+o\left((x-1)^2\right).$$

0.5 3- a) Montrer que : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f_n(x)-n}{x-1}=\dfrac{n^2}{2}$.

0.5 b) Étudier la dérivabilité de f_n sur I.

0.5 4- a) Montrer que pour tout $x\in I\setminus\{0,1\}$, on a : $f_n'(x)=\dfrac{nx^n\ln x+1-x^n}{x\ln^2(x)}$.

0.5 b) Montrer que pour tout $x\in]0,+\infty[$, on a : $\ln x\le x-1$.

0.5 c) En déduire que pour tout $x\in]0,+\infty[$, on a : $nx^n\ln x\ge x^n-1$.

0.5 5- Montrer que f_n est strictement croissante sur I.

Partie II

Soient F la fonction de la variable réelle t définie par : $F(t)=\int_0^t \dfrac{x^t-1}{\ln x}dx$, et g la fonction définie sur $I\times J$ par : $g(t,x)=\dfrac{x^t-1}{\ln x}$.

0.75 1- Montrer que F est bien définie sur I et calculer $F(0)$.

2- a) Soit $(a,b)\in I^2$ tel que $a<b$.

0.5 Montrer que pour $x\in J$ et pour tout $t\in[a,b]$, on a : $\left|\dfrac{\partial g}{\partial t}(t,x)\right|\le x^a$.

0.5 b) Montrer que F est de classe C^1 sur I.

0.5 c) Calculer $F'(t)$, pour tout $t\in I$.

0.5 d) En déduire que $F(t)=\ln(1+t)$, pour tout $t\in I$.

0.5 3- Calculer l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe de la fonction f_n, les axes du repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ orthonormé et la droite d'équation $x=1$.

www.educaprof.com

Scanné avec CamScanner

Exercice 2 : (3,5 points)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n,

www.educaprof.com

et ψ l'application définie par : $\psi : E_2 \times E_2 \to \mathbb{R}$

$$(P,Q) \mapsto \int_0^1 P(x)Q(x)dx$$

0.25 | 1- Montrer que ψ définit un produit scalaire sur E_2.

2- On pose : $P_0 = 1$, $P_1 = 1-2X$, $Q = X^2$ et $P_2 = -2P_0 + \alpha P_1 + \beta Q$ avec $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$.

0.75 | a) Calculer $\psi(P_0,P_1)$, $\psi(P_0,Q)$ et $\psi(P_1,Q)$.

0.5 | b) Calculer $\|P_0\|$ et $\|P_1\|$, où $\|P\| = \sqrt{\psi(P,P)}$, pour tout $P \in E_2$.

0.5 | c) Trouver α et β pour que la famille (P_0,P_1,P_2) forme une base orthogonale de E_2.

0.5 | d) Déterminer une base orthonormée $B = (L_0,L_1)$ de E_1.

3- Soit h la projection orthogonale de E_2 sur E_1.

0.5 | a) Exprimer $h(Q)$ dans la base B.

0.5 | b) Calculer $d(Q,E_1)$ la distance de Q au plan vectoriel E_1.

Exercice 3 : (4 points)

I - On définit la suite réelle $(a_n)_{n\geq 0}$ par : $a_n = \dfrac{n}{(n+1)!}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

0.25 | 1- Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $a_n = \dfrac{1}{n!} - \dfrac{1}{(n+1)!}$.

0.75 | 2- Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = 1$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n = e-1$ et $\sum_{n=2}^{+\infty} (n+1)(n-1)a_n = e$.

II -On considère une urne contenant initialement une boule blanche et une boule noire.

On effectue des tirages successifs avec remise selon le protocole suivant :

- Si la boule tirée est blanche, elle est remise dans l'urne puis on y ajoute une boule noire.
- Si la boule tirée est noire, le tirage s'arrête.

A chaque instant du tirage, toutes les boules de l'urne sont indiscernables au toucher.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir une boule noire.

0.25 | 1- a) Montrer que l'ensemble des valeurs prises par X est égal à $\mathbb{N}^*$.

0.5 | b) Que représente l'événement $(X=2)$? Calculer $P(X=2)$.

0.5 | 2- a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $P(X=n) = a_n$.

0.5 | b) Montrer que l'espérance $E(X)$ existe et calculer sa valeur.

0.5 | 3- a) Calculer $E((X+1)(X-1))$.

0.75 | b) En déduire que la variance $V(X)$ existe et calculer sa valeur.

Scanné avec CamScanner

Exercice 4 : (4.5 points)

On rappelle que $(M_3(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire et non commutatif et que $(M_3(\mathbb{R}),+,\times)$ est un espace vectoriel réel.

Soient I et A deux matrices définies par : $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ et $A=\begin{pmatrix}0&2&0\\1&0&2\\0&1&0\end{pmatrix}$

et E l'ensemble des matrices de $M_3(\mathbb{R})$ défini par :

$$E=\left\{M=\begin{pmatrix}a+2c&2b&4c\\b&a+4c&2b\\c&b&a+2c\end{pmatrix};(a,b,c)\in\mathbb{R}^3\right\}.$$

Soit f l'application définie par : $f(M)=AM$, pour tout $M\in E$.

0.25 | 1- a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$.

0.5 | b) Vérifier que $A^2=\begin{pmatrix}2&0&4\\0&4&0\\1&0&2\end{pmatrix}$ et $A^3=4A$.

0.5 | c) Montrer que la famille $B=(I,A,A^2)$ est une base de E.

0.25 | 2- a) Montrer que f est un endomorphisme de E.

0.25 | b) Déterminer la matrice F de f dans la base B.

0.5 | 3- Montrer que $f^3=4f$ et en déduire que si λ une valeur propre de f alors $\lambda^3=4\lambda$.

0.75 | 4- a) Calculer $f(4I-A^2)$, $f(2A+A^2)$ et $f(2A-A^2)$.

0.25 | b) En déduire que f est diagonalisable.

0.25 | c) L'endomorphisme f est-il bijectif ? A justifier.

0.5 | 5- Déterminer une base de $\mathrm{Im}\,f$ et une base de $\mathrm{Ker}f$.

| 6- Soit S l'ensemble de solutions de l'équation : $f(M)=A+A^2$, d'inconnue $M\in E$.

0.25 | a) Montrer que $S\neq\varnothing$.

0.25 | b) Résoudre l'équation $f(M)=A+A^2$.

Scanné avec CamScanner