Exercice 1

Calculer les intégrales suivantes :

$\int_2^0 (x^2-3)\,dx$; $\int_1^4 \sqrt{x}(3-x)\,dx$

$\int_1^4 \sqrt{x+3}\,dx$; $\int_0^{2\sqrt{2}} \frac{6x}{\sqrt{x^2+1}}dx$

$\int_1^3 (2x-1)e^{x^2-x}\,dx$; $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx$

$\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x-1}$; $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$

$\int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{1}{x}|\ln x|\,dx$; $\int_{-1}^{2} (|x|+|x^2-1|)\,dx$

$\int_0^{\pi} \cos x \sin^5 x\,dx$; $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x+\sin x)^2\,dx$

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{2x^3-4x^2+2x-3}{(x-1)^2}$

1. Vérifier que pour tout x de $]1;+\infty[$:

$$f(x)=2x-\frac{3}{(x-1)^2}$$

2. En déduire la valeur de l'intégrale :

$$\int_2^3 \frac{2x^3-4x^2+2x-3}{(x-1)^2}dx$$

Exercice 3

1. Déterminer les réels a et b tels que :

$\frac{2x+3}{x^2+2x}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x+2}$ pour tout x de $\mathbb{R}-\{-2;0\}$

2. En déduire la valeur de l'intégrale :

$$\int_1^2 \frac{2x+3}{x^2+2x}dx$$

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=x\sin x$$

1. Montrer que pour tout réel x :

$$f(x)=2\cos x-f''(x)$$

2. En déduire la valeur de l'intégrale :

$$\int_0^{\pi} x\sin x\,dx$$

Exercice 5

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\sin^4 x$$

1. Exprimer $\sin^2 x$ ainsi que $\cos^2 x$ en fonction de $\cos(2x)$.

2. Exprimer $\sin^4 x$ en fonction de $\cos(2x)$ et $\cos(4x)$.

3. Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{8}} f(x)\,dx$.

Exercice 6

On considère les deux intégrales :

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}dx \quad \text{et} \quad J=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4 x}dx$$

1. Calculer I.

2. Soit f la fonction définie sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ par :

$$f(x)=\frac{\sin x}{\cos^3 x}$$

2. a. Montrer que,

$$\forall x\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right] : f'(x)=\frac{3}{\cos^4 x}-\frac{2}{\cos^2 x}$$

2. b. Montrer que : $3J-2I=2$.

2. c. En déduire la valeur de J.

Exercice 7

1. Résoudre le système : $\begin{cases} x+y=\frac{\pi}{4} \\ x-y=\frac{1}{2}\ln 2 \end{cases}$.

2. On pose : $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\cos x+\sin x}dx$

et $J=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x+\sin x}dx$

2. a. Calculer : $I+J$ et $I-J$.

2. b. En déduire les valeurs exactes de I et J.

Exercice 8

En utilisant une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

$\int_1^e \ln x\, dx$; $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^3} dx$

$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$; $\int_0^{\ln 2} e^{-x} \ln(1+e^x)\, dx$

Exercice 9

En utilisant une double intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

$\int_0^1 x^2 e^{-x}\, dx$; $\int_1^e (\ln x)^2\, dx$

$\int_0^{\pi} e^x \cos x\, dx$; $\int_1^{e^{\pi}} \sin(\ln x)\, dx$

Exercice 10

1. Déterminer trois réels a, b et c tels que :
$\frac{2x^2+3x}{x+2} = ax + b + \frac{c}{x+2}$ pour tout $x \neq -2$
2. Calculer l'intégrale : $I = \int_0^2 \frac{2x^2+3x}{x+2} dx$.
3. Calculer l'intégrale :
$$J = \int_0^2 (4x+3)\ln(x+2)\, dx$$

Exercice 11

1. Montrer que : $\frac{9}{4} \leq \int_0^9 \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx \leq 9$.
2. Montrer que : $1 \leq \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx \leq 2$.
3. Montrer que : $0 \leq \int_1^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx \leq \frac{\pi}{2} - 1$.

Exercice 12

Pour tout entier naturel n non nul, on pose :
$$I_n = \int_0^1 x^n e^x\, dx$$
1. Calculer I_1.
2. À l'aide d'une intégration par partie, montrer que : $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$
3. Calculer I_2 et I_3.
4. Déduire la valeur de l'intégrale :
$$I = \int_0^1 (x^3 + 2x^2 - 2x)e^x\, dx$$

Exercice 13

Pour tout entier naturel n, on pose :
$$I_n = \int_1^e x^2 (\ln x)^n\, dx$$
1. Calculer $I_0 = \int_1^e x^2\, dx$.
2. À l'aide d'une intégration par partie, montrer que : $I_1 = \frac{2e^3+1}{9}$.
3. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ 3I_{n+1} + (n+1)I_n = e^3$
4. En déduire I_2.
5. Démontrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ I_n \geq 0$.
6. Déduire de la question 3 que pour tout entier naturel n non nul, on a : $I_n \leq \frac{e^3}{n+1}$
7. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

Exercice 14

Pour tout entier naturel n non nul, on pose :
$$I_n = \int_0^1 \ln(1+x^n)\, dx$$
1. Montrer que : $I_1 = 2\ln 2 - 1$.
2. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ 0 \leq I_n \leq \ln 2$
3. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
4. En déduire que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par :
$$f(x) = \ln(1+x) - x$$
5. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}^+$, puis déterminer le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}^+$.
6. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^+$:
$$\ln(1+x^n) \leq x^n$$
7. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.