Exercice 1

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{2x^2 - 7x + 3}{x - 3} \; ; x \neq 3 \\ f(3) = 5 \end{cases}$$

Montrer que f est continue en 3.

Exercice 2

f est la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x^4 - 1} \; ; x \neq 1 \\ f(1) = \dfrac{-1}{4} \end{cases}$$

f est-elle continue en 1 ?

Exercice 3

f est la fonction définie sur $[-1; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{3 - x}{\sqrt{x+1} - 2} \; ; x \neq 3 \\ f(3) = -4 \end{cases}$$

1) Montrer que, pour tout x de $[-1; 3[\cup]3; +\infty[$ on a : $\dfrac{3 - x}{\sqrt{x+1} - 2} = -\sqrt{x+1} - 2$

2) Etudier la continuité de f en 3.

Exercice 4

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+3} - 2}{x^2 - x} \quad si \;\; x \neq 1 \\ f(1) = \dfrac{-1}{2} \end{cases}$$

Etudier la continuité de f en 1.

Exercice 5

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x-1} \quad si \;\; x \geq 2 \\ f(x) = \dfrac{4}{x^2} \quad si \;\; x < 2 \end{cases}$$

Etudier la continuité de f en 2.

Exercice 6

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{x^2 - 2x - 3} \quad si \;\; x < -1 \\ f(x) = \sqrt{x+1} \quad si \;\; x \geq -1 \end{cases}$$

f est-elle continue en -1 ?

Exercice 7

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{\sqrt{x} - 1} \quad si \;\; x > 1 \\ f(x) = mx^2 + 1 \quad si \;\; x \leq 1 \end{cases}$$

Déterminer le réel m pour que f soit continue en 1.

Exercice 8

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x+7}{x+1} \quad si \;\; x \geq 1 \\ f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} \quad si \;\; x < 1 \end{cases}$$

1) Montrer que f est continue en 1.

2) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1} \quad si \;\; x > 1 \\ f(x) = \dfrac{8}{x^2 + 1} \quad si \;\; x \leq 1 \end{cases}$$

Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

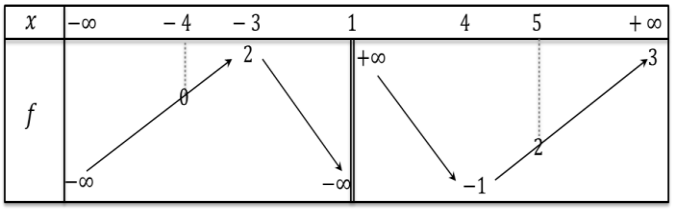
$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{3 - x} \quad si \;\; x \leq 2 \\ f(x) = 1 - ax^2 \quad si \;\; x > 2 \end{cases}$$

1) Montrer que f est continue sur $]-\infty; 2]$ et sur $]2; +\infty[$.

2) Déterminer le réel a pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11

f est une fonction définie et continue sur les deux intervalles $]-\infty; 1[$ et $]1; +\infty[$ dont son tableau de variations est :



Déterminer les images par la fonction f des intervalles suivants :

$]-\infty; -3]$; $[5; +\infty[$; $[-3; 1[$; $]1; 4]$ et $]1; +\infty[$.

Exercice 12

g est une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$ dont son tableau de variations est :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
g	6	↘		↘	3	↗	$+\infty$
			4				

1) Déterminer les images des intervalles suivants par la fonction g :
$]-\infty;2]$; $[2;+\infty[$ et $[-2;2]$.
2) Déterminer le signe de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

Exercice 13

h est une fonction continue sur l'intervalle $]-\infty;6]$ dont son tableau de variations est :

x	$-\infty$		-2		6
h	$+\infty$	↘	0	↘	-4

1) Déterminer l'image de l'intervalle $]-\infty;6]$ par la fonction h .
2) Déterminer le signe de la fonction h sur $]-\infty;6]$.

Exercice 14

Le tableau de variations ci-dessous est celui d'une fonction f définie et continue sur l'intervalle $[-3;2]$.

x	-3		0		2
f	2	↘	1	↘	-2

1) Expliquer pourquoi il existe un réel α unique tel que $\alpha \in]-3;0[$ et $f(\alpha)=1{,}5$.
2) Expliquer pourquoi, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution β, tel que $\beta \in]0;2[$.

Exercice 15

Montrer que l'équation $f(x)=0$ a au moins une solution sur l'intervalle I.

1) $f(x)=x^3-2x^2+x+2$; $I=\left]-1;\frac{-1}{2}\right[$
2) $f(x)=x^4+2x^3-3$; $I=]-2;2[$
3) $f(x)=\sqrt{x^3+1}-2x$; $I=]0;1[$

Exercice 16

Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution sur l'intervalle I.

1) $f(x)=\cos x-x$; $I=\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$
2) $f(x)=-x^5-x+3$; $I=\left]1;\frac{3}{2}\right[$
3) $f(x)=x^2+x-\frac{1}{x}-10$; $I=]2;3[$

Exercice 17

Montrer que l'équation $\sqrt{x}=\frac{5}{x-2}$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]4;5[$.

Exercice 18

1) Montrer que l'équation $2x^3+3x^2=2$ a une solution unique α sur l'intervalle $]0;1[$.
2) Donner un encadrement de α d'amplitude 25×10^{-2}.

Exercice 19

f est la fonction définie sur $[2;+\infty[$ par :
$f(x)=x^2-4x+3$

1) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
2) Montrer que $\forall x\in J:\ f^{-1}(x)=2+\sqrt{x+1}$.

Exercice 20

f est la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{2x+3}{x-1}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2) Soit h la restriction de f sur l'intervalle $]-\infty;1[$.
   a – Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J qu'on déterminera.
   b – Montrer que $\forall x\in J:\ h^{-1}(x)=\dfrac{x+3}{x-2}$

Exercice 21

f est une fonction définie par : $f(x)=\sqrt{2x+1}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
3) Montrer que $\forall x\in J:\ f^{-1}(x)=\dfrac{x^2-1}{2}$

Exercice 22

f est la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} \; ; x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Montrer que f est continue en 0.

Exercice 23

1) a- Montrer que l'équation $x^5 + 8x^3 - 8 = 0$ admet une solution unique α sur $]0;1[$.

b- Vérifier que : $\sqrt[3]{\alpha^2+8} = \frac{2}{\alpha}$

2) f est la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt[3]{x^2+8} \; ; \; x \leq \alpha \\ f(x) = \dfrac{2}{x} \; ; \; x > \alpha \end{cases}$$

Etudier la continuité de f en α.

Exercice 24

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction continue et définie de $[a;b]$ à valeur dans $[a;b]$.

Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[a;b]$.

Exercice 25

Soit f une fonction définie et continue sur l'intervalle $[0;1]$ tel que : $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.

Montrer qu'il existe un nombre c de l'intervalle $]0;1[$ vérifiant : $f(c) = \dfrac{1-c}{1+c}$.

Exercice 26

Ranger dans l'ordre croissant les nombres suivants :

- $\sqrt[4]{5}$; $\sqrt[3]{4}$ et $\sqrt{3}$
- $\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{3}$ et $\sqrt{\sqrt[3]{6}}$

Exercice 27

Simplifier les expressions suivantes :

$$A = \frac{\sqrt{\sqrt{\sqrt{16}} \times \sqrt[3]{2}}}{\sqrt[4]{8} \times \sqrt[12]{2}} \quad ; \quad B = \frac{\sqrt[4]{9} \times \sqrt{\sqrt[3]{3\sqrt[3]{9}}}}{\sqrt[6]{81} \times \sqrt{\sqrt[3]{9}}}$$

$$C = \sqrt{2} \times \left(\sqrt{7+\sqrt{3}} - \sqrt[4]{7-\sqrt{3}} \right)$$

Exercice 28

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 1 + \dfrac{\sqrt[3]{x^2+1}-1}{x} ; x \neq 0 \\ f(0) = 2 \end{cases}$$

1) Déterminer $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition de f.

2) Calculer : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

3) Etudier la continuité de f en 0.

Exercice 29

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$x^3 + 8 = 0$; $x^6 - 3x^3 - 4 = 0$

$\sqrt[3]{x} - \sqrt{x} = 0$; $\sqrt[3]{1-\sqrt{x}} = \sqrt[6]{x}$

$\sqrt[3]{(3+x)^2} + \sqrt[3]{(3-x)^2} = 2\sqrt[3]{9-x^2}$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$\sqrt[3]{x+5} < 2$; $\sqrt[3]{x^2-8} \leq x-2$

Exercice 30

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1} \quad ; \quad \lim_{x \to 8} \frac{\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt[3]{x+56}-4}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3+x+1}}{x} \quad ; \quad \lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x^2+1} - \sqrt{x}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x^3+x+3} - 2\sqrt[3]{x^3+1}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x^3+x+1} - x$$

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x^3+1} - \sqrt{x^2-1}$$

Exercice 31

Soit f la fonction définie sur $I =]2;+\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x-2}}$$

1) Montrer que f admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J que l'on déterminera.

2) Calculer $f^{-1}(x)$ pour tout x de J.

3) Calculer $\sqrt{\dfrac{f^{-1}(x)+2}{f^{-1}(x)-2}}$ pour tout x de J.

Exercice 32

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = 2\sqrt{x} - x & \text{si } x \in [0;1] \\ f(x) = x - \sqrt{x^2 - x} & \text{si } x \in]-\infty;0[\cup]1;+\infty[\end{cases}$$

1) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{1}{2}$

et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

2) Etudier la continuité de f en 0 et en 1.

3) Soit g la restriction de f sur l'intervalle $[0;1]$.

a- Vérifier que : $g(x) = 1 - (\sqrt{x} - 1)^2$.

b- Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J qu'on déterminera.

c- Calculer $g^{-1}(x)$ pour tout x de J.

Exercice 33

Soit f la fonction définie sur $I = [4;+\infty[$ par :

$$f(x) = -\frac{x^2}{4} + x\sqrt{x} - x + 1$$

1) a- Vérifier que pour tout x de I :

$$f(x) = 1 - \frac{1}{4}(x - 2\sqrt{x})^2$$

b – Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

2) a- Sachant que pour tout x de I :

$$f'(x) = -\frac{1}{2}(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 2)$$

Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle I.

b – Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle I, puis vérifier que : $\frac{64}{9} < \alpha < \frac{121}{16}$

3) a- Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $J =]-\infty;1]$.

b – Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout x de J.

c – En déduire que $\alpha = 4 + 2\sqrt{3}$.

Exercice 34

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{1 - \sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt[3]{x}}$

1) Déterminer $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition de f.

2) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

3) Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout x de J.

4) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0;1[$.

Exercice 35

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \sqrt{\left(4 - \sqrt[3]{x^2}\right)^3}$$

1) Déterminer $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition de f.

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = x$.

3) Soit g la restriction de f sur l'intervalle $[0;8]$.

a- Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J qu'on déterminera.

b- Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout x de J.

Exercice 36

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x-1)^3 + 1$$

1) Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

3) Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout x de J.

Exercice 37

Soit f la fonction définie sur $I = [2;+\infty[$ par :

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{x-2}}\right)^2$$

1) Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)$

2) Montrer que : $2 < x \leq 3 \Rightarrow 1 - \dfrac{1}{\sqrt[3]{x-2}} \leq 0$

3) Montrer que f est strictement décroissante sur $]2;3]$.

4) Soit g la restriction de f sur l'intervalle $]2;3[$.

a- Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J qu'on déterminera.

b- Calculer $g^{-1}(x)$ pour tout x de J.